Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

УДК 533.6

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА НАЧАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Куликовский В. А.

Исследуются вопросы существования, единственности и аналитичности решения задачи Коши в комплексном и вещественном пространствах для квазилинейной аналитической системы уравнений, когда начальные данные заданы на аналитической поверхности, содержащей характеристические точки, причем в последних имеет место рассогласование начальных данных и системы уравнений. В частности, исследуется задача Коши с начальными данными на огибающей одного из семейств характеристических поверхностей системы.

Разрывы, траектории которых являются огибающими характеристических поверхностей, встречаются при изучении волн детонации Чепмена—Жуге в газовой динамике [1—3] и магнитной гидродинамике [4, 5], а также в теории снежных лавин [6]. Построение решений вблизи огибающих характеристических поверхностей представляет интерес как в связи с новыми задачами о детонации в газах, учитывающими неоднородность фона, притоки массы, импульса и энергии к газу, искривленность фронта волны, так и в связи с другими моделями.

До настоящего времени исследования подобных задач ограничивались линейными системами [7—12], где существенно использовалась известность порядка касания характеристических поверхностей и начального многообразия.

1. Рассмотрим в m-мерном комплексном пространстве $x_1, \ldots, x_m$ систему квазилинейных уравнений первого порядка, коэффициенты и правые части которой—комплекснозначные функции, аналитичные по переменным $x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_n$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + b_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Пусть на аналитической поверхности S комплексной коразмерности 1 заданы аналитические начальные значения неизвестных функций, такие, что поверхность S является огибающей одного из семейств характеристических поверхностей системы (1.1). Не ограничивая общности, можно считать, что $u_i\,|_S = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) и в некоторой области D поверхность S задается соотношением $x_1 = 0$. На поверхности S: $x_1 = 0$ выполнены известные условия о неразрешимости (1.1) относительно $\partial u_i/\partial x_1$ ($i = 1, \ldots$ $\ldots, n$): $\operatorname{rank}\{a_{ij1}\} = n - 1$, $\operatorname{rank}\{a_{ij1} \mid b_i\} = n$. Последнее условие можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{121} & a_{131} \ldots a_{1n1} \\ b_2 & a_{221} & a_{231} \ldots a_{2n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ b_n & a_{n21} & a_{n31} \ldots a_{nn1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.2}$$

Отсюда вытекает отсутствие классического решения задачи Коши с начальными данными на огибающей характеристических поверхностей.

Исследуем вопрос о существовании непрерывных функций u_i ($i =$ $= 1, \ldots, n$), удовлетворяющих начальным условиям на S и системе (1.1) вне S.

Определение. Функции u_i ($i = 1, \ldots, n$) будем называть решением (обобщенным) задачи Коши для системы (1.1) в области U, если они непрерывны в $\bar{U}$, принимают начальные значения на $\bar{U} \cap S \neq \varnothing$ и удовлетворяют системе (1.1) всюду в U, за исключением, быть может, точек аналитического множества размерности не выше, чем $m - 1$.

Выбирая в качестве новых независимых переменных величины u_1, $x_2, \ldots, x_m$, а в качестве неизвестных функций — величины $x_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n$ [2], получим нелинейную систему

$$(1.3) \qquad \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(a_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+b_i\right)\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+\sum_{j=2}^{n}\left(a_{ij1}-\sum_{k=2}^{m}a_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u_j}{\partial u_1}-$$
$$-\sum_{k=2}^{m}a_{i1k}\frac{\partial x_1}{\partial x_k}+a_{i11}=0, \quad i=1,\ldots,n$$

В новых переменных начальные данные $x_1 = 0$, $u_i = 0$ ($i = 2, \ldots, n$) заданы на поверхности $S : u_1 = 0$. На этой поверхности определитель матрицы, составленный из коэффициентов при частных производных по u_1, совпадает с определителем (1.2), взятом при $x_1 = 0$. С другой стороны, определитель главного минора расширенной матрицы, соответствующий $\partial x_1/\partial u_1$, вычисленный на поверхности $u_1 = 0$, совпадает с определителем матрицы $\{a_{ij1}\}$, вычисленным при $x_1 = 0$. Отсюда вытекает, что к задаче Коши для системы (1.3) с однородными начальными данными на поверхности $u_1 = 0$ (эту задачу назовем сопряженной к исходной) применима теорема Коши — Ковалевской, обеспечивающая существование, единственность и аналитичность решения в окрестности начальной поверхности, причем разложение в ряд для x_1 начинается с члена порядка не ниже двух

$$(1.4) \qquad F(u_1, x) \equiv x_1 - \sum_{q=p}^{\infty} x_{1q}(x')\, u_1^q = 0, \quad x' = (x_2, \ldots, x_m), \quad p \geqslant 2$$

$$(1.5) \qquad u_i - \sum_{q=1}^{\infty} v_{iq}(x')\, u_1^q = 0, \quad i = 2, \ldots, n$$

Величины $x_{1q} = \partial^q x_1 / \partial u_1^q \,|_{u_1=0}$ и $u_{iq} = \partial^q u_i / \partial u_1^q \,|_{u_1=0}$ ($i = 2, \ldots$ $\ldots, n$) определяются известным образом [13] при помощи системы (1.3) и являются аналитическими функциями своих аргументов на S. За область определения функций $x_1, u_2, \ldots, u_n$ в пространстве u_1, x' следует, очевидно, взять такую область D_1, чтобы, с одной стороны, ряды (1.4) и (1.5) сходились, а с другой — точка x_1 (u_1, x'), x' попадала в область D.

Перейдем от переменных u_1, x' к прежним переменным. Пусть p — индекс при первом, неравном тождественно нулю на $S \cap D$ коэффициенте в разложении (1.4). Множество нулей функции $x_{1p}(x')$ составляет аналитическое множество $M \subset S$ комплексной коразмерности 2 [14], которое, тем самым, не делит S. Рассмотрим точку $a = (0, a') \in S \cap D$: $x_{1p}(a') \neq 0$. Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса, в пространстве переменных u_1, x существует такая окрестность V_a точки $(0, 0, a')$, в которой

$$F(u_1, x) = [u_1^p + \alpha_1(x)\, u_1^{p-1} + \ldots + \alpha_p(x)]\, \Omega(u_1, x) \equiv P_a \Omega$$

Здесь α_i ($i = 1, \ldots, p$) и Ω — функции, аналитические в V_a, причем $\Omega(0, a) \neq 0$ и $\alpha_i(a) = 0$ ($i = 1, \ldots, p$).

Равенство (1.4), таким образом, эквивалентно $P_a = 0$. Псевдополином P_a имеет ровно p непрерывных корней $u_1^{(j)} = u_1^{(j)}(x)$ ($j = 1, \ldots, p$), аналитичных в U_a всюду, за исключением точек дискриминантного множества $\Delta_a \subset U_a$, где псевдополином P_a имеет по меньшей мере один кратный корень.

Покажем, что $\Delta_a = S \cap U_a$. Пусть x' — произвольная точка из $S \cap U_a$. Фиксируя x', применим к (1.4) теорему Пюизё об обращении рядов [15]

$$(1.6) \qquad u_1 = \sum_{q=1}^{\infty} u_{1q}(x')\, x_1^{q/p}$$

При фиксированном x' p-значная функция (1.6) аналитична в некоторой окрестности точки $x_1 = 0$ за исключением самой точки $x_1 = 0$, где все p ветвей совпадают. Поскольку в каждой точке своей области сходимости функция (1.6) удовлетворяет равенству (1.4), то каждая ветвь (1.6) является корнем псевдополинома P_a и, наоборот, каждый корень представим в виде (1.6). Из этого следует, что ряды (1.6) сходятся внутри U_a равномерно по x' и функции $u_{1q}(x')$ $(q = 1, 2, \ldots)$ аналитичны на $S \cap U_a$.

Теперь рассмотрим переход к прежним переменным в окрестности точки $b = (0, b') \in M$, где $x_{1p}(b') = \ldots = x_{1s-1}(b') = 0$, $x_{1s}(b') \neq 0$, $p < s < \infty$. Множество, определяемое этими условиями, имеет комплексную размерность не выше, чем $m - 2$, и не делит S. Как и раньше, в пространстве u_1, x существует окрестность V_b точки $(0, 0, b')$, в которой (1.4) эквивалентно равенству нулю некоторого псевдополинома Вейерштрасса степени s, коэффициенты которого аналитичны на $U_b = V_b \cap D$

$$P_b \equiv u_1^s + \beta_1(x)\, u_1^{s-1} + \ldots + \beta_{s-1}(x)\, u_1 + \beta_s(x) = 0$$

В U_b существует ровно s непрерывных корней P_b, аналитичных всюду на U_b, за исключением точек дискриминантного множества $\Delta_b \subset U_b$, которые являются точками ветвления корней P_b. Очевидно, $S \cap U_b \subset \Delta_b$. С другой стороны, всегда найдется точка $a \in U_b \cap S \setminus M$, в окрестности которой $U_a \subset U_b$ существует только p функций $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(p)}$, удовлетворяющих (1.4). Эти p функций будут в силу $U_a \subset U_b$ среди корней псевдополинома P_b. Остальные его $s - p$ корней $u_1^{(p+1)}, \ldots, u_1^{(s)}$ обращаются в нуль на S только в точках аналитического множества $x_{1p}(x') = \ldots = x_{1s-1}(x') = 0$. Совокупность корней $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(s)}$ можно рассматривать как многозначную функцию, аналитичную на $U_b \setminus \Delta_b$. Непрерывный переход с одной ветви на другую может быть осуществлен вдоль кривой, проходящей через точку из Δ_b: например, величины $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(p)}$ переходят одна в другую на $U_b \cap S \subset \Delta_b$.

Аналитическое множество Δ_b определяется равенством нулю дискриминанта псевдополинома P_b, который имеет нуль порядка $s\,(s - 1)$ в точке b и нуль порядка $p\,(p - 1)$ в точках $S \setminus M$. Следовательно, согласно подготовительной теореме Вейерштрасса, S не исчерпывает Δ_b и переход с ветвей $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(p)}$ на ветви $u_1^{(p+1)}, \ldots, u_1^{(s)}$ может происходить и вне S.

Множество $\Delta_b \setminus S$ характеризуется тем, что на нем $u_1^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, s)$ непрерывны, но не имеют производной, т. е. испытывают слабый разрыв. Как известно [13], слабые разрывы допустимы исключительно вдоль поверхностей, имеющих характеристическое направление. Следовательно, множество $\Delta_b \setminus S$ состоит из характеристических поверхностей, проходящих через точку b и принадлежащих различным характеристическим семействам, хотя, возможно, и не всем.

Все сказанное можно подытожить в виде следующих теорем.

Теорема 1. Для любой точки $a = (0, a') \in S \cap D$: $x_{1p}(a') \neq 0$ существует окрестность $U_a \subset D$, в которой решение задачи Коши (в определенном ранее смысле) для системы (1.1) существует, является p-значной функцией, аналитичной на $U_a \setminus S$, и представимой в виде сходящихся на U_a рядов

$$(1.7) \qquad u_i = \sum_{q=1}^{\infty} u_{iq}(x')\, x_1^{q/p}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Здесь p — индекс первого не равного тождественно нулю на S коэффициента в разложении (1.4).

Утверждение теоремы 1 получается подстановкой (1.6) в равенства (1.5). На практике величину p удобнее всего определять подставляя ряды (1.7) с неопределенными коэффициентами в систему (1.1) [2].

Теорема 2. Для точки $b = (0, b') \in S \cap D$, такой, что $x_{1p}(b') = \ldots$ $\ldots = x_{1s-1}(b') = 0$, $x_{1s}(b') \neq 0$ $(p < s < \infty)$, существует окрестность $U_b \subset D$, в которой решение задачи Коши (в определенном ранее смысле) существует и является s-значной аналитической функцией, аналитичной на $U_b \setminus \Delta_b$, где Δ_b — аналитическое множество, являющееся дискриминантным для псевдополинома P_b, содержащее множество $S \cap U_b$ и не исчерпывающееся им. На $U_b \cap S \setminus M$ только p ветвей решения $u_i^{(1)}, \ldots$ $\ldots, u_i^{(p)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ принимают начальные значения, остальные $s - p$ ветвей $u_i^{(p+1)}, \ldots, u_1^{(s)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ служат первыми возможными продолжениями в точках $\Delta_b \setminus (S \setminus M)$. Множество $\Delta_b \setminus S$ исчерпывается набором поверхностей, имеющих характеристическое направление и проходящих через точку b.

Заметим, что если в некоторой точке $b = (0, b') : x_{1q}(b') = 0$ $(q = p, p + 1, \ldots)$, то в силу (1.4) и теоремы единственности аналитических функций [14] $x_1 \equiv 0$ в D. Это означает, что функции u_i $(i = 1, \ldots, n)$ не зависят от x_1, и необходимо сократить количество независимых переменных в исходной системе (1.1).

Следствие. Пусть поверхность S нехарактеристична всюду, за исключением точек своего подмножества M_0. Тогда: 1) любая точка $b = (0, b') \in$ $\in M_0 \cap D$ обладает окрестностью U_b, где существование и единственность решения определяются теоремой 2, в которой следует положить $p = 1$, а s — равным минимальному значению q, при котором $x_{1q}(b') \neq 0$ в разложении (1.4); 2) M_0 — аналитическое множество размерности $m - 2$.

Доказательство п. 1) не отличается от доказательства теоремы 2, а п. 2) очевиден, так как множество M_0 с необходимостью определяется аналитическим соотношением $x_{11}(x') = 0$, где $x_{11}(x')$ — первый коэффициент в соответствующем разложении решения задачи, сопряженной к исходной.

Доказанное свойство множества M_0 — следствие аналитичности коэффициентов системы (1.1), ее правых частей, начального многообразия S и начальных данных. Если $\dim M_0 < m - 2$, то в окрестности $U_b \subset D$ любой точки $b \in M_0$ решения задачи Коши не существует. Для линейных систем этот факт был установлен ранее ([7], с. 27).

2. Рассмотрение, проведенное в п. 1, позволяет получить аналоги теорем 1 и 2 для систем с вещественнозначными аналитическими коэффициентами, правыми частями и начальными данными в вещественном пространстве R^m. Существует область $D \subset R^m$, в которой после соответствующей замены начальная поверхность S будет задана соотношением $x_1 = 0$, а начальные значения неизвестных функций будут однородны. Как и в п. 1, перейдем к сопряженной задаче Коши для (1.3). Согласно теореме Коши — Ковалевской, ее решения имеют вид (1.4) и (1.5), где x_{1q} и u_{iq} $(i = 2, \ldots, n)$ — вещественнозначные функции от u_1, x', аналитичные на $S \cap D_1$ (D_1 определяется так же, как и в п. 1). Размерность множества M нулей аналитической функции $x_{1p}(x')$ не превышает $m - 2$, но может быть и меньше.

В основе утверждений, полученных в п. 1, лежали подготовительная теорема Вейерштрасса (ПТВ) и теорема Пюизё об обращении рядов типа (1.4). Для получения вещественного аналога ПТВ достаточно рассмотреть наряду с равенством, доказываемом в ПТВ, комплексно-сопряженное к нему. Редукция теоремы Пюизё к случаю вещественных переменных очевидна и основана на выделении вещественных значений функции корня из действительного числа. Поскольку рассуждения, приведшие к теоремам 1 и 2, будут пригодны с незначительными изменениями и в случае вещественных переменных, аналогам теорем 1 и 2 будут предпосланы лишь замечания по специфике рассматриваемого случая.

1°. В окрестности U_b точки $b = (0, b') : x_{1p}(b') = \ldots = x_{1s-1}(b') = 0$, $x_{1s}(b') \neq 0$ $(s > p \geqslant 1)$ равенство (1.4) эквивалентно равенству нулю некоторого псевдополинома Вейерштрасса P_b с вещественными аналитическими коэффициентами, имеющего степень s. В любой сколь угодно малой окрестности U_b точки b найдется точка $a = (0, a')$: $x_{1p}(a') \neq 0$, в окрестности $U_a \subset U_b$ которой P_b имеет либо один вещественный корень, обращающийся в нуль на S $(p = 1, 3, 5, \ldots)$, либо с одной стороны от S — два, а с другой — ни одного такого корня $(p = 2, 4, \ldots)$. В последнем случае может оказаться, что сколь угодно близко к b на S найдутся точки, вблизи которых решение существует с различных от S сторон, т. е. b лежит на поверхности размерности $m - 2$, разделяющей S на области, где $x_{1p}(x')$ имеет разные знаки.

2°. Изменение количества вещественных корней псевдополинома P_b может происходить, в силу теорем об аналитическом продолжении [14], только при переходе через поверхности размерности $m - 1$, состоящие из точек Δ_b, и притом лишь на четную величину.

3°. Как и в п. 1, дискриминантное множество Δ_a, $a = (0, a')$: $x_{1p}(a') \neq 0$ совпадает в соответствующей окрестности U_a с множеством $S \cap U_a$; дискриминантное множество Δ_b псевдополинома P_b может содержать кроме поверхностей размерности $m - 1$ поверхности меньшей размерности, в частности изолированные относительно Δ_b точки.

4°. Поверхности размерности $m - 1$ из Δ_b делят U_b на конечное множество связных областей U_{bi} $(i = 1, \ldots, k)$. В каждой такой области количество вещественных корней P_b постоянно всюду, за исключением, быть может, точек из Δ_b, совокупность которых не делит рассматриваемую область. Однако среди вещественных корней P_b могут оказаться такие, которые не принимают нулевых значений на S нигде, кроме точек некоторого подмножества множества $M = \{x' : x_{1p}(x') = 0\}$.

Теорема 3. Пусть p — индекс первого, неравного тождественно нулю на $S \cap D$ коэффициента $x_{1p}(x')$ в разложении (1.4) решения задачи, сопряженной к исходной. Тогда при нечетном p для каждой точки $a = (0, a') \in S$: $x_{1p}(a') \neq 0$ существует окрестность U_a, в которой решение (в определенном ранее смысле) задачи Коши для системы (1.1) существует, единственно, аналитично на $U_a \setminus S$ и представимо в виде сходящихся в U_a

рядов с аналитическими на S коэффициентами

$$(2.1)\qquad u_i=\sum_{q=1}^{\infty} u_{iq}(x')\,x_1^{q/p},\quad i=1,\ldots,n$$

При четном p для каждой точки $a=(0,a')\in S$: $x_{1p}(a')\neq 0$ существует окрестность U_a, разделяемая поверхностью S на две части $U_a{}^+$: $x_1/x_{1p}>0$ и $U_a{}^-$: $x_1/x_{1p}<0$, обладающие свойствами: а) в $U_a{}^-$ решения задачи Коши для системы (1.1) не существует; б) в $U_a{}^+$ решение существует, является двухзначной функцией, аналитичной в $U_a{}^+$ и представимой сходящимися в $U_a{}^+$ рядами с аналитическими на S коэффициентами

$$(2.2)\qquad u_i=\sum_{q=1}^{\infty} u_{iq}(x')\,(\pm\sqrt[p]{|x_1|})^q,\quad i=1,\ldots,n$$

Теорема 4. Пусть U_b— окрестность точки $b=(0,b')\in S$: $x_{1p}(b')=\ldots$ $\ldots=x_{1s-1}(b')=0$, $x_{1s}(b')\neq 0$ $(s>p\geqslant 1)$, в которой равенство (1.4) эквивалентно равенству $P_b=0$. Окрестность U_b разделена поверхностями размерности $m-1$, состоящими из точек дискриминантного множества Δ_b, на конечное число связных областей U_{bi}, $b\in\partial U_{bi}$ $(i=1,\ldots,k)$. В областях U_{bi} $(i=1,\ldots,r\leqslant k)$: $\partial U_{bi}\cap(S\setminus M)\neq\varnothing$ вопросы существования, количества и аналитичности решений задачи Коши определяются теоремой 3. В оставшихся областях U_{bi} $(i=r+1,\ldots,k)$, если они есть, решение может существовать или не существовать, но если оно существует, то оно аналитично вне точек Δ_b и не более чем s-значно. В объединении областей U_{bi}, где решение существует, оно не имеет равномерной асимптотики при $x\to b$. Если система (1.1) гиперболична вне S, то множество Δ_b исчерпывается поверхностями, имеющими характеристическое направление.

Заметим, что ответы на вопросы о том, в каких областях U_{bi} решение есть, а в каких его нет, и можно ли выделить решения, непрерывные в объединении нескольких смежных областей U_{bi}, составляющих, например, одну из двух половин, на которые делит окрестность U_b поверхность S, требуют конкретизации постановки задачи. В литературе выделены классы задач Коши для линейных систем в случае $p=1$ и b — изолированная точка множества M, когда решение как неоднозначно [11, 12], так и однозначно [9—11] в одной из двух половин, на которые поверхность S делит окрестность U_b.

Квазилинейность рассмотренных задач делает возможным использование результатов данной работы в теории детонационных волн. Рассмотрим, например, случай общего положения, когда $x_{12}(x')\neq 0$ в (1.4) (т. е. $p=2$). Необходимым условием существования волны Чепмена — Жуге является возможность построения течения за ней. Если по условию примыкающее к волне Чепмена — Жуге течение должно располагаться при $x_1>0$, то его можно построить, если $x_{12}(x')>0$, где $x_{12}(x')$ определяется условиями на волне и модельными уравнениями (1.1).

Наличие правых частей в (1.1) позволяет получать наиболее общие условия существования волн Чепмена — Жуге при наличии притоков массы, импульса и энергии в течении за волной, произвольной искривленности фронта волны и неоднородности фона перед ней. В случае, когда волна Чепмена — Жуге существует, параметры течения за волной будут разлагаться в сходящиеся ряды вида (2.1) или (2.2). В частности, известные разложения решений за расходящимися криволинейными в том числе цилиндрическими и сферическими волнами детонации Чепмена — Жуге, распространяющимися по однородному покоющемуся газу [3, 16], представляют собой сходящиеся ряды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин В. А., Черный Г. Г.* Асимптотические законы поведения детонационных волн.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 3, с. 393—405.
2. *Левин В. А., Свалов А. М.* Об особенностях распространения детонационных волн.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 194—203.
3. *Свалов А. М.* Об условиях существования криволинейной волны детонации Чепмена — Жуге.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1976, № 6, с. 71—75.
4. *Бармин А. А.* Исследование поверхности разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, с. 801—810.
5. *Бармин А. А., Левин В. А.* Асимптотическое поведение плоской магнитогидродинамической детонационной волны.— Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1, с. 83—87.
6. *Куликовский А. Г., Эглит М. Э.* Двумерная задача о движении снежной лавины с плавно меняющимися свойствами.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 5, с. 837—848.
7. *Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т.* Задача Коши. М.: Мир, 1967. 152 с.
8. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Асимптотика в целом характеристической задачи Коши на комплексном аналитическом многообразии.— В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1980, с. 188—190.
9. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965. 379 с.
10. *Zacmanoglou E. C.* Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for the first order partial differential equations.— Arch. Rat. Mech. Analysis, 1970, v. 38, No. 3, p. 178—188.
11. *Treves F.* Linear partial differential equations. N. Y.: Gordon, 1970. 120 p.
12. *Zachmanoglou E. C.* Non-uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients.— Arch. Rat. Mech. Analysis, 1967, v. 27, No. 5, p. 373—384.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
14. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. 2. М.: Наука, 1976. 400 с.
15. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967. 486 с.
16. *Зельдович Я. Б.* О распределении давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности при сферическом распространении детонационных волн.— ЖЭТФ, 1942, т. 12, вып. 9, с. 389—406.

Поступила в редакцию
16.III.1984

Москва