

УДК 533.6

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЕДИНИЧНОЙ ВОЛНЫ НА V-ОБРАЗНОМ КРЫЛЕ

Третьяков П. В.

В линейной постановке решается задача дифракции плоской единичной волны на V-образном крыле, движущемся со сверхзвуковой скоростью.

Решение основано на исследовании собственных функций для класса автомодельных решений трехмерного волнового уравнения. Методом, аналогичным рассмотренному в [1], строится краевой интеграл. Используются результаты, полученные в [1—3].

1. Будем искать решение волнового уравнения

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

для однородных функций нулевой размерности относительно t и $q = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Было показано [1], что, зная однородное решение нулевой размерности, с помощью соотношения

$$\Phi_n = \frac{(-1)^n (t^2 - q^2)^{n+1}}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{\Phi_0}{t^2 - q^2} \right)$$

можно получить однородное решение размерности $n \in N$. Здесь Φ_0 и Φ_n — однородные относительно t и q решения уравнения (1.1) размерности 0 и n соответственно.

Для однородного решения Φ_0 нулевой размерности имеем представление в виде ряда по собственным функциям

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & -(\rho^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_{n,0}}{2} G_{n,0}(\varphi) Q_n(\rho) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{n,k} \cos k\lambda\theta + B_{n,k} \sin k\lambda\theta) G_{n,k}(\varphi) Q_{n+k\lambda}(\rho) \right] \\ G_{n,k}^{(\varphi)} = & C_n^{k\lambda+1/2} (\cos \varphi) \sin^{k\lambda} \varphi \\ \left. \begin{aligned} A_{n,k} \\ B_{n,k} \end{aligned} \right\} = & \frac{2n! (n + k\lambda + 1/2) \Gamma(k\lambda + 1/2) \Gamma(2k\lambda + 1)}{T \sqrt{\pi} \Gamma(n + 2k\lambda + 1) \Gamma(k\lambda + 1)} \times \\ & \times \int_0^T \int_0^\pi G_{n,k}(\chi) F(\psi, \chi) \sin \chi d\chi \begin{cases} \cos k\lambda\psi \\ \sin k\lambda\psi \end{cases} d\psi \\ F(\theta, \varphi) = & \Phi_0|_{t=q}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{T}, \quad \rho = \frac{t}{q} \end{aligned}$$

Здесь θ и φ — сферические угловые координаты, $C_n^\nu(\cos \varphi)$ — полиномы Гегенбауэра, $Q_\mu(\rho)$ — функция Лежандра второго рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, T — период решения по θ .

Суммируя полученный ряд по n (см. [2]) и учитывая равенство

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\lambda(\psi - \theta) \xi^{k\lambda} = \frac{1 - \xi^{2\lambda}}{1 - 2\xi^\lambda \cos \lambda(\psi - \theta) + \xi^{2\lambda}}, \quad |\xi| < 1$$

находим

$$(1.2) \quad \Phi_0 = -(\rho^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^\pi \frac{F(\psi, \chi) (1 - \xi^{2\lambda}) \sin \chi d\chi d\psi}{\Omega [1 - 2\xi^\lambda \cos \lambda (\psi - \theta) + \xi^{2\lambda}]}$$

$$\Omega = [(\rho - \cos \varphi \cos \chi)^2 - \sin^2 \varphi \sin^2 \chi]^{1/2}$$

$$\xi = \frac{\sin \varphi \sin \chi}{\Omega + \rho - \cos \varphi \cos \chi}$$

Этот краевой интеграл при $T = 2\pi$ и $T = 4\pi$ совпадает с полученными ранее [1, 4] краевыми интегралами.

2. С помощью полученного интеграла решим задачу дифракции единичной плоской волны на движущемся с постоянной сверхзвуковой скоростью (со сверхзвуковыми кромками) V -образном крыле.

Пусть V -образное крыло с углом стреловидности при вершине $\pi/2 - \nu$ и углом V -образности $\pi - 2\beta$ (фиг. 1) движется симметричным образом в отрицательном направлении оси z декартовой системы координат с постоянной сверхзвуковой скоростью ($M > 1$). Ось y расположена в плоскости симметрии крыла. Угловые сферические координаты выберем следующим образом:

$$\theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Пусть на крыло падает единичная плоская волна ($H(x)$ — функция Хевисайда)

$$\Phi = H(t - q \cos \varphi \cos \alpha + q \sin \varphi \sin \theta \sin \alpha), \quad \alpha = \text{const}$$

Схема картины дифракции представлена на фиг. 2. Только внутри дифрагированной сферы с центром в точке O течение будет пространственным, а в остальных областях решение можно найти с помощью уравнений, описывающих плоское движение.

В областях $AECQ$, $AE'BQ'$, $CNGMH$, $BNGM'H'$ и $NMGM'T$, а также в конусах с вершинами в точках A , B , C (в дальнейшем конусы с вершинами в соответствующей точке будем называть этой буквой, например конус A) решение находится так же, как в [1]

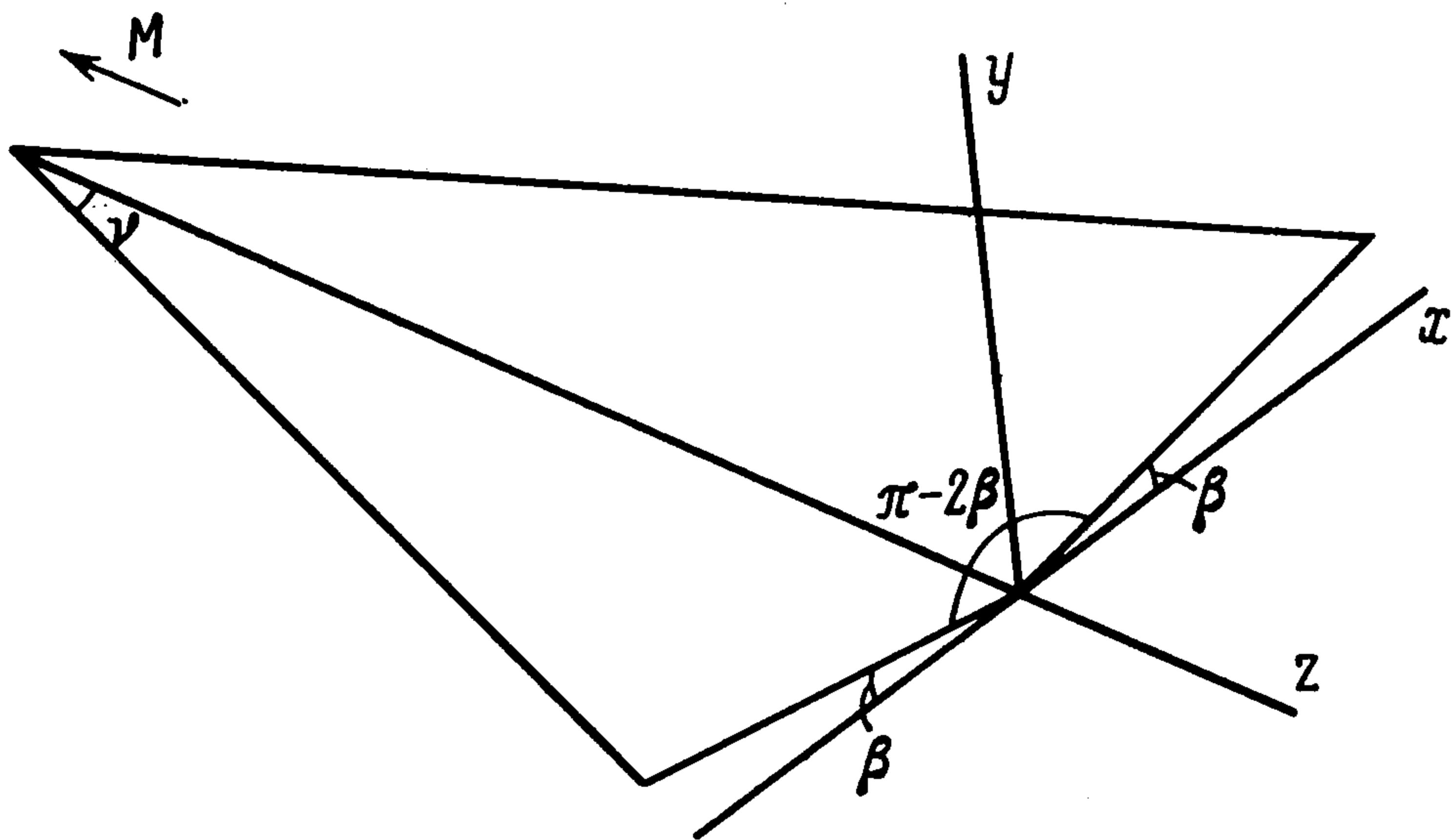
$$\Phi = 1 + L, \quad L = \frac{M \sin \nu \cos \beta}{\sqrt{M^2 \sin^2 \nu - 1}} \quad (AECQ, AE'BQ')$$

$$\Phi = 2 \quad (CNGMH, BNGM'H'), \quad \Phi = 3 \quad (NMGM'T)$$

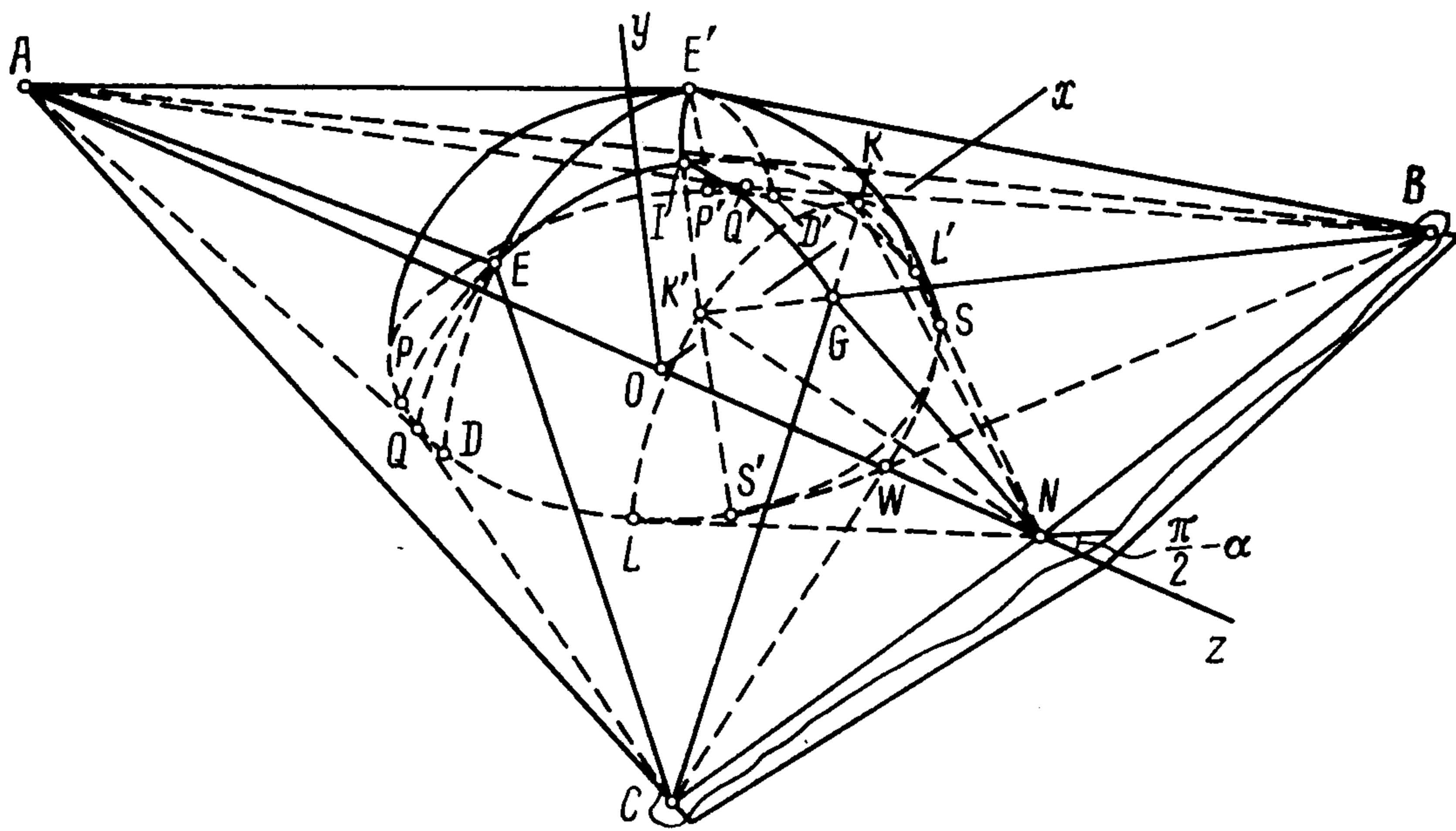
Для того чтобы решение внутри конусов зависело только от трех переменных (x_1, y_1, τ), а картина дифракции в конусах привелась к виду, представленному на фиг. 3, необходимо сделать преобразование координат

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= x \cos \beta \cos \mu \pm y \sin \beta \cos \mu \mp z \sin \mu \\ y_1 &= y \cos \beta \mp x \sin \beta \\ z_1 &= \pm x \sin \mu \cos \beta + y \sin \mu \sin \beta + z \cos \mu \\ \tau &= (\zeta_0 t - z_1) (\zeta_0^2 - 1)^{-1/2}, \quad \cos \mu = \zeta_1 (\zeta_0 \cos \gamma)^{-1} \\ \zeta_0 &= [(M \cos \alpha + 1)^2 \sin^2 \nu + \zeta_1^2]^{1/2} (\cos \gamma)^{-1} \\ \zeta_1 &= M \sin \nu \sin \alpha \cos \beta + \cos \nu, \quad \cos \gamma = \cos \alpha \cos \nu - \\ &\quad - \sin \alpha \sin \beta \sin \nu \end{aligned}$$

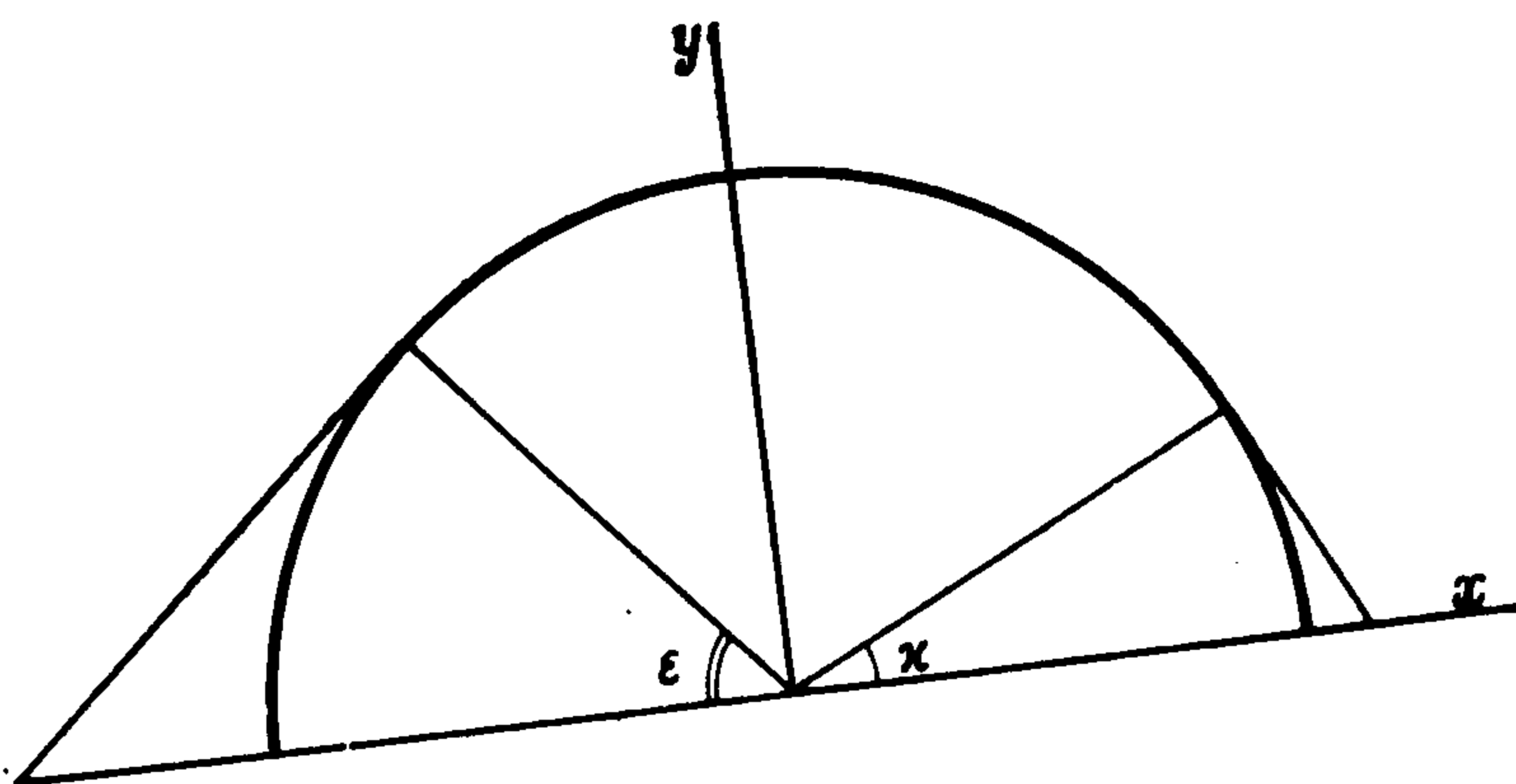
Верхний и нижний знаки соответствуют конусам B и C .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для конуса A имеем

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = -z, \quad \tau = \frac{Mt - z_1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Кроме того, для приведения картины дифракции в этом конусе изображенному на рис. 3, нужно сделать конформное преобразование

$$R_2 \exp(i\theta_2) = R_1^\lambda \exp(i\lambda(\theta_1 - \beta))$$

$$R_1 = \frac{\tau}{r_1} - \sqrt{\frac{\tau^2}{r_1^2} - 1}, \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \theta_1 = \arctg \frac{y_1}{x_1}$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\pi - 2\beta} \quad R_2 = \frac{\tau}{r_2} - \sqrt{\frac{\tau^2}{r_2^2} - 1}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{y_2}{x_2}$$

Граничные условия на поверхностях конусов и углы, разделяющие различные граничные условия (фиг. 3), будут следующими:

$$0 \leq \theta_1 \leq \kappa_B \Phi = 1 + L, \quad \kappa_B < \theta_1 < \pi - \varepsilon_B \Phi = 1, \quad \pi - \varepsilon_B \leq \theta_1 \leq \pi \Phi = 2 \quad (B)$$

$$\sin \varepsilon_B = \frac{\zeta_0 \sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}}, \quad \sin \kappa_B = \frac{\zeta_0 \sin \alpha \cos \beta}{L \sqrt{\zeta_0^2 - 1}}$$

$$0 \leq \theta_1 \leq \kappa_C \Phi = 2, \quad \kappa_C < \theta_1 < \pi - \varepsilon_C \Phi = 1, \quad \pi - \varepsilon_C \leq \theta_1 \leq \pi \Phi = 1 + L \quad (C)$$

$$\varepsilon_C = \kappa_B, \quad \kappa_C = \varepsilon_B$$

$$0 \leq \theta_2 \leq \lambda \kappa \text{ и } \pi - \lambda \varepsilon \leq \theta_2 \leq \pi \Phi = 1 + L,$$

$$\lambda \kappa < \theta_2 < \pi - \lambda \varepsilon \Phi = 1 \quad (A)$$

$$\sin \varepsilon = \sin \kappa = \frac{M \sin \alpha \cos \beta}{L \sqrt{M^2 - 1}}$$

Буквы в скобках означают соответствующий конус. Для всех конусов на поверхности крыла имеем условие непротекания $\partial \Phi / \partial n = 0$, в новых координатах это условие переписывается так: $\partial \Phi / \partial y_1|_{y_1=0} = 0$, поэтому можно симметричным образом продолжить на полуплоскость $y_1 < 0$ граничные условия для каждого конуса и применить интеграл Пуассона. Так как решение для всех конусов находится одинаково, приведем решение только для конуса C

$$\Phi = 1 + Z(\kappa - \theta_1) + Z(\kappa + \theta_1) + L [Z(\pi + \varepsilon - \theta_1) - Z(\pi - \varepsilon - \theta_1)]$$

$$Z(\psi) = \frac{1}{\pi} \arctg \left(\omega \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right), \quad \omega = \frac{1 + R_1}{1 - R_1}$$

Для решения задачи дифракции падающей плоской волны на ребре двугранного угла, образованного плоскостями крыла (ребро крыла), воспользуемся методом, предложенным в [3]. Для того чтобы найти решение внутри поверхности дифракции падающей волны, нужно вычислить следующий интеграл:

$$(2.2) \quad \Phi = \Phi^+ + \Phi^-$$

$$\Phi^\pm = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{R^\lambda}^{R^\lambda \exp(\pm i\lambda 2\pi)} F(\cos \psi) \frac{(1 + u \exp(\mp i\lambda \theta)) du}{2u(1 - u \exp(\mp i\lambda \theta))}$$

$$R = \frac{\tau}{r} - \sqrt{\frac{\tau^2}{r^2} - 1}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad \tau = \frac{t - z \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Здесь $F(\cos \psi) = F(t, r, z, \cos \psi)$ — решение за падающей волной, $\cos \psi = 1/2 (u^{1/\lambda} + u^{-1/\lambda})$, ψ — полярный угол цилиндрической системы координат, по которому ведется интегрирование.

Учитывая, что в реальной задаче дифракции участвует отраженная волна, для нахождения полного решения внутри поверхности дифракции вычислим интеграл (2.2) для отраженной волны и просуммируем полученные результаты. В итоге находим, что решение внутри конуса N (фиг. 2) будет таким:

$$\Phi = 3 + \Psi^- + \Psi^+$$

$$\Psi^\pm = \mp \frac{1}{\pi} \arctg \frac{2R^\lambda \cos \lambda (\pi/2 - \theta) \pm (1 + R^{2\lambda}) \cos \lambda \pi}{\sin \lambda \pi (1 - R^{2\lambda})}$$

Обозначим решения внутри конусов A , B , C и N соответственно

$$\Phi = 1 + \Phi_A, \quad \Phi = 1 + \Phi_B, \quad \Phi = 1 + \Phi_C, \quad \Phi = 2 + \Phi_N$$

Заметим, что есть области, где конусы пересекаются. В этих областях решение не будет простой суммой решений внутри пересекающихся конусов (если строить решение, непрерывное на границе этих областей).

Так, в области пересечения конусов A и C (область $PQED$ на фиг. 2) и пересечения конусов A и B (область $P'Q'E'D'$ на фиг. 2) имеем

$$\Phi = 1 + \Phi_A + \Phi_C - L(PQED),$$

$$\Phi = 1 + \Phi_A + \Phi_B - L(P'Q'E'D')$$

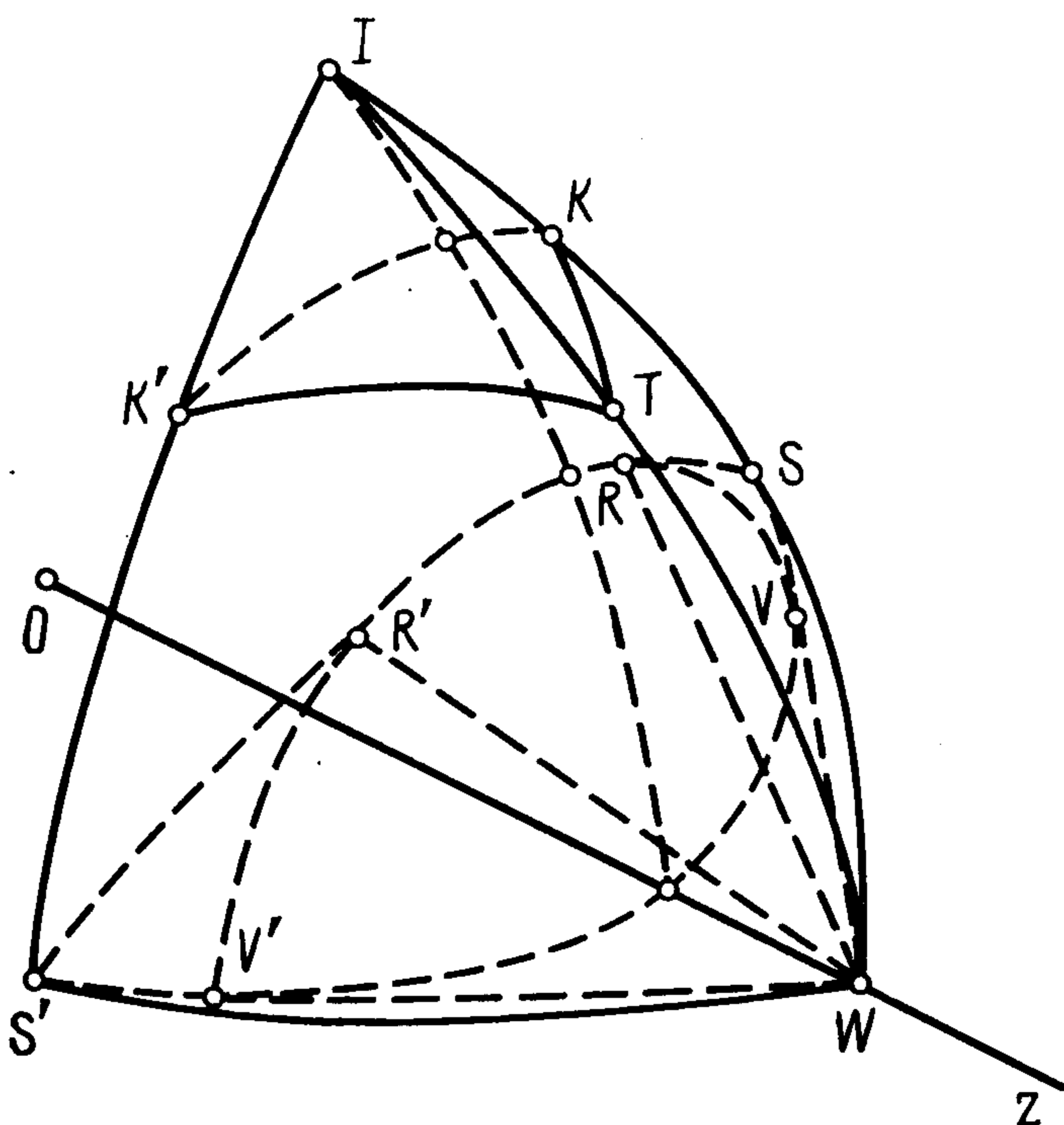
В области пересечения B и C , но вне конуса N (область $IKTGK'$; детальный вид этой и следующих областей дан на фиг. 4), получаем

$$\Phi = 1 + \Phi_B + \Phi_C$$

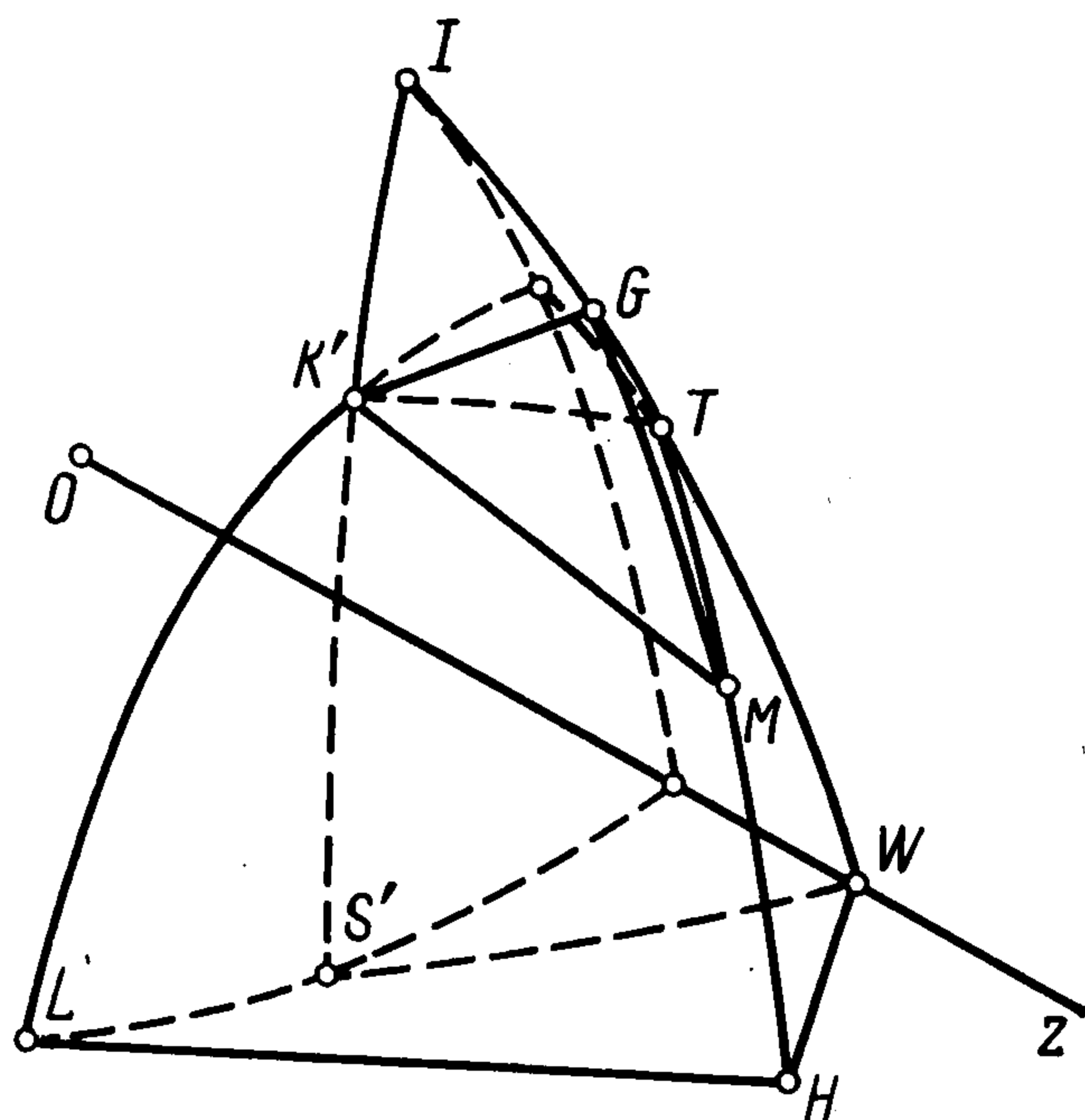
В области пересечения конусов B , C и N ($S'K'KSWT$) находим

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_C + \Phi_N$$

Внутри областей $HLK'TW$ (фиг. 5) и $H'L'KTW$ (эта область симметрична



Фиг. 4



Фиг. 5

рична $HLK'TW$ относительно плоскости yOz), где конус N пересекается с одним из конусов B и C , решение таково:

$$\Phi = 1 + \Phi_B + \Phi_N, \quad \Phi = 1 + \Phi_C + \Phi_N$$

В областях, расположенных внутри одного из конусов C или B за отраженной плоской волной, но вне другого конуса, а также вне конуса N (область $GTK'M$ на фиг. 5 и область $GTKM'$, симметричная предыдущей относительно плоскости yOz), решение будет соответственно следующим:

$$\Phi = 2 + \Phi_B(GTKM'), \quad \Phi = 2 + \Phi_C(GTK'M)$$

Из фиг. 4 видно, что есть область, где конические волны B и C дифрагируют на ребре крыла (конус W), и области ($WS'R'V'$ и $WSRV$), где эти волны отражаются от поверхности крыла. В дальнейших построениях будем называть конические волны B и C падающими, а их отражения поверхностью крыла — отраженными конусами. Если $\Phi(t, r, z, \theta)$ — решение за падающим конусом, записанное в цилиндрической системе координат, полученной из исходных координат x, y, z , то решение за отраженным ко-

нусом определяется по формуле

$$\Phi = \Phi(t, r, z, \theta) + \Phi(t, r, z, \pi \pm 2\beta - \theta)$$

(верхний знак соответствует конусу B , нижний — конусу C).

Обозначим Φ_{B1} и Φ_{C1} — полное решение за конусами B и C)

$$\begin{aligned} \Phi_{B1}(t, r, z, \pi + 2\beta - \theta) &= 1 + \Phi_{B0}, \quad \Phi_{C1}(t, r, z, \pi - 2\beta - \theta) = \\ &= 1 + \Phi_{C0} \end{aligned}$$

Решение внутри конуса W также находится по методу, предложенному [3]. Воспользовавшись интегралом (2.2), получим

$$\begin{aligned} \Phi_W &= \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 (Y_{mj}^+ + Y_{mj}^-) \\ Y_{mj}^{\pm} &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{R^\lambda}^{R^\lambda \exp(\pm i2\lambda\pi)} F_m \frac{(1 + u \exp(\mp i\lambda\theta_{jm})) du}{2u(1 - u \exp(\mp i\lambda\theta_{jm}))} \\ F_1 &= \Phi_B(t, r, z, \psi) + 1, \quad F_2 = \Phi_C(t, r, z, \psi) + 1 \\ \cos \psi &= \frac{1}{2} (u^{1/\lambda} + u^{-1/\lambda}), \quad R = \eta - (\eta^2 - 1)^{1/2} \\ \eta &= \frac{t - z\xi_0 \sin \mu \pm (\xi_0^2 - 1)^{1/2} (z^2 + r^2 - t^2)^{1/2}}{\xi_0 r \sin \mu}, \quad \lambda = \frac{\pi}{\pi - 2\beta} \\ \theta_{11} &= \theta - \frac{\pi}{2} + \beta, \quad \theta_{12} = \frac{\pi}{2} + 3\beta - \theta, \quad \theta_{21} = \theta + \frac{\pi}{2} - \beta, \\ \theta_{22} &= \frac{3\pi}{2} - 3\beta - \theta \end{aligned}$$

Здесь ξ_0, μ выбираются такими же, как в (2.1).

Необходимо отметить, что отраженные конусы и конус W находятся внутри пересечения конусов B, C и N . Поэтому полное решение в этих областях

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{B0} + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_N - 1 \quad (WS'R'V') \\ \Phi &= \Phi_{C0} + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_N - 1 \quad (WSRV) \\ \Phi &= \Phi_W + \Phi_N \quad (WV'R'RV) \end{aligned}$$

После определения решения во всех областях, примыкающих к сфере, решение внутри сферы определяется соотношением (1.2). При этом благодаря условию $\partial\Phi / \partial n = 0$ на поверхности крыла граничные условия на сфере достраиваются так, чтобы соблюдалась симметрия относительно плоскостей $\theta = \beta, \theta = \pi - \beta$ (плоскости крыла). Интегрирование ведется по области

$$2\beta - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} - 2\beta, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad T = 2\pi - 4\beta$$

Приведенное решение служит для описания течения для верхней стороны крыла. Решение для нижней стороны ищется следующим образом: в областях, не примыкающих к ребру крыла, выполняется равенство $\Phi_+ + \Phi_- = 2$ (здесь Φ_+ — решение на верхней стороне крыла, а Φ_- — решение с нижней стороны), в областях дифракции на ребре крыла решение вычисляется так же, как в соответствующих областях с верхней стороны крыла, только период решения по θ будет $T = 2\pi + 4\beta$, а вместо $\lambda = \pi / (\pi - 2\beta)$ будет $\lambda_1 = \pi / (\pi + 2\beta)$. Такой же период (и то же λ_1) будет в формуле (1.2) при вычислении решения внутри сферы дифракции с нижней стороны крыла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Третьяков В. В.* Краевые интегралы для волнового уравнения в задаче дифракции плоских волн.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 501—508.
2. *Henrici P.* Addition theorems for general Legendre and Gegenbauer functions.— J. Ration. Mech. Anal., 1955, v. 4, No. 6, p. 983—1018.
3. *Герасимов М. Д., Третьяков В. В.* К точному решению задачи дифракции на многогранном угле.— В кн.: Распространение упругих и упругопластических волн. Фрунзе: Изд-е Фрунз. политехн. ин-та, 1978, с. 54—55.
4. *Третьяков В. В., Третьяков П. В.* К дифракции на клине акустических волн со сферической и цилиндрической симметрией.— В кн.: Газовая и волновая динамика. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 79—83.

Москва

Поступила в редакцию
13.VI.1983