

УДК 533.6.011

ПРОФИЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ И «ПИКОВОЕ» ПРИБЛИЖЕНИЕ

Лихачев В. Н.

Получено решение задачи о распространении осесимметричной ударной волны, образовавшейся в результате начального разрыва скорости. Решение дает универсальный характерный профиль цилиндрических ударных волн в диапазоне малых чисел Маха. Для газа этот диапазон соответствует слабым звуковым возмущениям, для жидкости в рамках данного приближения можно рассматривать подводные взрывы и мощные электрические разряды.

При расчете как сферических, так и цилиндрических ударных волн часто используется эвристическое пиковое приближение, согласно которому спад давления в каверне, образовавшейся в результате взрыва, считается экспоненциальным в зависимости от времени [1, 2]. Использование этой зависимости позволяет получить, например в рамках теории Кирквуда—Бете, экспоненциальное распределение параметров в узкой зоне повышенного давления, распространяющейся непосредственно за скачком («профиль» ударной волны [1]).

Для сферических ударных волн экспоненциальный профиль был получен [3] без каких-либо дополнительных предположений на основании аналитического решения начально-краевой задачи о сферическом поршне, начинающем двигаться с ненулевой начальной скоростью. Это решение доказывает наличие характерного профиля сферических ударных волн в рассматриваемом диапазоне чисел Маха, не связанного с определенным законом спада давления внутри каверны, и хорошо согласуется [4] с результатами экспериментов. Ниже для цилиндрических ударных волн получен неэкспоненциальный профиль.

Используемый асимптотический подход ранее применялся для решения задачи о плавно вдвигающемся поршне [5, 6], для исследования опрокидывания сферической волны сжатия [7] и в ряде других задач.

1. Постановка задачи. Асимптотическое решение. Движение идеальной среды в случае цилиндрической симметрии описывается системой уравнений

$$(1.1) \quad u_t + uu_r = -\frac{1}{\rho} \rho_r c^2, \quad \rho_t + u\rho_r + \rho \left(u_r + \frac{u}{r} \right) = 0$$

где давление и плотность связаны условием баротропии, а скорость звука $c = \sqrt{p/\rho}$. Условие баротропии заменяет уравнение энергии также и на ударной волне.

Пусть в начальный момент времени образуется цилиндрическая осесимметричная полость радиуса r_0 , граница которой в дальнейшем играет роль поршня,двигающегося по закону $r = R(t)$. Для задач ударного типа характерно наличие разрыва начальных параметров среды, вызванного ненулевой начальной скоростью поршня $R'(0) = U$.

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad v = \frac{u}{U}, \quad \tau = \frac{tU}{r_0}, \quad q = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{c_0^2}{U^2}, \quad M = \frac{U}{c_0}$$

где ρ_0, c_0 — плотность и скорость звука в невозмущенной среде.

В безразмерных переменных система (1.1) примет вид

$$(1.2) \quad v_\tau + vv_x = -\frac{1}{1+qM^2} q_x \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 \\ M^2 q_\tau + M^2 v q_x + (1 + qM^2) \left(v_x + \frac{v}{x} \right) = 0$$

Будем искать асимптотическое решение поставленной задачи, считая малым параметром число Маха невозмущенной среды M при условии $R'(t)/U \sim 1$.

Используя условие баротропии при $qM^2 \ll 1$, в уравнении движения можно произвести разложение

$$\frac{(c/c_0)^2}{1 + qM^2} = 1 + M^2 qk$$

Условие на поршне принимает вид: $x = \varphi(\tau)$, причем $\varphi(0) = 1$, $d\varphi/d\tau|_0 = 1$. Условия на слабой ударной волне

$$(1.3) \quad \frac{dx_s}{d\tau} = \frac{1}{M} + \frac{v_s}{2}, \quad v_s = q_s M$$

Чтобы построить асимптотическое решение, введем две зоны, построим в них разложения и найдем входящие в них произвольные функции методом асимптотического сращивания. Первая зона характеризуется малыми временами, масштабы переменных в ней определяются путем введения новых переменных, имеющих порядок единицы в соответствующей зоне

$$(1.4) \quad v = v^\circ, \quad q = q^\circ/M, \quad \tau = \tau^\circ M, \quad x = x^\circ$$

Во второй зоне масштабы переменных определяются выражениями

$$(1.5) \quad v = v^i \sqrt{M}, \quad q = q^i/\sqrt{M}, \quad \tau = \tau^i, \quad x = x_i/M$$

Эта зона соответствует временам порядка единицы и большим расстояниям. Решение в зоне (1.5) может быть найдено сращиванием с решением в зоне (1.4), для определения которого достаточно условий на поршне и ударной волне.

Главный член разложения в зоне (1.4) описывается системой уравнений

$$(1.6) \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial \tau^\circ} = -\frac{\partial q^\circ}{\partial x^\circ}, \quad \frac{\partial q^\circ}{\partial \tau^\circ} + \frac{\partial v^\circ}{\partial x^\circ} + \frac{v^\circ}{x^\circ} = 0$$

В зоне (1.4) времена малы, поэтому в ней в главном приближении для скорости поршня выполняется равенство $R(\tau^\circ M) = 1$. Условие на поршне сносится в главном приближении в зоне (1.4) на линию $x^\circ = 1$, т. е.

$$(1.7) \quad v^\circ(1, \tau^\circ) \equiv 1$$

Упрощение этого условия и дает универсальный характерный профиль ударных волн, поскольку в него входит лишь асимптотика закона движения поршня, записываемая в безразмерных переменных в универсальном виде.

Условие (1.3) на ударной волне в зоне (1.4) сносится в главном приближении на характеристику системы (1.6): $x^\circ = 1 + \tau^\circ$. Это условие оказывается согласованным с условием на характеристике. Решая обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее распределение параметров вдоль характеристики, можно получить условие на ударной волне в виде

$$(1.8) \quad v^\circ = q^\circ = 1/\sqrt{x^\circ}, \quad x^\circ = x = 1 + \tau^\circ$$

Таким образом, в зоне (1.4) получается характеристическая задача Коши с данными на характеристике. В более простом случае сферической симметрии уравнения допускают решение в виде бегущих волн, однако в случае цилиндрической симметрии нельзя получить столь простое решение. Ниже используется метод, пригодный для обоих случаев симметрии.

2. Построение решения в зоне малых времен в виде рядов по характеристической переменной. Ищем решение задачи (1.6)—(1.8) в виде рядов по характеристической переменной $\xi = 1 - x + \tau^\circ$

$$(2.1) \quad v^\circ = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^\circ(x) \xi^n, \quad q^\circ = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^\circ(x) \xi^n$$

Если подставить эти соотношения в систему (1.6), то можно заметить, что коэффициенты рядов (2.1) нужно искать в виде

$$(2.2) \quad v_n^\circ(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^n x^{-j}, \quad q_n^\circ = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^n x^{-j}$$

Подстановка (2.1), (2.2) в систему (1.6) дает

$$(2.3) \quad \beta_j^k = -\alpha_j^k \frac{2j+1}{2j-1}$$

$$(2.4) \quad \alpha_j^k = -\frac{(2j-1)^2}{8jk} \alpha_{j-1}^{k-1}$$

Рекуррентная формула (2.4) позволяет находить коэффициенты с большими k , зная коэффициенты на предыдущем шаге. Начальные коэффициенты находим из условия (1.8) на характеристике $\xi = 0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^\circ x^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^\circ x^{-j} \equiv 1$$

откуда $\beta_0^\circ = \alpha_0^\circ = 1$, $\beta_j^\circ = \alpha_j^\circ = 0$ ($j > 0$). Поэтому из (2.4) следует, что $\alpha_j^k = \beta_j^k = 0$ при $j > k$.

Из условия на поршне (1.7) получаем

$$(2.5) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_j^k \xi^k = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^\circ = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^k = 0 \quad (k > 0)$$

Условие на поршне согласовано с условием на характеристике, поэтому условия (2.3) и (2.5) также согласованы.

Чтобы выразить α_0^k через значения на предыдущем шаге, используем соотношения (2.5). Получим

$$(2.6) \quad \alpha_0^k = \beta_0^k = \sum_{j=1}^k \alpha_j^k \frac{2j+1}{2j-1}$$

Формула (2.5) дает

$$(2.7) \quad \alpha_0^k = \frac{4}{k!} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(-32)^{n+1}} \frac{2n+3}{2n+1} \frac{[(2n+1)!]^2}{(n!)^2} \frac{(k-n-1)!}{(n+1)!} \alpha_0^{k-n-1}$$

Выражая α_j^k через предыдущие коэффициенты по рекуррентной формуле, приходим либо к коэффициентам α_j° , либо к α_0^k . Первые из них $\alpha_j^\circ = \delta_j^\circ$, для вторых справедлива формула (2.7). Из (2.4) также можно получить

$$(2.8) \quad \alpha_j^k = -\frac{1}{8j} \frac{[(2j-1)!!]^2 (k-j)!}{j!k!} \alpha_0^{k-j} \quad (j \leq k)$$

Таким образом, все коэффициенты оказываются найденными.

Докажем, что ряды (2.1) сходятся для всех x в области течения при $\xi < 2$.

Докажем сначала по индукции, что

$$(2.9) \quad |\alpha_0^k| \leq 2^{-k}$$

Предположим, что при всех $i < k$ условие (2.9) выполнено. Докажем его при $i = k$. Перепишем формулу (2.7) в виде

$$(2.10) \quad \alpha_0^k = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2n+3}{2n+1} (-1/2)^{n+1} \frac{(n+1/2)^2(n-1/2)^2 \dots (3/2)^2(1/2)^2}{(n+1)n \dots 2 \cdot 1} \frac{\alpha_0^{k-n-1}}{k(k-1) \dots (k-n)}$$

Оценим $|\alpha_0^k|$. Для этого выделим отдельно в (2.10) слагаемое, соответствующее $n = 0$, а для остальных $(2n+3)/(2n+1) \leq 5/3$.

Тогда

$$\begin{aligned} |\alpha_0^k| &\leq \frac{3}{8k} |\alpha_0^{k-1}| + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} \frac{(n+1/2)(n-1/2) \dots 3/2 \cdot 1/2 \cdot 3/4}{k(k-1) \dots (k-n)} |\alpha_0^{k-n-1}| \leq \\ &\leq \frac{3}{8k} |\alpha_0^{k-1}| + \frac{5}{32} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{|\alpha_0^{k-n-1}|}{2^n C_k^{n+1}} \end{aligned}$$

где C_k^n — число сочетаний из k по n .

В силу предположения индукции отсюда следует оценка

$$(2.11) \quad |\alpha_0^k| \leq \left(\frac{3}{4k} + \frac{5}{16} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{C_k^{n+1}} \right) \cdot 2^{-k}$$

Для суммы имеем оценку

$$(2.12) \quad \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{C_k^{n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{k-2} \frac{1}{C_k^{n+1}} \leq \frac{2k+2}{k}$$

поскольку $C_k^{n+1} \geq k$ при $1 \leq n \leq k-2$.

С учетом оценки (2.12) из (2.11) получаем при $k \geq 4$ неравенство (2.9). При $k = 0, 1, 2, 3$ это неравенство проверяется непосредственно:

$$\alpha_0^0 = 1, \quad \alpha_0^1 = -\frac{3}{8}, \quad \alpha_0^2 = \frac{33}{256}, \quad \alpha_0^3 = -\frac{83}{2048}$$

Таким образом, условие (2.9) доказано.

Из (2.8), (2.9) можно получить оценку для остальных коэффициентов

$$\begin{aligned} |\alpha_j^k| &\leq |\alpha_0^{k-j}| \frac{(2j-1)!!}{4^j k(k-1) \dots (k-j+1)} \leq |\alpha_0^{k-j}| \frac{j!(k-j)!}{2^j k!} = \\ &= |\alpha_0^{k-j}| \cdot 2^{-j} / C_k^j \leq 2^{1-k} / C_k^j \end{aligned}$$

Отсюда для коэффициентов второго ряда (2.1) получаем

$$|q_k^0(x)| = \sum_{j=0}^k |\alpha_j^k| x^{-j} \leq 2^{1-k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{C_k^j} \leq A \cdot 2^{-k}$$

поскольку в области течения $x \geq 1$, а числа $\sum_{j=0}^k \frac{1}{C_k^j}$ равномерно по k ограничены.

Следовательно, ряд для давления (2.1) заведомо сходится при $x \geq 1$, $0 \leq \xi \leq 2$.

Из (2.3) следует, что $|\beta_j^k| \leq 4 |\alpha_j^k|$. Отсюда ясно, что ряд (2.1) для скорости также сходится при $x \geq 1$, $0 \leq \xi \leq 2$.

3. Профиль давления и скорости цилиндрической ударной волны. Используя найденное решение, получим разложение в зоне (1.5), определяемой временами порядка единицы. Однако в силу того, что для зоны (1.4) решение пригодно до $\xi = 2$ (пригодность его далее не доказана), будем строить решение не во всей зоне (1.5), а в ее подобласти N (фиг. 1), определяемой условием $\xi = 1 - x + \tau/M \sim 1$. Именно в эту зону приносят возмущения характеристики положительного направления из зоны (1.4).

Введем в рассматриваемой зоне координаты ξ, x_i вместо τ_i, x_i . Система (1.2) переписется в виде

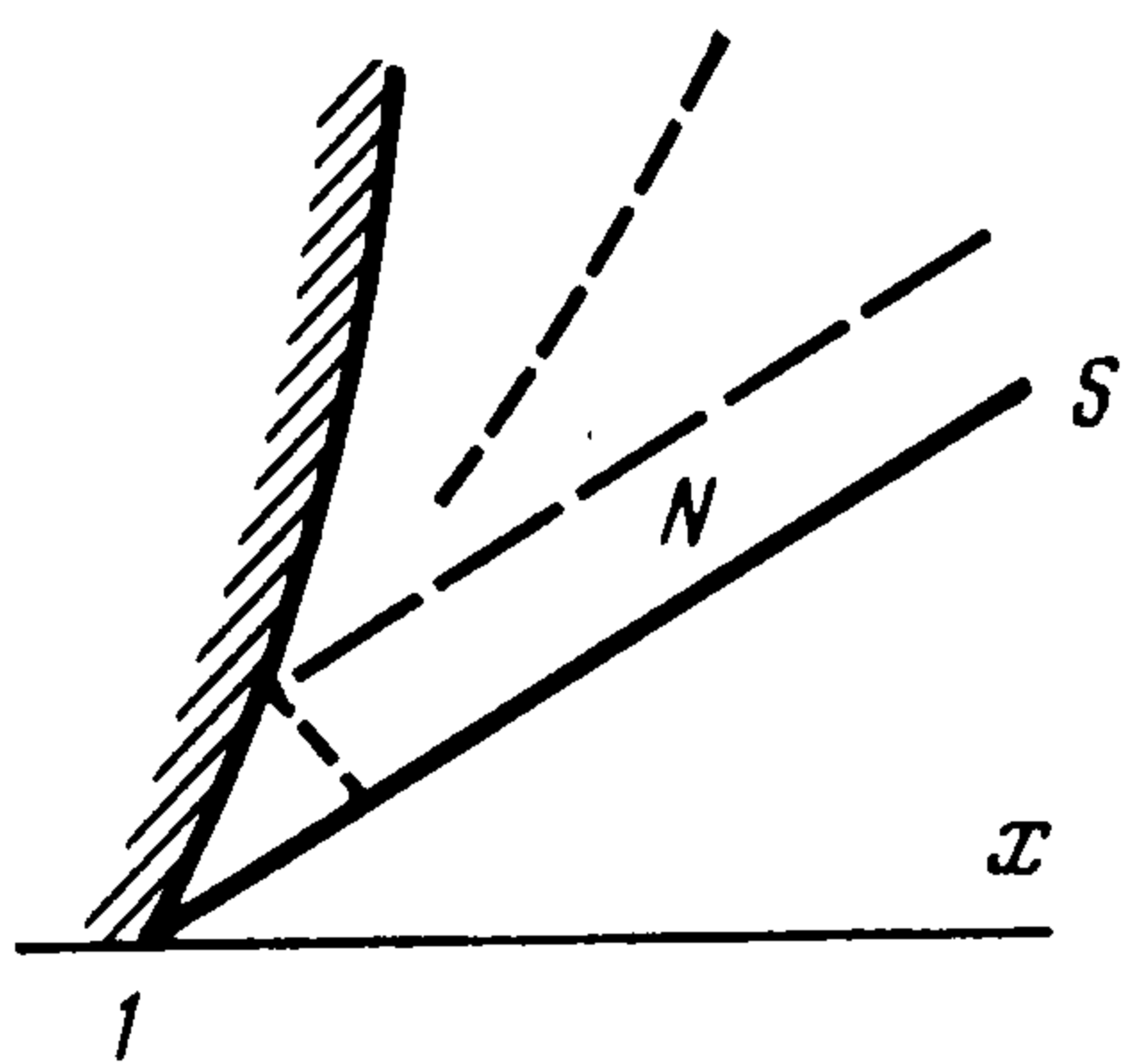
$$(3.1) \quad \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial v^i}{\partial \xi} + M v^i \left(M \frac{\partial v^i}{\partial x_i} - \frac{\partial v^i}{\partial \xi} \right) = - \frac{\sqrt{M}}{1 + q_i M^{3/2}} \frac{\partial q^i}{\partial x_i} - \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial q^i}{\partial \xi}$$

$$(3.2) \quad \sqrt{M} \frac{\partial q^i}{\partial \xi} + M^2 v^i \left(M \frac{\partial q^i}{\partial x_i} - \frac{\partial q^i}{\partial \xi} \right) + \\ + (1 + q^i M^{3/2}) \sqrt{M} \left(M \frac{\partial v^i}{\partial x_i} - \frac{\partial v^i}{\partial \xi} + \frac{v^i}{x_i} M \right) = 0$$

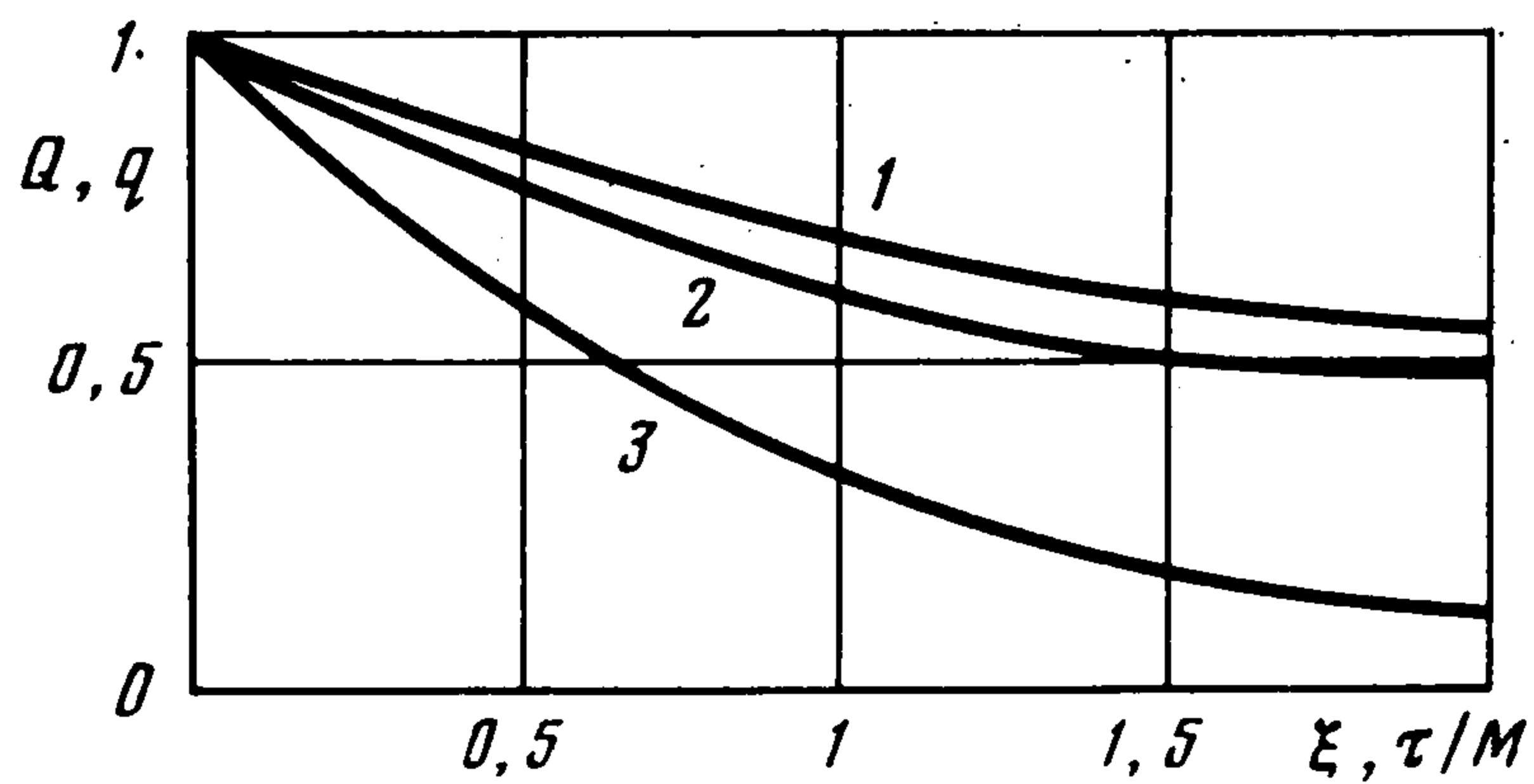
Оба эти уравнения дают в главном приближении одно и то же уравнение $v_{\xi}^i = q_{\xi}^i$, которое с учетом условия на ударной волне (1.3) приводим к равенству

$$(3.3) \quad v^i = q^i$$

Однако из условия согласования следующих членов разложения получается еще одно уравнение, связывающее главные члены разложения.



Фиг. 1



Фиг. 2

Это условие можно получить, если домножить уравнение (3.1) на M и вычесть его из (3.2). В главном приближении получим

$$(3.4) \quad \frac{\partial v^i}{\partial x_i} + \frac{v^i}{x_i} = - \frac{\partial q^i}{\partial x_i}$$

Из (3.3), (3.4) находим

$$(3.5) \quad v^i = q^i = \Omega(\xi) / \sqrt{x_i}$$

Срачивая (3.5) с (2.1), находим $\Omega(\xi)$. Для этого введем промежуточные координаты: $x_1 = x \sqrt{M}$, $\xi_1 = \xi$. Главный член решения (2.1) в промежуточных координатах запишется в виде

$$v = \sqrt[4]{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0^n \xi_1^n}{\sqrt{x_1}}$$

Отсюда видно, что срачивание имеет место при

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^n \xi^n$$

Заметим, что срачивание плотностей дало бы тот же результат, поскольку в силу (2.3) $\beta_0^n = \alpha_0^n$.

Окончательно в зоне около скачка при временах порядка единицы профиль давления и скорости примет вид

$$(3.6) \quad q = \frac{v}{M} = \frac{1}{M \sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n \xi^n$$

Как показано выше, радиус сходимости этого ряда не меньше двух.

4. Сравнение со сферической ударной волной и «пиковое» приближение. При тех же асимптотических условиях, что и в данной работе, для произвольного закона движения поршня профиль сферической ударной волны был получен в виде [3]

$$(4.1) \quad q = v/M = e^{-\xi}/(Mx)$$

Если отвлечься от разницы в падении амплитуды цилиндрической и сферической ударной волны, что является хорошо известным фактом, то из (3.6) видно, что в случае цилиндрической симметрии характерный профиль не подчиняется экспоненциальной зависимости, а следовательно, пиковое приближение дает неверный профиль волны. Если разложить экспоненту в (4.1) в ряд, то получим для сферической волны профиль

$$(4.2) \quad Q = 1 - \xi + \xi^2/2 - \xi^3/6 + \dots$$

в то время как профиль цилиндрической ударной волны имеет вид

$$(4.3) \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \xi^n = 1 - \frac{3}{8} \xi + \frac{33}{256} \xi^2 - \frac{83}{2048} \xi^3 + \frac{1971}{262144} \xi^4 - \dots$$

Заметим, что из (2.7) следует, что ряд (4.3) знакочередующийся, поэтому легко оценить ошибку, получающуюся, если ограничиться несколькими его членами.

При фиксированном моменте времени переменная ξ будет расстоянием от переднего фронта возмущений, соответствующего $\xi = 0$, до точки, отстоящей от центра симметрии на расстоянии x . Поэтому формула (3.6) описывает профиль ударной волны длиной, равной двум начальным радиусам поршня. Согласно полученным формулам (3.6), (4.1), ширина ударной волны не растет со временем, хотя эксперимент и обнаруживает некоторое ее увеличение за счет диссипации. На расстоянии в два начальных радиуса в случае сферической симметрии происходит падение пикового давления почти в десять раз, а в случае цилиндрической симметрии примерно в два раза. На фиг. 2 в переменных Q, ξ верхняя кривая 1 изображает профиль цилиндрической ударной волны, кривая 2 — профиль сферической волны. В сферической волне спад давления происходит гораздо быстрее, а ее ширина оказывается намного меньше, чем в случае цилиндрической симметрии.

Полученный результат можно интерпретировать несколько иначе, поскольку характерные профили (3.6), (4.1) порождаются движением поршня в начальный момент времени. Действительно, $\xi \sim 1$ соответствует в зоне (1.4) временам $\tau \sim M$. В главном приближении можно считать при этом границу поршня неизменной и равной в безразмерных переменных единице. Поэтому в зоне (1.4) на поршне $\xi = \tau/M$. Для давления на поршне в случае цилиндрической и сферической симметрии получаются соответственно выражения

$$(4.4) \quad q = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \beta_j^n \left(\frac{\tau}{M}\right)^n = \\ = \frac{1}{M} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{M} + \frac{3}{16} \left(\frac{\tau}{M}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\tau}{M}\right)^3 + \dots \right]$$

$$(4.5) \quad q = \frac{1}{M} e^{-\tau/M}$$

Сходимость ряда (4.4) заведомо имеет место при $\tau/M < 2$.

На фиг. 2 линии 2 и 3 в переменных q , τ/M представляют зависимости (4.4), (4.5). В случае сферической ударной волны ее профиль (4.1) имеет ту же экспоненциальную зависимость, что и спад давления на поршне с ростом времени (4.5). В этом случае пиковое приближение для давления в каверне подтверждается теоретически. В случае цилиндрической симметрии профиль волны (кривая 1) отличается от зависимости давления на поршне от времени (кривая 2) в среднем на 15—20%. Закон спада давления в каверне в осесимметричном случае значительно отличается от экспоненциальной зависимости (4.5).

Автор признателен А. Л. Гонору за обсуждение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Р. Подводные взрывы. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 495 с.
2. Кедринский В. К. Приближение Кирквуда — Бете для цилиндрической симметрии подводного взрыва. — Физика горения и взрыва, 1972, т. 8, № 1, с. 115—123.
3. Гонор А. Л., Лихачев В. Н. Распространение ударных волн в жидкости. — В кн.: Избранные вопросы современной механики. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 57—65.
4. Лихачев В. Н. Определение профиля сферической ударной волны в жидкости. — Гидроаэромеханика и теория упругости: Сб. статей. Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. гос. ун-та, 1981, вып. 28, с. 3—8.
5. Гонор А. Л. Аналитический метод расчета неустановившихся одномерных движений жидкости. — Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 53—56.
6. Гонор А. Л., Лихачев В. Н. Одномерные нестационарные движения жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 2, с. 3—8.
7. Лихачев В. Н. Опрокидывание сферической волны сжатия в жидкости. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 235—240.

Москва

Поступила в редакцию
21.VII.1983