

УДК 532.516.

К ВОПРОСУ О РАЗРУШЕНИИ ВИХРЕВОЙ НИТИ

Тригуб В. Н.

Исследуются условия появления особенности при решении уравнений квазицилиндрического приближения для вихревой нити [1] и разложения скорости в ее окрестности. Предлагалось [1] считать появление такой особенности сигналом о разрушении вихря, аналогично тому, как появление особенности Гольдштейна [2] или особенности, исследованной в [3], при решении уравнений пограничного слоя с заданным положительным градиентом давления свидетельствует о невозможности безотрывного обтекания. При ином подходе к исследованию разрушения вихря [4] (современное состояние исследований этого явления освещено в обзорах [5, 6]) вихревые течения классифицируются как «сверхкритические», если распространение волн с фазовой скоростью возможно лишь в направлении вниз по потоку, и «докритические», если волны могут распространяться вверх по потоку. Разрушение вихря рассматривается как переход от сверхкритического к докритическому состоянию на длинах порядка радиуса вихря.

Ниже выясняются обстоятельства, при которых условия появления сингулярности и условия «критичности» совпадают. Дается классификация возможных особенностей, а также показано, что в общем случае при заданном внешнем продольном градиенте давления решение в окрестности особенности, как и в [2, 3], не может быть продолжено за особую точку.

1. Рассмотрим вихревую нить с постоянной циркуляцией Γ_∞ , расположенную вдоль оси трубы переменного сечения в потенциальном потоке несжимаемой жидкости, протекающей сквозь трубу. Именно такая ситуация моделируется в большинстве экспериментальных работ, исследующих разрушение вихря [5]. Отнесем скорости и размеры к характерным величинам во внешнем течении U, L , давление — к ρU^2 , число Рейнольдса $Re = UL/\nu = 1/\varepsilon^2$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Введем цилиндрическую систему координат (x, r) с осью x , направленной вдоль оси вихря вниз по течению (течение предполагается осесимметричным). Пусть $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ — соответственно аксиальная, радиальная и азимутальная составляющие скорости. Совершая в уравнениях Навье — Стокса предельный переход, аналогичный совершаемому при выводе уравнений пограничного слоя ($u, v, g, y = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$), получим систему уравнений квазицилиндрического приближения [1, 6], описывающих медленную перестройку внутренней структуры вихря под влиянием вязкости

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= u(x, y) + O(\varepsilon), & \bar{v} &= \varepsilon^2 v(x, y)/r + O(\varepsilon^2) \\ \bar{w} &= \varepsilon g(x, y)/r + O(\varepsilon), & y &= r^2/(2\varepsilon^2) \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}, & \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{g^2}{4y^2}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ v &= \sqrt{2y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=0; & u &\rightarrow u_\infty(x), & g &\rightarrow \Gamma_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty \\ u &= u_0(x_0, y), & g &= g_0(x_0, y) \quad \text{при } x = x_0 \end{aligned}$$

Здесь $u_\infty(x)$ — функция, известная из внешнего решения.

Для численного исследования системы (1.1) были предложены различные конечно-разностные [6] в интегральные [7] методы. Система (1.1) является, как и система уравнений пограничного слоя, нелинейной, параболической. Имея началь-

ные профили u_0, g_0 в точке x_0 , в общем случае можно регулярно продолжить решение далее в точку $x_0 + \Delta x$ и т. д.

Однако при проведении численных расчетов такой процесс часто заканчивается в некоторой точке x_1 сингулярностью ($v, \partial u/\partial x, \partial g/\partial x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_1$). Появление особенности означает непригодность квазицилиндрического приближения для описания течения в окрестности точки x_1 и свидетельствует о некоторых особых свойствах профилей $u(y, x_1), g(y, x_1)$ в этой точке.

В современных асимптотических теориях отрывных течений [8, 9], учитывающих взаимодействие пограничного слоя с внешним течением, точка отрыва не совпадает с точкой сингулярности уравнений пограничного слоя с заданным градиентом давления, различны и структуры течения в окрестностях этих точек. Наличие особой точки лишь сигнализирует о невозможности безотрывного обтекания. По-видимому, аналогично соотносятся между собой точка сингулярности в квазицилиндрических уравнениях с заданным градиентом давления и точка разрушения вихря.

Так, для разрушения вихря характерно появление на оси точки торможения, однако ни в одном из расчетов квазицилиндрического приближения [1, 7], приводящих к появлению особенности, скорость на оси при подходе к особой точке в нуль не обращалась. На основании этого в данной работе исследовались лишь профили скорости с $u > 0$.

Полагаем, что профили скорости и циркуляции $u(y, x_1) = v(y), g(y, x_1) = \Gamma(y)$ — гладкие функции обычного для вихря вида, т. е. $U > 0$ на всем интервале $y > 0$; $\Gamma(y)$ монотонно возрастает; $U = \alpha + O(y)$, $\Gamma = O(y)$ при $y \rightarrow 0$; $\Gamma \rightarrow \Gamma_\infty, U \rightarrow U_\infty$ экспоненциально при $y \rightarrow \infty$. В качестве параметра малости используем расстояние от точки x_1 : $\xi = \pm(x - x_1)$; здесь и далее верхний и нижний знаки соответствуют разложениям слева и справа. Разложение скорости над точкой x_1 регулярно по x и известно из внешнего решения

$$u = U_\infty \mp \xi u_\infty' (x_1) + 1/2 \xi^2 u_\infty'' (x_1) + O(\xi^3), \quad y \rightarrow \infty$$

Выясним, каким условиям удовлетворяют профили U, Γ в тех случаях, когда регулярное разложение возле точки x_1 невозможно, и построим разложения в окрестности особенности.

2. Введем функцию тока ψ так, что $u = \partial\psi/\partial y, v = \pm\partial\psi/\partial\xi$. Представим разложения функций в окрестности точки x_1 в следующем виде (необходимость именно такого представления обосновывается ниже):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi &= \psi_0(y) + \xi^{1/2}\varphi_1(y) + \xi\varphi_2(y) + \xi^{3/2}\varphi_3(y) + \dots \\ g &= \Gamma(y) + \xi^{1/2}g_1(y) + \xi g_2(y) + \xi^{3/2}g_3(y) + \dots \\ p &= P(y) + \xi^{1/2}p_1(y) + \xi p_2(y) + \xi^{3/2}p_3(y) + \dots \\ \psi_0 &= \int_0^y U dy \end{aligned}$$

Подстановка разложений (2.1) в уравнения квазицилиндрического приближения (1.1) приводит к цепочке краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (p_i, g_i выражаются через φ_i)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} L(\varphi_1) &= \varphi_1'' - R_1\varphi_1 = 0, \quad L(\varphi_2) = 1/2 R_2\varphi_1^2 \mp \Phi_2 \\ L(\varphi_3) &= R_2\varphi_1\varphi_2 + 1/6 R_3\varphi_1^3 \mp \Phi_3, \quad L(\varphi_n) = G_n \\ \varphi_k(0) &= 0, \quad \varphi'_{2k-1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty; \quad k = 1, 2, \dots \\ \varphi_2' &\rightarrow \mp u_\infty'(x_1), \quad \varphi_4' \rightarrow 1/2 u_\infty''(x_1), \dots \\ I_0 &= \frac{\Gamma^2}{2}, \quad I_n = \frac{I'_{n-1}}{U}, \quad R_1 = \frac{U''}{U} - \frac{I'_0}{2y^2U} \\ R_n &= \frac{R'_{n-1}}{U} - \frac{1}{2y^2U^2} I'_{n-1}, \quad \Phi_2 = \frac{2(yU')''}{U} - \frac{\Gamma\Gamma''}{yU^2} \\ \Phi_3 &= \left\{ \frac{2}{3} \left[\frac{2}{U} (y\varphi_1'') - \frac{\Gamma g_1''}{yU^2} \right] - \frac{1}{3} \frac{\Gamma}{y^2U^2} \left[\varphi_1 \left(\frac{y\Gamma''}{U} \right)' - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\varphi_1' \left(\frac{y\Gamma''}{U} \right) \right] + \frac{1}{3U} [\Phi_2'\varphi_1 - 2\Phi_2\varphi_1'] - \frac{\Gamma\Gamma''}{yU^3} \varphi_1 \right\} \end{aligned}$$

Штрих означает дифференцирование по y , в правые части G_n входят только φ_k из предыдущих приближений; члены с R_2, R_3, R_n появляются из-за нелинейности уравнений (1.1), а величины Φ_2, Φ_3 определяются диссипативными членами (1.1).

Для φ_1 получается однородная краевая задача, не имеющая в общем случае нетривиального решения. Равенство $\varphi_1 = 0$ приводит к однородной задаче для φ_3 с тем же оператором L и, следовательно, $\varphi_3 = 0$ и т. д. Таким образом, если нуль не является собственным числом оператора L , то возможно лишь регулярное разложение, причем для четных k функция φ_k определяется однозначно.

Пусть теперь U, Γ таковы, что существует нетривиальное решение однородного уравнения φ_0 , $\varphi_0(0) = 0$, $\varphi_0'(\infty) = 0$ с условием нормировки $\varphi_0'(0) = 1$. В качестве линейно-независимого решения возьмем

$$\theta_0 = \varphi_0 \int_1^y \frac{dy}{\varphi_0^2}$$

и, проведя вариацию постоянных, получим общее решение для φ_n

$$(2.3) \quad \varphi_n = -\varphi_0 \int_0^y G_n \theta_0 dy + \theta_0 \int_0^y G_n \varphi_0 dy + C_n \varphi_0 + D_n \theta_0$$

Требую выполнения граничных условий и учитывая, что при $y \rightarrow 0$

$$\varphi_0 = y - \frac{1}{2}ay^2 + O(y^3), \quad \theta_0 = -1 + 2ay \ln y + \dots$$

получаем

$$(2.4) \quad \varphi_n'(\infty) \varphi_0(\infty) = \int_0^\infty G_n \varphi_0 dy$$

Можно убедиться, что величина $\varphi_n'(0)$ конечна, и таким образом, несмотря на то, что оператор L получается из невязкого приближения и содержит лишь производную второго порядка, условие симметрии на оси $du/dr = 0$ выполнено автоматически, т. е. дополнительного рассмотрения вязкого подслоя, как, например, в [7], не требуется.

Условие (2.4) (оно может быть также получено применением формулы Грина к краевой задаче) в общем случае не может быть выполнено без введения нерегулярности в разложение.

Уравнение для регулярного члена φ_2 всегда неоднородно из-за диссипативного члена Φ_2 , и для выполнения условия (2.4) необходимо ввести в G_2 свободную постоянную через нелинейные члены, т. е. строить разложения по степеням $1/n$, где n — целое число.

Однако, как будет показано, появление степеней $1/3, 1/4$ и т. д. возможно лишь при выполнении дополнительных условий и, следовательно, наиболее общим разложением в окрестности особенности является разложение по полуцелым степеням (2.1). Введение в разложение логарифмических членов, применяемое в аналогичных ситуациях в вязких подслоях, для оператора L к нужному результату не приводит.

Пусть $\varphi_1 = C_1 \varphi_0$, тогда из условия разрешимости (2.4) для второго уравнения получим

$$(2.5) \quad \frac{C_1^2}{2} = \mp (u_\infty'(x_1) \varphi_0(\infty) - \int_0^\infty \Phi_2 \varphi_0 dy) J^{-1}, \quad J = \int_0^\infty R_2 \varphi_0^3 dy$$

Согласно (2.3), $\varphi_2 = \varphi_{20} + C_2\varphi_0$, и для разрешимости третьего уравнения необходимо выполнение условия

$$C_2 = \left(\pm \int_0^\infty \Phi_3 \varphi_0 dy - \frac{C_1^2}{6} \int_0^\infty R_3 \varphi_0^4 dy - \int_0^\infty R_2 \varphi_0^2 \varphi_{20} dy \right) J^{-1}$$

Продолжая указанную процедуру, выразим постоянные C_n через функции U , Γ и коэффициенты разложения скорости во внешнем потоке.

Из равенства (2.5) следует, что при определенном условии на градиент скорости во внешнем потоке, а именно

$$(2.6) \quad u_\infty'(x_1) = \frac{1}{\varphi_0(\infty)} \int_0^\infty \Phi_2 \varphi_0 dy$$

несмотря на существование собственного решения φ_0 , может быть построено регулярное разложение. При этом $\varphi_k = 0$ для нечетных k ; $\varphi_2 = \varphi_{20} + C_2\varphi_0$, C_2 определяется из условия разрешимости уравнения для φ_4 , $\varphi_4 = \varphi_{40} + C_4\varphi_0$ и т. д.

Однако в любом случае существование собственного решения означает неустойчивость решения к малым возмущениям, так как постоянные в данном приближении определяются через условие разрешимости более высокого приближения и, следовательно, изменение граничных условий в высшем приближении, например $u_\infty'(x_1)$, влияет на величину данного приближения (на C_1). Выбор знака C_1 должен следовать из численного интегрирования уравнений квазицилиндрического приближения и, по-видимому, не может быть установлен, из локального анализа.

Если условие (2.6) не выполнено, то разложение (2.1) может быть построено только с одной стороны от особенности (с другой стороны, постоянная C_1 , согласно (2.5), должна быть мнимой). Отметим, что такая же невозможность продолжения решения за особую точку для особенностей в пограничном слое с заданным градиентом давления была обнаружена в работах [2, 3].

3. Разложение (2.1) не может быть построено, если

$$(3.1) \quad J = 0$$

В этом случае следует строить разложение по степеням $1/3, 2/3, \dots$, однако по-прежнему выражения для постоянных будут содержать знаменатель, зависящий от U, Γ . При равенстве нулю этого знаменателя следует перейти к разложению по степеням $1/4, 1/2, 3/4, \dots$ и т. д.

Рассмотрим, как формулируются условия того, что разложения начинаются со степени $1/n$

$$\psi = \psi_0 + \xi^{1/n} \varphi_1 + \xi^{2/n} \varphi_2 + \dots + \xi^{(n-1)/n} \varphi_{n-1} + \xi \varphi_n + \dots$$

Для всех $k < n$ имеем однородные граничные условия на φ_k , и вязкие члены не входят в правые части уравнений

$$(3.2) \quad \begin{aligned} L(\varphi_1) &= 0, & L(\varphi_2) &= \frac{1}{2} R_2 \varphi_1^2, & L(\varphi_3) &= R_2 \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{6} R_3 \varphi_1^3 \\ L(\varphi_4) &= \frac{1}{24} R_4 \varphi_1^4 + \frac{1}{2} R_3 \varphi_1^2 \varphi_2 + \frac{1}{2} R_2 \varphi_2^2 + R_2 \varphi_1 \varphi_3 \end{aligned}$$

Пусть существует собственное решение φ_0 , $\varphi_1 = C_1\varphi_0$. Тогда при выполнении условия разрешимости (3.1) второго уравнения находим $\varphi_2 = C_1^2\varphi_{20} + C_2\varphi_0$. Для разрешимости третьего уравнения необходимо

$$(3.3) \quad \int_0^\infty \left(R_2 \varphi_0 \varphi_{20} + \frac{1}{6} R_3 \varphi_0^4 \right) dy = 0$$

Тогда $\varphi_3 = C_1^3 \varphi_{30} + 2C_1 C_2 \varphi_{20} + C_3 \varphi_0$.

Условие разрешимости четвертого уравнения имеет вид

$$(3.4) \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{24} R_4 \varphi_0^5 + \frac{1}{2} R_3 \varphi_0^3 \varphi_{20} + \frac{1}{2} R_2 \varphi_{20}^2 \varphi_0 + R_2 \varphi_0^2 \varphi_{30} \right) dy = 0$$

Этот процесс может быть продолжен. Например, если существует φ_0 , выполнены условия (3.1), (3.3), (3.4) и не выполнено условие разрешимости пятого уравнения из (3.2), то разложение идет по степеням $1/5, 2/5, 3/5, \dots$. Заметим, что число n зависит только от вида профилей U, Γ и, следовательно, является характеристикой состояния потока в данной точке.

Таким образом, для того, чтобы разложение велось по степеням $1/n$, необходимо кроме существования φ_0 выполнение дополнительно $n - 2$ условий типа (3.1), (3.3), (3.4). При этом в разложении оказываются $n - 2$ произвольные постоянные.

4. Исследуем возможность появления особенностей на двух различных семействах профилей.

Двухпараметрическое семейство профилей

$$(4.1) \quad U = 1 + (\alpha - 1) e^{-y}, \quad \Gamma = \gamma \bar{\Gamma} = \gamma (1 - e^{-y})$$

можно рассматривать как предельный случай решения, описывающего течение в закрученном следе [10]. Это семейство использовалось [11] в качестве модели течения при линейном анализе устойчивости вихревых нитей. Известно, что профили такого типа хорошо аппроксимируют распределения скорости и циркуляции вверх по потоку от точки разрушения вихря [5].

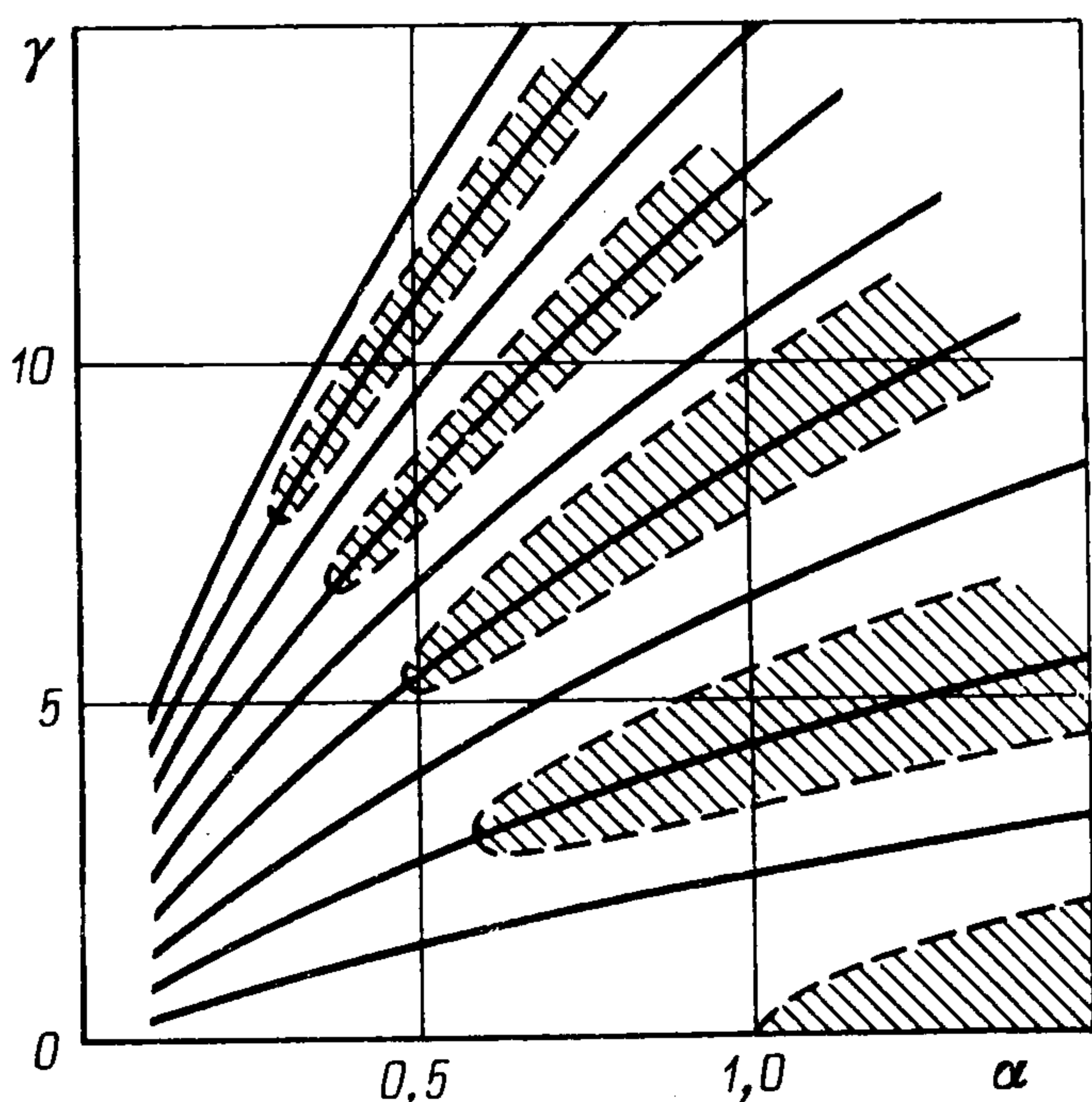
Двухпараметрическое семейство

$$(4.2) \quad U = \alpha + (1 - \alpha) 4y (3 - 4\sqrt{2y} + 3y), \quad \Gamma = \gamma \bar{\Gamma} = 4\gamma y (1 - y)$$

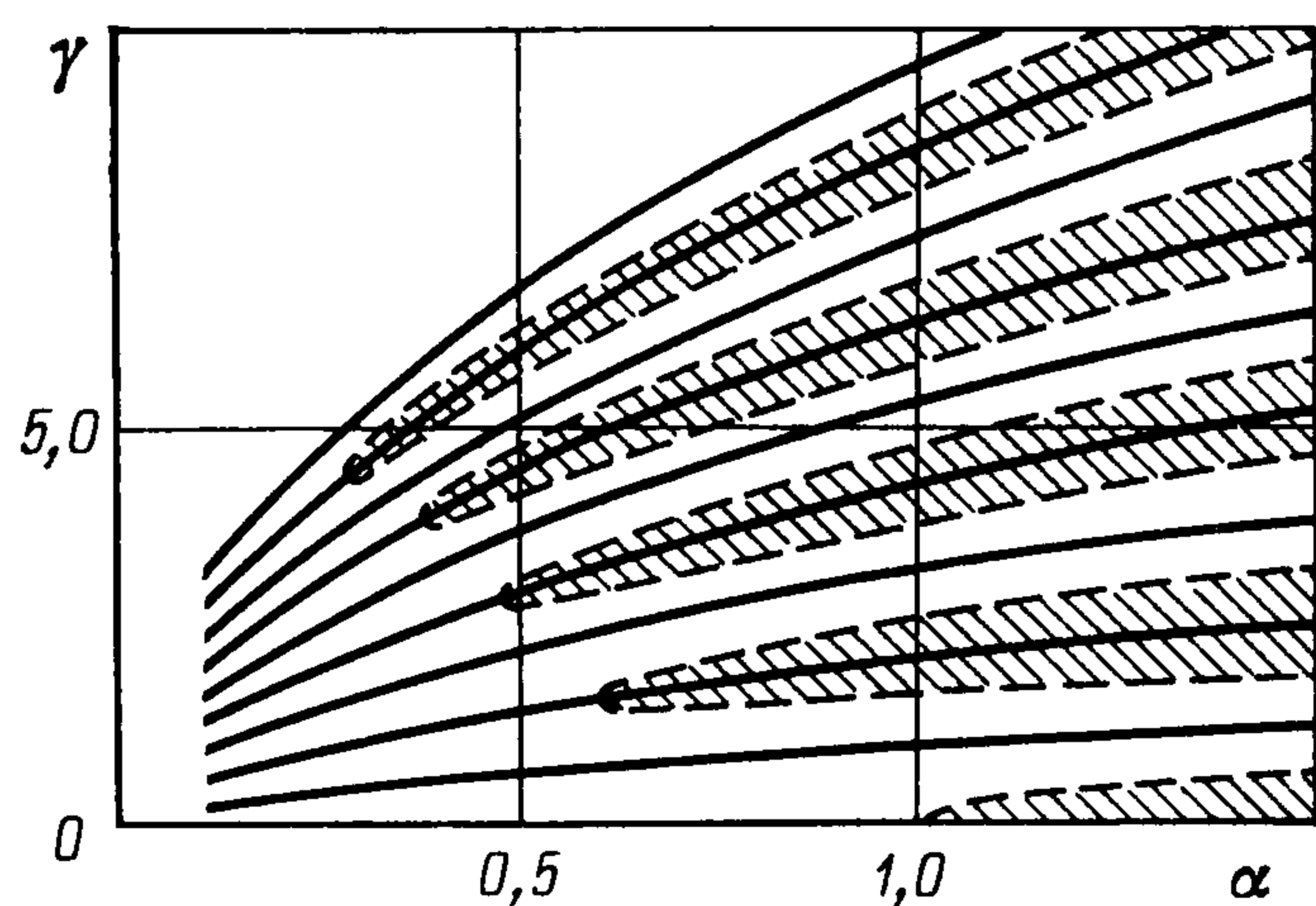
при $y < 1/2$

$U = 1, \Gamma = \gamma$ при $y \geq 1/2$

использовалось [12] при анализе разрушения вихря при помощи интегрального метода, а также в качестве граничного условия в набегающем потоке вверх по течению от точки разрушения вихря [13].



Фиг. 1



Фиг. 2

Для семейств (4.1) (4.2) $\alpha = U(0)$ — скорость на оси, $U(\infty) = 1$, $\gamma = \Gamma_{\infty}$ — характеризует интенсивность закрутки. По распределениям (4.1), (4.2) вычисляем функции R_1, R_2, Φ_2 . Затем при фиксированном α интегрируем вверх от оси $y = 0$ уравнение $\varphi_0'' - R_1 \varphi_0 = 0$ с начальными условиями $\varphi_0(0) = 0, \varphi_0'(0) = 1$, отбирая при этом такие значения параметра γ , при которых $\varphi_0'(\infty) = 0$ (для семейства (4.2) интегрирование ведется на интервале $(0, 1/2)$).

Результаты вычислений представлены на фиг. 1, 2 соответственно для семейств профилей (4.1), (4.2). Сплошными линиями обозначены значения параметров α , γ , при которых существует собственное решение $\varphi_0(y)$, и следовательно, регулярное разложение в окрестности профилей с такими значениями параметров в общем случае невозможно.

При фиксированном α существует бесконечная возрастающая последовательность значений $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$, для которых $\varphi_0'(\infty) = 0$, причем для $\gamma = \gamma_n$ функция $\varphi_0'(y)$ обращается в нуль внутри интервала интегрирования $n - 1$ раз. Применяя метод ВКБ [14] для анализа распределения собственных значений, можно получить асимптотическое соотношение для γ_n , справедливое при $n \rightarrow \infty$

$$(4.3) \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n = \pi \left(\int_0^\infty \left(\frac{\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}'}{2y^2U^2} \right)^{1/2} dy \right)^{-1}$$

Соотношение (4.3) и результаты расчетов, представленные на фиг. 1, 2, показывают, что линии $\gamma_n(\alpha)$ сужаются при предельном переходе $\alpha \rightarrow 0$ с фиксированным значением $\gamma > 0$, $\gamma_n(0) = 0$.

В заштрихованных областях на фиг. 1, 2 величина J в (2.5) меньше нуля, и следовательно, на линиях $\gamma_n(\alpha)$ с четным n существуют точки, в которых разложение начинается со степени $1/n$ ($n \geq 2$).

Классификация течений на сверхкритические и докритические [4] основана на исследовании малых возмущений течения с масштабом длины порядка радиуса вихря т. е. на длинах, гораздо меньших характерного продольного размера в квазицилиндрическом приближении (на этих масштабах действие сил вязкости несущественно). Представляя функцию тока в виде $\psi(x, y) = \psi_0(y) + \delta e^{\lambda x} \varphi(y)$, где $X = x/\varepsilon$, после предельного перехода ($\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$) в уравнениях Навье—Стокса получим следующую задачу на собственные значения:

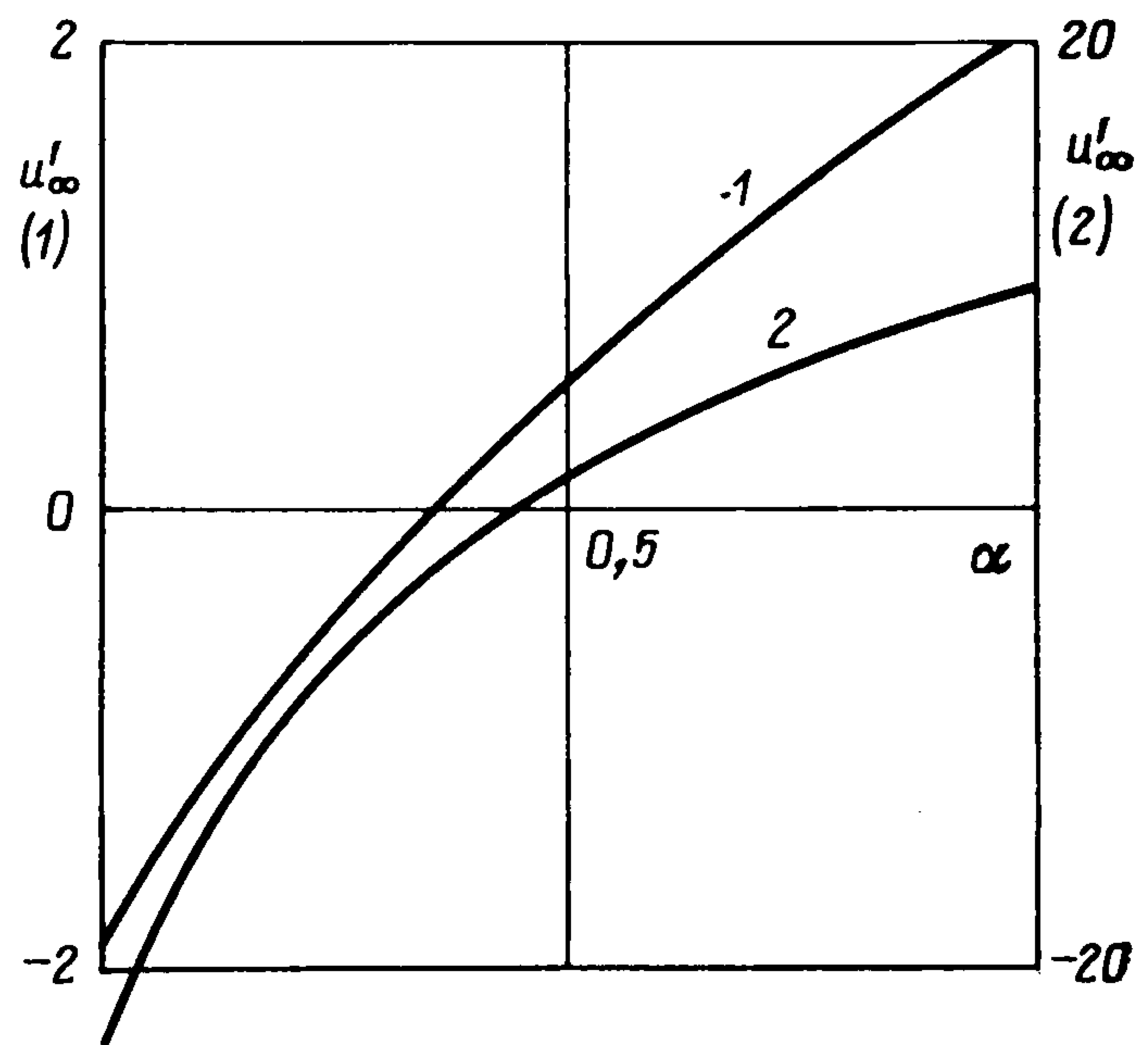
$$\begin{aligned} \varphi_{yy} + (\lambda^2/2y - R_1) \varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= 0, \quad \varphi'(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Данная задача, при принятых ранее предположениях об U , Γ , имеет бесконечный ряд вещественных собственных значений $\lambda_0^2 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 \dots$. Если $\lambda_0^2 < 0$ и, следовательно, могут поддерживаться стоячие волны, состояние с U , Γ называется «докритическим», если же $\lambda_0^2 > 0$ — «сверхкритическим» [4]. С увеличением закрутки убывают и проходят через нуль последовательно λ_1^2 , λ_2^2 и т. д. Сравнивая задачи (2.2) и (4.1), убеждаемся, что каждое очередное прохождение собственного числа λ_k через нуль будет приводить к особенности в квазицилиндрическом приближении. Значит, квазицилиндрическое приближение реагирует особенностью только на состояния U , Γ , способные поддерживать стоячие волны бесконечной (на масштабе X) длины. Особенность с минимальной закруткой и функцией φ_0 , не имеющей нулей внутри интервала, соответствует критическому состоянию. Остальные особенности появляются в докритических течениях и могут быть упорядочены по числу нулей функции φ_0 внутри интервала.

На фиг. 3 приведены распределения $u_\infty'(x_1)$ вдоль линий критического состояния (нижние линии на фиг. 1, 2), при которых особенность в критическом состоянии отсутствует. Семейству (4.1) соответствует линия 1, семейству (4.2) — линия 2.

Видно, что особенность может появляться даже при благоприятном градиенте давления во внешнем потоке $u_\infty'(x_1) > 0$, что не наблюдается в случае пограничного слоя. Однако при значениях $u_\infty'(x_1)$, лежащих выше линии на фиг. 3, т. е. при достаточно сильном разгоне внешнего потока, появление особенности невозможно.

Автор благодарит В. Я. Нейланда за обсуждение результатов работы.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall M. G.* A new approach to vortex breakdown.— In: Proc. 1967 Heat Transfer Fluid. Mech. Inst. San Diego—La Jolla, 1967. Stanford Univ. Press, 1967, p. 319—340.
2. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, v. 1, No. 1, p. 43—69.
3. *Сычев Вук. В.* О некоторых особенностях в решениях уравнений пограничного слоя на подвижной поверхности.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 831—838.
4. *Benjamin T. B.* Theory of the vortex breakdown phenomenon.— J. Fluid Mech., 1962, v. 14, pt 4, p. 593—629.
5. *Leibovich S.* The structure of vortex breakdown.— In: Annual Review of Fluid Mechanics. v. 10. Palo Alto: Ann. Revs, 1978, p. 221—246.
6. *Hall M. G.* Vortex breakdown.— In: Annual Review of Fluid Mechanics. v. 4. Palo Alto: Ann. Revs, 1972, p. 195—218.
7. *Bossel H. H.* Vortex computation by the method of weighted residuals using exponentials.— AIAA Journal, 1971, v. 9, No. 10, p. 2027—2034.
8. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, с. 53—57.
9. *Рубан А. И., Сычев В. В.* Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Успехи механики, 1979, т. 2, № 4, с. 57—95.
10. *Batchelor G. K.* Axial flow in trailing line vortices.— J. Fluid Mech., 1964, v. 20, pt 4, p. 645—658.
11. *Lessen M., Singh P. I., Paillet F.* The stability of a trailing line vortex. Pt. 1, Inviscid theory.— J. Fluid Mech., 1974, v. 63, pt 4, p. 753—763.
12. *Mager A.* Dissipation and breakdown of a wing-tip vortex.— J. Fluid Mech., 1972, v. 55, pt. 4, p. 609—628.
13. *Grabowski W. I., Berger S. A.* Solutions of the Navier—Stokes equations for vortex breakdown.— J. Fluid Mech., 1976, v. 75, pt 3, p. 525—544.
14. *Мусеев Н. Н.* Асимптотические методы келинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.III.1984