Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

УДК 532.526

СТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПО ПРОДОЛЬНОЙ ВЯЗКОСТИ В УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ — СТОКСА

Солопенко В. М.

Показано, что обобщенные уравнения Прандтля (ОУП) являются предельным случаем уравнений Навье — Стокса при стремлении «продольной» вязкости к нулю, получена оценка отброшенных членов и доказана теорема существования для ОУП. Ранее эта теорема была установлена в случае однородных условий [1].

Предельный переход к нестационарным уравнениям Эйлера осуществляется ([2], гл. I, п. 6) в предположении обращения в нуль вихря на твердых поверхностях, которое физически необоснованно, позволяя легко оценить интегралы по твердым поверхностям.

Известно, что в неоднородной стационарной задаче протекания для уравнений Навье—Стокса использование срезки Хопфа приводит к оценке нормы градиента скорости, экспоненциально зависящей от вязкости [2, 3]. Отметим, что подобной трудности не возникает в случае нестационарной задачи, а также в задаче Коши [4, 5]. В первом случае может происходить «выравнивание» во времени, а во втором — влияния границы вообще нет.

Ниже исследуется задача протекания с различными краевыми условиями в терминах функция тока — функция Бернулли, свободная от указанного недостатка.

1. Постановка задачи. Течение происходит в квадрате $\Omega = (0,1) \times \times (0,1)$, отрезок $x = 0$ обозначен Γ_1, остальные стороны $\Gamma_{2,\,3,\,4}$ занумерованы против часовой стрелки, $\Gamma_{1,3}$—участки втекания и вытекания соответственно, $\Gamma_{2,\,4}$ — твердые стенки. Вводя функцию Бернулли $H = p + {}^1/_2\,(\psi_y')^2 + {}^1/_2\,(\psi_x')^2 + \Pi$ (обозначения стандартные), рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&(\nu_1\psi_{x^2}'' + \nu_2\psi_{y^2}'')_x' + H_y' = \psi_y'\Delta\psi + f_2, \qquad 0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2\\
&(\nu_1\psi_{x^2}'' + \nu_2\psi_{y^2}'')_y' - H_x' = -\psi_x'\Delta\psi - f_1, \qquad \nu_2 > 0
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

где $f_{1,\,2}$ — компоненты вектора массовой силы. При $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ имеем уравнения Навье — Стокса, а при $\nu_1 = 0$ — ОУП. Систему уравнений (1.1) можно переписать, исключая H, в эквивалентной форме

$$
\nu_1\,(\Delta\psi)_{x^2}'' + \nu_2\,(\Delta\psi)_{y^2}'' = -\,\psi_x'\,(\Delta\psi)_y' + \psi_y'\,(\Delta\psi)_x' + f_{2x}' - f_{1y}' \tag{1.2}
$$

Граничные условия прилипания имеют вид

$$
\psi\mid_2 = \psi_y'\mid_{2,\,4} = 0, \qquad \psi_x'\mid_4 = 0 \tag{1.3}
$$

Два типа условий на $\Gamma_{1,\,3}$ соответствуют двум рассматриваемым задачам, но в обоих случаях задается функция Бернулли H:

$$
\begin{aligned}
&H\mid_i = H_i\,(y);\;\; (\psi_{x^2}'' + \alpha\psi_{y^2}'')\mid_i = \gamma_i\,(y), \quad \alpha < 1,\;\; i = 1,\,3 \quad \text{(задача А)}\\
&H\mid_i = H_i\,(y); \quad -\psi_x'\mid_i = v_i\,(y), \quad (v_i = v_{iy}'\mid = 0,\;\; y = 0,\,1), \quad i = 1,\,3 \quad \text{(задача Б)}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Условие $\alpha < 1$ необходимо для корректности задачи по Шапиро — Лопатинскому. Случай $\alpha = -1$ отвечает заданию касательного напряжения. Заметим, что вместо последнего из условий (1.3) нельзя положить $\psi\mid_4 = g$, так как задача тогда окажется переопределенной, а с точки зрения физики расход связан, в первую очередь, со значениями $H_{1,3}$.

Введем обозначения норм правых частей задачи

(1.5) $$r = \| f_i \|_{W_2^2(\Omega)}, \quad s = \| H_i \|_{C_2(\bar\Gamma_{1,3})}, \quad t = \| \gamma_i \|_{C_2(\bar\Gamma_{1,3})}$$

Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ записывается как (a, b), $\| a \| \equiv (a, a)^{1/2}$, для граничных интегралов используются угловые скобки:

$$\langle a, b \rangle_j^i = \int ab d\Gamma_i - \int ab d\Gamma_j$$

Будем применять анизотропные пространства Соболева $W_p^{(n_1, n_2)}$, пространства Бесова $B_{p\rho}^{(r_1, r_2)}$, в обозначениях [6]. Кроме того, понадобится весовое пространство $V_{p,\beta}^s(\Omega)$ ([7], § 10) с нормой

(1.6) $$\| u \| = \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{s} \int_\Omega r^{p(\beta-s+|\alpha|)} | D^\alpha u |^p d\Omega \Big)^{1/p}$$

где r — гладкая функция, равная в окрестности любой угловой точки Ω расстоянию до нее. Под D^n будем понимать произвольный дифференциальный оператор порядка n.

Введем обозначения следующих полунорм:

(1.7) $$m_2^2 = \| \psi_{x^2}'' \|^2 + \| \psi_{xy}'' \|^2, \quad n_2^2 = \| \psi_{xy}'' \|^2 + \| \psi_{y^2}'' \|^2$$
$$m_3^2 = \| \psi_{x^3}''' \|^2, \quad l_3^2 = \| \psi_{x^2y}''' \|^2 + \| \psi_{xy^2}''' \|^2, \quad n_3^2 = \| \psi_{y^3}''' \|^2$$
$$N_2^2(\alpha, \varepsilon, \nu_{1,2}) = \nu_1 (1 - \varepsilon \mid 1 + \alpha \mid /2) \| \psi_{x^2}'' \|^2 + (\nu_2 - \alpha\nu_1) \| \psi_{xy}'' \|^2 + (\nu_2 - \nu_1 \mid 1 + \alpha \mid /2\varepsilon) \| \psi_{y^2}'' \|^2$$
$$N_3^2(\alpha, \beta, \varepsilon, \nu_{1,2}) = \nu_1 \| \psi_{x^3}''' \|^2 + [\nu_1\beta + \nu_2 - \varepsilon \mid (1 + \alpha)(\nu_1\beta + \nu_2)/2 \mid] \| \psi_{x^2y}''' \|^2 + [\nu_2\beta + \nu_2 + \nu_1\beta - (1 + \alpha)(\nu_1\beta + \nu_2)] \| \psi_{xy^2}''' \| + [\nu_2\beta - \mid (1 + \alpha)(\nu_1\beta + \nu_2)/2\varepsilon \mid] \| \psi_{y^3}''' \|$$

2. Вспомогательные предложения. Установим вначале свойства гладкости.

Лемма 1 (о поведении решений в угловых точках). Пусть в угле K $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ задана финитная функция $f \in W_2^{01}(K)$. Тогда для любого решения уравнения $\nu_1 (\Delta u)_{x^2}'' + \nu_2 (\Delta u)_{y^2}'' = f$, удовлетворяющего граничным условиям

(а) $$(u = u_y')|_{y=0} = 0, \quad (u_{x^2}'' + \alpha u_{y^2}'') = (\nu_1 u_{x^2}'' + \nu_2 u_{y^2}'')_x' |_{x=0} = 0, \quad \alpha < 0$$

(б) $$(u = u_y')|_{y=0} = 0, \quad (u_x' = u_{x^3}''')|_{x=0} = 0.$$

имеют место оценки

(2.1) $$\| u \|_{V^4_{p,\, 2-\gamma-2/p}(K)} \leqslant C(\nu_{1,2}) \| f \|_{L_p}, \quad p \in (1, \infty), \quad 0 < \gamma < \varepsilon(\rho) \qquad \text{(а)}$$

$$\| u \|_{V^{4+l}_{p,\, 1-2/p}(K)} \leqslant C(\nu_{1,2}) \| f \|_{W_p^l}, \quad p \in (1, \infty), \quad l = 0, 1 \qquad \text{(б)}$$

где $\rho = \nu_1/\nu_2 \in (0, 1]$, монотонная функция $\varepsilon(\rho)$ обладает свойствами

$$\varepsilon(1) = \varepsilon_1 > 1/2 + \pi^{-1} \arccos 2\pi^{-1}, \qquad \varepsilon(\rho) \to +0, \qquad \rho \to 0$$

Доказательство. Производя замену переменных $x = e^t \cos\varphi$, $y = e^t \sin\varphi$, обозначая $\mu = (1 - \rho)/(1 + \rho)$, заменяя ∂/dt на λ и вводя операторы

$$D = d/d\varphi, \quad l = D^2 + (\lambda - 2)^2;$$
$$l_\mu = (1 + \mu\cos 2\varphi) D^2 + 2\mu \sin 2\varphi (\lambda - 1) D + \lambda\mu \cos 2\varphi (2 - \lambda) + \lambda^2$$

придем в случае (а) к следующей задаче в угле K:

$$ll_\mu \bar{u}(\varphi) = 0, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}'(0) = 0$$

(2.2) $$\bar{u}''(\pi/2) + \alpha\lambda^2\bar{u}(\pi/2) = \rho\bar{u}'''(\pi/2) + [\lambda^2 - 3\lambda(1-\rho) + 2(1-\rho)]\times$$
$$\times\bar{u}'(\pi/2) = 0$$

Базисом ядра оператора задачи (2.2) является система функций

$$u_{1,2} = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\lambda\varphi\}, \qquad u_{3,4} = (1+\mu\cos 2\varphi)^{\lambda/2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\lambda \operatorname{arctg}(\sqrt{\rho}\operatorname{tg}\varphi)\}$$

Дисперсионное уравнение имеет вид ($\alpha = -1$)

(2.3) $$(1-\mu/\lambda)\left(1 - \frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}\cos\lambda\pi\right) = \frac{2}{1+\rho}\frac{2}{1+\sqrt{\rho}}\rho^{(3-\lambda)/2}$$

а его предельный случай ($\rho \to 1$) совпадает с уравнением

(2.4) $$-\lambda\cos\lambda\pi = 2\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

порождаемым базисом ядра оператора ll_0. В случае (2.4) записав $\lambda = x + iy$, $x = {}^5/_2 + \chi$, найдем, что $\chi > \pi^{-1}\arccos 2\pi^{-1}$. Несколько более сложное исследование решений уравнения (2.3) показывает, что в полосе $\operatorname{Re}\lambda \in (2,\ 2+\varepsilon(\rho))$ нет собственных чисел задачи (2.2). Теперь можно применить развитую теорию [7], и, используя следствие (7.1), получить оценку (2.1) (а), учтя вложение $\overset{\bullet}{V}_{p,\beta} \to L_p$, $\beta \geqslant 0$. В случае (б) приходим к соотношениям (2.2), где вместо двух последних записаны условия $\bar{u}'(\pi/2) = \bar{u}'''(\pi/2) = 0$. Дисперсионное уравнение для любых ρ имеет вид $\operatorname{tg}\lambda\pi/2 = 0$, что обеспечивает требуемую гладкость решения [8] и приводит к оценке (б). Лемма доказана.

Лемма 2 (о коэрцитивности). Дифференциальная форма $\nu_1(\Delta\psi)_{x^2}'' + \nu_2(\Delta\psi)_{y^2}''$, $\psi \in W_2^4$ с условиями а) $(\psi = \psi_y')\,|_{2,4} = (\psi_{x^2}'' + \alpha\psi_{y^2}'')\,|_{1,3} = (\nu_1\psi_{x^2}'' + \nu_2\psi_{y^2}'')_x'\,|_{1,3} = 0$, или б) $(\psi = \psi_y')\,|_{2,4} = (\psi_x' = \psi_{x^3}''')\,|_{1,3} = 0$, коэрцитивна в смысле выполнения неравенств (в обозначениях (1.7)):

$$1^\circ.\ -(\operatorname{grad}(\nu_1\psi_{x^2}'' + \nu_2\psi_{y^2}''),\ \operatorname{grad}\psi) \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} N_2^2(\alpha,\ \varepsilon,\ \nu_{1,2}),\ \forall\varepsilon \in (0,\ \infty),\ \alpha \in R^1 & \text{(а)}\\ \nu_1 m_2^2 + \nu_2 n_2^2 & \text{(б)}\end{cases}$$

$$2^\circ.\ (\operatorname{grad}(\nu_1\psi_{x^2}'' + \nu_2\psi_{y^2}''),\ \operatorname{grad}(\psi_{x^2}'' + \beta\psi_{y^2}'')) \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} N_3^2(\alpha,\ \beta,\ \varepsilon,\ \nu_{1,2}) & \text{(а)}\\ \nu_1 m_3^2 + \nu_2 l_3^2 + \nu_2\beta n_3^2 & \text{(б)}\end{cases}, \quad \forall\varepsilon \in (0,\ \infty),\ \alpha \in R^1,\ \beta \in [0,\ 1]$$

$$3^\circ.\ C(\nu_1/\nu_2)\,[\|\,\nu_1(\Delta\psi)_{x^2}'' + \nu_2(\Delta\psi)_{y^2}''\,\|_{W_p^l} + \nu_2\,\|\,\psi\,\|_{W_p^{3+l}}] \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} \|\,\psi\,\|_{V^4_{p,\,2-\gamma-2/p}}; \ l = 0;\ p \in (1,\ 2/(1-\gamma)) & \text{(а)}\\ \|\,\psi\,\|_{V^4_{p,\,1-2/p}}; \ l = 0,\ 1;\ p \in (1,\ \infty) & \text{(б)}\end{cases}$$

а величина γ определена в лемме 1.

Доказательство. (1°) При интегрировании по частям в случае (а) получим граничный интеграл $I_1 = \nu_1(1+\alpha)\langle\psi_{y^2}'', \psi_x'\rangle_1^3$. Но $(\psi_{x^2}'', \psi_{y^2}'') = \langle\psi_{y^2}'', \psi_x'\rangle_1^3 + \|\,\psi_{xy}''\,\|^2$, и, применяя неравенство Юнга к левой части последнего равенства, получим искомую оценку. (2°) Доказывается аналогично. (3°) Устанавливается с помощью локальных карт и подчиненного разбиения единицы (см., например, [9], п. 5.1). Для окрестностей угловых точек применяем лемму 1, а суммирование завершает вывод оценок. Лемма доказана.

Рассмотрим протекание жидкости через заданную область в приближении Стокса. Ищется пара функций $\{\psi,\ H\}$ — решение задачи

(2.5) $$(\nu_1\psi_{x^2}'' + \nu_2\psi_{y^2}'')_x' + H_y' = f_2, \quad (\nu_1\psi_{x^2}'' + \nu_2\psi_{y^2}'')_y' - H_x' = -f_1$$
$$\psi\,|_2 = \psi_y'\,|_{2,4} = \psi_x'\,|_4 = 0 \qquad \begin{cases}(\psi_{x^2}'' + \alpha\psi_{y^2}'')\,|_{1,3} = \gamma_{1,3}(y) & \text{(а)}\\ -\psi_x'\,|_{1,3} = v_{1,3}(y) & \text{(б)}\end{cases}$$
$$H\,|_{1,3} = H_{1,3}(y)$$

Введем функции $H_0, \psi_a, \psi_б$, «принимающие» на себя граничные значения

$$H_0|_{1,3} = H_{1,3}, \quad (\psi''_{ax^2} + \alpha\psi''_{ay^2})|_{1,3} = \gamma_{1,3}, \quad -\psi'_{бx}|_{1,3} = v_{1,3}$$
$$\psi_{a,б} = \psi'_{a,бy} = 0, \quad y = 0{,}1$$

Лемма 3 (обоснование модели Стокса). Пусть правые части задачи (2.5) (а), (б) обладают свойствами $f_{1,2} \in W_p^{1+l}(\Omega)$, $H_{1,3} \in B_p^{3/2+l}(\Gamma_{1,3})$, $\gamma_{1,3} \in B_p^{3/2+l}(\Gamma_{1,3})$, $v_{1,3} \in B_p^{5/2+l}(\Gamma_{1,3})$, $l = 0{,}1$; $\alpha \in [-1{,}0)$. Тогда при $p \in (1{,}2/(1-\gamma))$ (а), $p \in (1, \infty)$ (б) существует единственное решение каждой задачи: $\{D^3\psi, DH\} \in L_p(\Omega)$, $\{D^4\psi, D^2H\} \in \overset{\circ}{V}_{p,\,2-\gamma-2/p}(\Omega)$ (а), $\{D^4\psi, D^2H\} \in W_p^{\,l}(\Omega)$ (б), причем

(2.6) $$\nu_2 \| D^4\psi \|_{\overset{\circ}{V}_{p,\,2-\gamma-2/p}} + \nu_2 \| \psi \|_{W_p^3} + \| D^2H \|_{\overset{\circ}{V}_{p,\,2-\gamma-2/p}} + \| H \|_{W_p^1} \leqslant$$
$$\leqslant C(\nu_1/\nu_2) \quad (r_1{}^\circ + s_1{}^\circ + t_1{}^\circ)$$

(2.7) $$\nu_2 \| \psi \|_{W_p^{4+l}} + \| H \|_{W_p^{2+l}} \leqslant C(\nu_1/\nu_2) \quad (r_1{}^l + s_1{}^l + v_1{}^l)$$

где

$$r_1{}^l = \| f \|_{W_p^{1+l}}, \quad s_1{}^l = \| H_i \|_{B_p^{3/2+l}}, \quad t_1{}^l = \| \gamma_i \|_{B_p^{3/2+l}}, \quad v_1{}^l = \| v_i \|_{B_p^{5/2+l}}$$

Доказательство. Рассмотрим более сложный случай (а). Представим решение в виде $\psi = \bar\psi + \psi_a$, $H = \bar H + H_0$, причем $\| \psi_a \|_{W_p{}^4} + \| H_0 \|_{W_p{}^2} \leqslant C(s_1{}^0 + t_1{}^0)$. Умножая скалярно уравнения (2.5) на $\bar\psi_x{}'$ и $\bar\psi_y{}'$ и применяя оценку (1°) леммы 2, получим

$$N_2{}^2 \leqslant | -(\bar f_2, \bar\psi_x{}') + (\bar f_1, \bar\psi_y{}') |$$

а поскольку при данных α можно выбрать ε так, чтобы $N_2{}^2 \geqslant C(m_2{}^2 + n_2{}^2)$, то

(2.8) $$\| \psi \|_{W_2{}^2} \leqslant C(r_1{}^\circ + s_1{}^\circ + t_1{}^\circ)$$

Из оценки (2.8) следует единственность решения. Пусть $\bar\psi\,|_4 = g$. Тогда $|g| \leqslant C(r_1{}^\circ + s_1{}^\circ + t_1{}^\circ)$. Представим $\bar\psi = \bar{\bar\psi} + \bar\psi_0$, $\bar\psi_0\,|_4 = g$, а $\bar{\bar\psi}$ удовлетворяет условиям (а) леммы 2, и для нее имеет место оценка 3° (а). Но из вложений $V^4_{p,\,2-\gamma-2/p} \to B_p^{3+(\gamma+2/p-1)} \to W_p{}^3$ первое непрерывно (см. конец доказательства леммы 4), а второе — вполне непрерывно при $p \in (1{,}2/(1-\gamma))$. Используя теорию линейных уравнений [10], оценку для ψ и указанное свойство компактности, получим (2.6). Теперь везде разрешимость следует из тривиальности решения сопряженной однородной задачи. Лемма доказана.

Ниже будем пользоваться теоремами вложения разных метрик и измерений для пространств W, B, определяемых в [6] (пп. 4.3.1—4).

Лемма 4 (об оценке граничных интегралов).

Пусть функции $f \in W_p{}^2(\Omega)$, $g, h \in W_p{}^1(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$. Тогда каждая из них имеет след на отрезке ($x_1 = a$, $x_2 \in [0, 1]$) и справедливы оценки:

(2.9) $$I_1 = \Big(\int_0^1 | g |^p |_{x_1=a}\, dx_2\Big)^{1/p} \leqslant C(\varepsilon)\, [k \| g \|_{L_p}^{1-1/p-\varepsilon} \| g \|_{W_p^{(1,\,0)}}^{1/p+\varepsilon} +$$
$$+ (1-k) \| g \|_{L_q}^{1+1/p-2/q-\varepsilon} \| g \|_{W_q^1}^{2/q+\varepsilon-1/p}], \quad \forall \varepsilon, q, k:$$
$$\varepsilon > 0, \quad 1 < q < \infty, \quad 0 > 1/p - 2/q - \varepsilon \geqslant -1, \quad p \geqslant q,$$
$$0 \leqslant k \leqslant 1$$

$$(2.10)\qquad I_2=\int_0^1 |fgh|\,|_{x_1=a}\,dx_2\leqslant C(\varepsilon)\,\|g\|^{1/2-\varepsilon}\|g\|^{1/2+\varepsilon}_{W_2^{(1,\,0)}}\|h\|^{1/2-\varepsilon}\times$$
$$\times\,[k\,\|f\|^{1/4-\varepsilon}\|f\|^{1/2}_{W_2^1}\|f\|^{1/4+\varepsilon}_{W_2^{(2,\,1)}}\|h\|^{1/2+\varepsilon}_{W_2^{(1,\,0)}}+(1-k)\,\|f\|_{W_2^1}\|h\|^{1/2+\varepsilon}_{W_2^1}]$$

$$(2.11)\qquad I_3=\int_0^1 |gh|\,|_{x_1=a}\,dx_2\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases} C(\varepsilon,\ \gamma)\,\|g\|^{\gamma-\varepsilon}\|g\|^{1+\varepsilon-\gamma}_{W_2^1}(\|Dh\|_{\overset{\circ}{V}_{1/(1-\gamma),\,\gamma}}+\|h\|_{L_{1/(1-\gamma)}}) & \text{(a)}\\ 0<\varepsilon<\gamma\leqslant 1/2, & \\ C(\varepsilon)\,\|g\|^{1/2-\varepsilon}\|g\|^{1/2+\varepsilon}_{W_2^1}\|h\|^{1/2-\varepsilon}\|h\|^{1/2+\varepsilon}_{W_2^1} & \text{(a)}\\ 0<\varepsilon\leqslant 1/2 & \end{cases}$$

Доказательство. Будем пользоваться мультипликативными неравенствами для функций, определенных в R^n

$$(2.12)\qquad \|f\|_{B_q^r}\leqslant C\|f\|^{1-r-\varepsilon}_{L_q}\|f\|^{r+\varepsilon}_{W_q^1},\quad \varepsilon>0,\quad 1-r-\varepsilon\geqslant 0,\quad 1<q<\infty$$

которое следует из неравенства (7″) ([6], п. 7.2) и вложения $B_p^{k+\varepsilon}\to W_p^k$, $\varepsilon>0$ ([6], п. 6.2). С помощью (2.12) нетрудно получить оценку

$$(2.13)\qquad \max_{\substack{x_2\in[0,1]\\ x_1=a}}|g|\leqslant C(\varepsilon)\,\|g\|^{1-1/p-\varepsilon}_{L_p(\Gamma_a)}\|g\|^{1/p+\varepsilon}_{W_p^1(\Gamma_a)}$$

если учесть вложения $B_p^{\varepsilon_1+1/p}(\Gamma_a)\to H_\infty^{\varepsilon_1}(\Gamma_a)\to C_0(\overline{\Gamma}_a)$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ (п. 6.3). Теперь, используя оценку (2.13) и неравенство Гельдера, найдем

$$(2.14)\qquad I_1\leqslant\left\{\int_0^1\max|g(x_1,\ x_2)|^p dx_2\right\}^{1/p}\leqslant C(\varepsilon)\,\|g\|^{1-1/p-\varepsilon}_{L_p(\Omega)}\|g\|^{1/p+\varepsilon}_{W_p^{(1,0)}(\Omega)}$$

Кроме того, $I_1\leqslant C\,\|g\|_{B_p^{\varepsilon_1}(\Gamma_a)}$ и имеют место вложения

$$B_q^r(\Omega)\to B_p^{1/p+\varepsilon_1}(\Omega)\to B_p^{\varepsilon_1}(\Gamma_a),\quad 1\geqslant r=2/q-1/p+\varepsilon_1>0$$

Используя (2.12), получим

$$I_1\leqslant C(\varepsilon)\,\|g\|^{1+1/p-2/q-\varepsilon}_{L_q(\Omega)}\|g\|^{2/q+\varepsilon-1/p}_{W_q^1(\Omega)},\quad 0<\varepsilon_1<\varepsilon$$

что в комбинации с (2.14) дает соотношение (2.9).

Оценка интеграла I_2 следует из двух неравенств:

$$I_2\leqslant C(\varepsilon)\,\|f\|^{1/2-\varepsilon}_{L_2(\Gamma_a)}\|f\|^{1/2+\varepsilon}_{W_2^1(\Gamma_a)}\|g\|_{L_2(\Gamma_a)}\|h\|_{L_2(\Gamma_a)}$$
$$I_2\leqslant C(\varepsilon)\,\|f\|_{L_{2(2+\varepsilon)/\varepsilon}(\Gamma_a)}\|g\|_{L_2(\Gamma_a)}\|h\|_{L_{2+\varepsilon}(\Gamma_a)}$$

Для интеграла I_3 имеем, применяя (2.9) ($k=0$):

$$I_3\leqslant\|g\|_{L_{1/\gamma}(\Gamma_a)}\|h\|_{L_{1/(1-\gamma)}(\Gamma_a)}\leqslant C(\varepsilon,\ \gamma)\,\|g\|^{\gamma-\varepsilon}\|g\|^{1+\varepsilon-\gamma}_{W_2^1}\|h\|_{\overset{\circ}{B}_{1/(1-\gamma)}(\Gamma_a)}$$
$$(0<\varepsilon<\gamma\leqslant 1/2)$$

Используем далее неравенство (9) п. 10.1 [6] и заметим, что по определению весовых пространств

$$\|h\|_{W^1_{1/(1-\gamma),\,(-\gamma)}}\leqslant C\,[\|Dh\|_{\overset{\circ}{V}_{1/(1-\gamma),\,\gamma}}+\|h\|_{L_{1/(1-\gamma)}}]$$

Лемма доказана.

3. Априорные оценки решений задач (1.1), (1.3), (1.4) (а) (б) распадаются на три группы — для выражений $D^2\psi$, $D^3\psi$, $D^4\psi$. Будем пользоваться ниже обозначениями (1.5), (1.7). Начнем с вывода *АО* I. Умножая скалярно уравнения (1.1) на ψ_x' и ψ_y' и складывая, получим

$$\nu_1 m_2^2+\nu_2 n_2^2=\nu_1\langle\psi_{x^2}''-\psi_{y^2}'',\ \psi_x'\rangle_1^3-\langle H,\ \psi_y'\rangle_1^3-$$
$$-(f_2,\ \psi_x')+(f_1,\ \psi_y')$$

Простые оценки с использованием леммы 2 (1°) дают

$$N_2^2(\alpha, \varepsilon, \nu_{1,2}^*) \leqslant C[\nu_1 t m_2 + (s+r) n_2]. \tag{3.1 a}$$

$$\nu_1 m_2^2 + \nu_2 n_2^2 \leqslant C(s+r) n_2'', \qquad (v_{1,3} = 0) \tag{б}$$

Для вывода AO II осуществим аналогичную операцию, умножая на компоненты вектора grad $(\psi_{x^2}'' + \beta\psi_{y^2}'')$. Рассматривая вначале случай (а), учитывая неравенство (2°) (а) леммы 2, получим

$$\begin{aligned} N_3^2 \leqslant (\nu_1\beta + \nu_2)\langle\psi_{xy}'', \gamma'\rangle_1^3 + (f_{1y}' - f_{2x}', \psi_{x^2}'' + \beta\psi_{y^2}'') - \\ - \langle H_y', \psi_{x^2}'' + \beta\psi_{y^2}''\rangle_1^3 + \beta\langle H_x', \psi_{x^2}''\rangle_2^4 + \\ + (\psi_y'(\psi_{x^2}'' + \beta\psi_{y^2}'')_x' - \psi_x'(\psi_{x^2}'' + \beta\psi_{y^2}'')_y', \Delta\psi) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Используя второе уравнение (1.1) и свойства $f_{1,2}$, применяя неравенство (2.11) (а) при $x_1 = y$, $x_2 = x$, $g = \psi_{y^2}''$, $h = \psi_{y^3}'''$, $\varepsilon = \gamma/2$, запишем (это центральное место вывода AO II):

$$\begin{aligned} |\langle H_x', \psi_{y^2}''\rangle_2^4| = |\langle\psi_{y^3}''', \psi_{y^2}''\rangle| \leqslant \\ \leqslant \nu_2 C(\gamma) n_2^{\gamma/2}(l_3 + n_3)^{1-\gamma/2}(\|D^4\psi\|_{\overset{\circ}{V}_{1/(1-\gamma),\gamma}} + n_3) \end{aligned}$$

Трилинейную форму в (3.2), интегрируя по частям и используя условие (1.4) (а), представим так:

$$\begin{aligned} {}^1/_2\langle\psi_y', [\gamma + (\alpha-1)\psi_{y^2}'']^2 + (\beta-1)(\psi_{y^2}'')^2\rangle_1^3 + \\ + (\beta-1)(\psi_x'\psi_{y^2}'' - \psi_y'\psi_{xy}'', \psi_{x^2y}''') \end{aligned}$$

Покажем оценку главных членов. Используя неравенство (2.10) ($k = 1$), имеем

$$|\langle\psi_y', (\psi_{y^2}'')^2\rangle| \leqslant C(\delta)\, n_2^{7/4-\delta} l_3^{5/4+\delta}$$

а учитывая (2.9) ($k = 1$), находим

$$\begin{aligned} |(\psi_{x^2y}''', \psi_x'\psi_y')| \leqslant \|\psi_{x^2y}'''\| \left[\int_\Omega(\psi_x')^2(\psi_{y^2}'')^2 d\Omega\right]^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C(\delta)\, n_2 l_3 (n_2^{1/2} l_3^{1/2} - n_2^{1/2-\delta} l_3^{1/2+\delta}) \end{aligned}$$

Подставляя теперь все оценки в неравенство (3.2) и пренебрегая младшими членами, получим

$$\begin{aligned} N_3^2 \leqslant \nu_2\beta C(\gamma) n_2^{\gamma/2}(l_3 + n_3)^{1-\gamma/2}(\|D^4\psi\|_{\overset{\circ}{V}_{1/(1-\gamma),\gamma}} + n_3) + \\ + C(\delta) n_2^{3/2-\delta} l_3^{5/4+\delta}(n_2^{1/4} + |1-\beta|\, l_3^{1/4}) + C(r, s, t)(n_2 + 1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Аналогично выводится AO II (б):

$$\begin{aligned} \nu_1 m_3^2 + \nu_2 l_3^2 + \beta\nu_2 n_3^2 \leqslant \beta\nu_2 C(\varepsilon) n_2^{1/2-\varepsilon}(n_3 + l_3)\|\psi\|_{W_2^4}^{1/2+\varepsilon} + \\ + C(\varepsilon)(m_2 + n_2)^{2-\varepsilon}[\beta(m_3 + l_3 + n_3)^{1+\varepsilon} + |1-\beta|(m_3 + \\ + l_3)^{1+\varepsilon}] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Априорные оценки третьей группы — AO III — получаются из оценок (2.6), (2.7) ($l = 0$) леммы 3, если вместо величины r_1° подставить норму в L_2 правой части уравнения (1.2)

$$\left.\begin{aligned} &\|D^4\psi\|_{\overset{\circ}{V}_{1/(1-\gamma),\gamma}} \\ &\|\psi\|_{W_2^4} \end{aligned}\right\} \leqslant C(\nu_{1,2})[r + s + t + w + \tag{3.5}$$
$$+ C(\varepsilon)(m_2 + n_2)^{1-\varepsilon}(m_3 + l_3 + n_3)^{1+\varepsilon}]$$

4. Существование решений и предельный переход. Ниже будут доказаны теоремы существования решений задачи протекания в двух постановках. Введем гильбертово пространство

$$M_\alpha = \{\psi \mid \psi \in W_2^3(\Omega),\ \psi|_2 = \psi_x'|_4 = \psi_y'|_{2,4} = 0,\ (\psi_{x^2}'' + \alpha\psi_{y^2}'')|_{1,3} = 0\}$$

с нормой $\|\cdot\|_{M_\alpha} = \|D^3\psi\|$, эквивалентной $\|\cdot\|_{W_2^3}$. Определим также класс функций

$$V_\gamma^{(k)}(\Omega) = \{u \mid D^k u \in L_2(\Omega),\ D^{k+1}u \in \overset{\circ}{V}_{1/(1-\gamma),\gamma}(\Omega)\},\quad \gamma \in (0,\ {}^1\!/_2]$$

Теорема 1 (существование решений общей задачи). Пусть правые части задачи (1.1), (1.3), (1.4) (а) $H_{1,3}$, $\gamma_{1,3} \in C_2(\Gamma_{1,3})$, $f_{1,2} \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, а параметры удовлетворяют условиям $\alpha \in [-1, 0)$, $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2$. Тогда существует ее решение $\psi \in V_\gamma^{(3)}$, $H \in V_\gamma^{(1)}$ и справедливы оценки

$$(4.1)\qquad \sqrt{\nu_1/\nu_2}\,m_2 + n_2 \leqslant C(r, s, t)\,\nu_2^{-1},\quad \|\psi\|_{M_\alpha} \leqslant C(\gamma; r, s, t)\,\nu_1^{-6/\gamma-1}\nu_2^{-1}$$

$$\|D^4\psi\|_{\overset{\circ}{V}_{1/(1-\gamma),\gamma}} \leqslant C(\gamma; r, s, t)\,\nu_1^{-6/\gamma-5/2}\nu_2^{-3/2}$$

где $\gamma \in (0, \varepsilon(\rho))$, а функция $\varepsilon(\rho)$ определена в лемме 1.

Доказательство. Представляя искомую функцию в виде $\psi = \psi_0 + \bar\psi$ (ψ_0 удовлетворяет условиям (1.3), (1.4) (а)), рассмотрим оператор $A: M_\alpha \to M_\alpha$, сопоставляющий функции $\bar\psi_1$ в правых частях системы (1.1) $\bar\psi_2$ — решение задачи Стокса (лемма 3). В соответствии с принципом Лере — Шаудера [3] убедимся, что A — вполне непрерывный оператор и для любого возможного решения уравнений (1.1) с множителем $\lambda \in [0, 1]$ в правой части имеет место априорная оценка $\|\psi\|_{M_\alpha} \leqslant K$.

При любых указанных λ можно выбрать ε так, что при $\beta = 1$ из оценки (3.1) (а) следует

$$(4.2)\qquad \sqrt{\nu_1/\nu_2}\,m_2 + n_2 \leqslant C(r, s, t)\,\nu_2^{-1}$$

а подставляя в неравенство (3.3) ($\beta = 1$) оценку (3.5) (а), найдем

$$(4.3)\qquad \nu_1(m_3^2 + l_3^2 + n_3^2) \leqslant \nu_2/\nu_1 C(\gamma; r, s, t)(m_2 + n_2)^{1+\gamma/2}(m_3 + l_3 + n_3)^{2-\gamma/2}$$

Из (4.2), (4.3) легко следует (4.1). Но в силу оценки (3.5) (а) оператор A переводит ограниченное в M_α множество во множество, ограниченное в $V_\gamma^{(3)}$, и, следовательно, (лемма 3) компактное в M_α. Теорема доказана.

Теорема 2 (существование решений уравнений Навье — Стокса). Задача протекания (1.1), (1.3), (1.4) (а) при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ в условиях теоремы 1 имеет решение с оценками ($\forall\delta > 0$):

$$m_2 + n_2 \leqslant C(r, s, t)\,\nu^{-1},\quad \|\psi\|_{M_\alpha} + \nu^{-1}\|H\|_{W_2^1} \leqslant C(\delta; r, s, t)\,\nu^{-3-\delta}$$

$$\|D^4\psi\|_{\overset{\circ}{V}_{2,\varepsilon_1}} + \nu^{-1}\|D^2H\|_{\overset{\circ}{V}_{2,\varepsilon_1}} \leqslant C(\delta; r, s, t)\,\nu^{-5-\delta}$$

Для достаточно больших ν (по сравнению r, s, t) оно единственно.

Доказательство. Указанные оценки легко получить, если учесть оценку в пространстве $\overset{\circ}{V}_{2,\varepsilon_1}$ (лемма 1). Единственность доказывается известным образом [1].

Переходя к ОУП, введем классы функций

$$U(\Omega) = \{u \mid u \in W_2^2(\Omega);\ u|_2 = u_x'|_4 = u_y'|_{2,4} = 0,\ u_x'|_1 = 0\}$$

$$W(\Omega) = \{\psi \mid \psi \in W_2^2(\Omega),\ \psi_{xy}'' \in W_2^1(\Omega);\ \psi|_2 = \psi_x'|_4 = \psi_y'|_{2,4} = 0\}$$

Обобщенным решением задачи протекания для ОУП назовем пару функций $\psi \in W(\Omega)$, $\pi \in W_2^{(1,2)}(\Omega)$, такую, что

$$(4.4)\qquad \pi(x, y) = \int_0^y H(x, \xi)\,d\xi, \quad \pi|_{1,3} = \int_0^y H_{1,3}(\xi)\,d\xi$$

и $\forall u \in U(\Omega)$ имеют место равенства

$$(4.5)\qquad \begin{gathered}(\nu\psi'''_{xy^2} + \pi_{y^2}'', u_x') = (\psi_y'\Delta\psi + f_2, u_x')\\ (\nu\psi_{y^2}'' - \pi_x', u_{y^2}'') = (\psi_x'\Delta\psi + f_1, u_y')\end{gathered}$$

Теорема 3 (существование решений ОУП). Пусть функции $f_{1,2}$, $H_{1,3}$ отвечают условиям теоремы 1. Тогда существует пара (ψ, π), удовлетворяющая (4.4), (4.5), с оценками

$$(4.6)\qquad n_2 \leqslant C(r, s, t)\,\nu^{-1}, \qquad l_3 \leqslant C(\delta; r, s, t)^{-5-\delta}, \quad \forall\delta > 0$$

Уравнения (4.5) есть предельный случай уравнений (1.1), а для отброшенных членов справедливы оценки ($\nu_2 = \nu$, $\delta > 0$):

$$(4.7)\qquad \|\nu_1\psi_{x^3}'''\| \leqslant \sqrt{\nu_1}C(\delta; r, s, t)\,\nu^{-9/2-\delta}, \qquad \|\nu_1\psi'''_{x^2y}\| \leqslant \\ \leqslant \nu_1 C(\delta; r, s, t)\,\nu^{-5-\delta}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\nu_1^{(n)} \to 0$, $n \to \infty$ и некоторую, отвечающую ей, последовательность решений, представленных теоремой 1 при $\alpha = -1$, $\nu_2 = \nu$, $\nu_1 = \nu_1^{(n)}$. Неравенство (3.3) ($\beta = 0$) совместно с (4.2) дает

$$\sqrt{\nu_1/\nu_2}\,m_3 + l_3 \leqslant C(\delta; r, s, t)\,\nu_2^{-5-\delta}$$

откуда легко следуют соотношения (4.6), (4.7).

Вместо уравнений (1.1) запишем ($u \in U(\Omega)$):

$$(4.8)\qquad \begin{gathered}\nu_1^{(n)}(\psi_{x^3}^{(n)'''}, u_x') + (\nu\psi_{xy^2}^{(n)'''} + \pi_{y^2}^{(n)''}, u_x') = (\psi_y^{(n)'}\Delta\psi^{(n)} + f_2, u_x')\\ \nu_1^{(n)}(\psi_{x^2y}^{(n)'''}, u_y') - (\nu\psi_{y^2}^{(n)''} - \pi_x^{(n)'}, u_{y^2}'') = -(\psi_x^{(n)'}\Delta\psi + f_1, u_y')\end{gathered}$$

и заметим, что в силу (4.6) множество $\{\psi^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$ ограничено и, следовательно, слабо компактно в $W(\Omega)$ (которое естественно рассматривать в качестве гильбертова пространства). Тем самым существует последовательность $\psi^{(m)}$: $\psi^{(m)} \to \psi$ слабо в $W(\Omega)$. Тогда первые члены в уравнениях (4.8) в силу оценок (4.7) в пределе равны нулю и приходим к соотношениям (4.5). В силу установленной гладкости граничные условия выполнены. Теорема доказана.

Ниже представлен условный результат о единственности решений ОУП в классе

$$E_\mu = \{\psi \mid \psi \in W_2^3(\Omega),\ \psi_y'\,|_1 > \mu y(1 - y),\ \mu > 0\}$$

Теорема 4 (о единственности решений ОУП). В классе $\psi \in E_\mu$ для достаточно больших ν существует не более одного решения, доставляемого теоремой 3, удовлетворяющего дополнительному условию $-\psi_x' = v_1(y) \in \in C_2(\overline{\Gamma}_1)$.

Доказательство. Обозначая разность двух решений $\chi = \psi_1 - \psi_2$, из (4.5) легко получить при $u = \chi$:

$$\nu n_2^2 + \frac{1}{2}\left\{\langle\psi_{2y}', (\chi_x')^2\rangle^3 - 2\langle\psi_{2x}', \chi_x'\chi_y'\rangle^3 + \left\langle\frac{(\psi_{2x}')^2}{\psi_{2y}'}, (\chi_y')^2\right\rangle^3\right\} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\left\langle\frac{(\psi_{2x}')^2}{\psi_{2y}'}, (\chi_y')^2\right\rangle^3 + (\psi_{2x}'\chi_y' - \psi_{2x}'\chi_x', \chi_{y^2}'') - \\ - (\chi_x', (\psi_{2x}'\chi_y')_x') + (\psi_{2xy}'', (\chi_x')^2)$$

Выражение в фигурных скобках не меньше нуля, и в итоге имеем

$$\nu n_2^2 \leqslant K(\nu)\, n_2^2, \qquad K(\nu) \to 0, \qquad \nu \to \infty$$

Теорема доказана.

Теорема 5 (классическое решение уравнений Навье — Стокса). Задача (1.1), (1.3), (1.4) (б) в условиях теоремы 1 ($v_{1,3} = 0$) имеет решение $\psi \in C_{3,\alpha}(\bar{\Omega})$, $H \in C_{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, с оценками ($m_2 + n_2 = M_2$, $m_3 + l_3 + n_3 = M_3$, $C = C(r, s, w)$, $\varepsilon > 0$):

$$M_2 \leqslant C\nu^{-1}, \quad M_3 + \nu^{-1} \| H \|_{W_2^1} \leqslant C(\varepsilon)\, \nu^{-3-\varepsilon}, \quad \| \psi \|_{W_2^4} \leqslant C(\varepsilon)\, \nu^{-5-\varepsilon}$$

Для достаточно больших ν решение единственно.

Доказательство. Априорные оценки решений данной задачи следуют из (3.4) с учетом (3.5) (б). Существование решений устанавливается, как в теореме 1, а единственность — как в теореме 2. Принадлежность $\psi \in W_2^4$ вытекает из (3.5) (б), а тогда из оценки (2.7) при $l = 1$ и вложения $W_2^5(\Omega) \to C_{3,\alpha}$ следует классичность решения. Теорема доказана.

Изложенные результаты получены на основе новой оценки граничных интегралов в условиях задачи протекания, исключающей наличие «погранслоя» на боковых сечениях, что приводит и приемлемой оценке нормы градиента скорости.

Автор благодарит участников семинаров Л. В. Овсянникова и Н. Н. Яненко за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солопенко В. М.* Приближенные модели динамики вязкой жидкости. Обоснование и методы расчета. Киев: Вища школа, 1980. 240 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
4. *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область.— Матем. сб., 1964, т. 64, № 4, с. 562—588.
5. *Головкин К. К.* Об исчезающей вязкости в задачах Коши для уравнений гидродинамики.— Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1966, т. 92, с. 31—49.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с.
7. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1978, т. 37, с. 49—93.
8. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
9. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
10. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 104 с.

Киев

Поступила в редакцию
3.XI.1982