Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

УДК 531.38 + 532.5

ОБ ОДНОМ НОВОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Рубановский В. Н.

Рассматриваются уравнения Кирхгофа—Клебша движения свободного тяжелого твердого тела в жидкости при условиях Чаплыгина [1]. Исследуются прецессионные движения тела, для которых вращательная часть слагается из двух вращательных движений, направление вращения первого из которых неизменно в пространстве, а второго неизменно в теле, и угол между этими направлениями постоянный. Указывается способ нахождения прецессионных движений тела в жидкости. Для случая, когда угловые скорости составляющих вращательных движений равны и направления их вращений взаимно перпендикулярны, указывается частное решение, аналогичное решению Гриоли задачи о движении тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой. Дается геометрическая интерпретация движения тела в жидкости, описываемого этим решением.

1. Рассмотрим в однородном поле силы тяжести движения свободного твердого тела, ограниченного односвязной поверхностью, в беспредельной по всем направлениям однородной несжимаемой идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Будем считать, что в теле имеется статически и динамически уравновешенный ротор, вращающийся с постоянной относительной угловой скоростью вокруг оси, неизменно связанной с телом.

Пусть вес вытесненной телом жидкости равен весу тела с ротором. Обозначим через R_i, P_i, λ_i $(i = 1, 2, 3)$ проекции на неизменно связанные с телом оси координат $Ox_1x_2x_3$ вектора $\mathbf{R}$ количеств движения системы гиростат плюс жидкость (импульсивной силы [1—3]), вектора $\mathbf{P}$ — ее кинетического момента относительно точки O (импульсивной пары [1—3]) и вектора $\boldsymbol{\lambda}$ — гиростатического момента ротора. Кинетическая энергия системы имеет вид [1—3]

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(a_{ij}P_iP_j+b_{ij}R_iR_j+2c_{ij}P_iR_j),\quad a_{ij}=a_{ji},\quad b_{ij}=b_{ji} \tag{1.1}$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — определенные для данной системы постоянные. Проекции u_i, Ω_i $(i = 1, 2, 3)$ на оси x_i векторов поступательной $\mathbf{u}$ и мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ тела определяются выражениями

$$u_i=\partial T/\partial R_i,\quad \Omega_i=\partial T/\partial P_i\quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.2}$$

Предположив импульсивную силу $\mathbf{R}$ $(\mathbf{R}^2 = H^2 = \mathrm{const})$ направленной по восходящей вертикали, будем иметь следующие уравнения движения рассматриваемой системы [1—3]:

$$dR_1/dt+\Omega_2R_3-\Omega_3R_2=0 \quad (123) \tag{1.3}$$
$$dP_1/dt+\Omega_2(P_3+\lambda_3)-\Omega_3(P_2+\lambda_2)+u_2R_3-u_3R_2=$$
$$=e_2R_3-e_3R_2 \quad (123)$$

Здесь e_1, e_2, e_3 — постоянные, пропорциональные проекции на оси x_i радиуса-вектора, проведенного из центра тяжести объема, ограниченного внешней поверхностью тела, в центр масс гиростата.

Уравнениями (1.3) описывается также движение по инерции в беспредельной жидкости твердого тела, ограниченного многосвязной поверхностью [4].

2. Движение твердого тела назовем прецессионным, если его вращательная часть слагается из двух вращательных движений, направление первого из которых неизменно в пространстве, а второго неизменно в теле, и угол между этими направлениями является постоянным.

Укажем способ нахождения прецессионных движений твердого тела в жидкости в случае, когда составляющие вращательные движения являются постоянными.

Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$ единичный вектор неизменного в пространстве направления вращательного движения. Не ограничивая общности, будем считать, что вращательное движение, направление которого неизменно в теле, происходит вокруг оси x_3 с единичным вектором $\mathbf{i}_3$. Обозначим через $\boldsymbol{\nu}$ единичный вектор неизменной в пространстве импульсивной силы $\mathbf{R} = H\boldsymbol{\nu}$. Векторы $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\nu}$ удовлетворяют уравнениям

$$d\boldsymbol{\gamma}/dt = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad d\boldsymbol{\nu}/dt = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\nu}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \cos\varkappa = \text{const}, \quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{i}_3 = \cos\theta = \text{const} \tag{2.2}$$

Умножая скалярно первое из уравнений (2.1) на $\mathbf{i}_3$ и принимая во внимание последнее из условий (2.2), получаем соотношение $\mathbf{i}_3\cdot(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}) = 0$. Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{\Omega}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{i}_3 + \psi^{\boldsymbol{\cdot}}\boldsymbol{\gamma}, \qquad \varphi^{\boldsymbol{\cdot}} = \text{const}, \quad \psi^{\boldsymbol{\cdot}} = \text{const} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), для определения $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\nu}$ получаем уравнения

$$\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\cdot}} = \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{i}_3), \quad \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{\cdot}} = \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3) + \psi^{\boldsymbol{\cdot}}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\gamma}) \tag{2.4}$$

Интегрируя первое из уравнений (2.4) с учетом (2.2), получаем для проекций γ_i вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на оси x_i выражения

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \quad \varphi = \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}t + \varphi_0. \tag{2.5}$$

Для определения вектора $\boldsymbol{\nu}$, удовлетворяющего второму из уравнений (2.4) и соотношениям (2.2), используем равенство

$$\boldsymbol{\nu} = \left(\cos\varkappa + \frac{\cos\theta\sin\varkappa\sin\psi}{\sin\theta}\right)\boldsymbol{\gamma} - \frac{\sin\varkappa\sin\psi}{\sin\theta}\mathbf{i}_3 - \frac{\sin\varkappa\cos\psi}{\sin\theta}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{i}_3) \tag{2.6}$$

где $\psi = \psi^{\boldsymbol{\cdot}}t + \psi_0$, а ψ_0 — произвольная постоянная.

Из (2.3), (2.5), (2.6) и равенства $\mathbf{R} = H\boldsymbol{\nu}$ находим

$$\Omega_1 = \psi^{\boldsymbol{\cdot}}\sin\theta\sin\varphi, \quad \Omega_2 = \psi^{\boldsymbol{\cdot}}\sin\theta\cos\varphi, \quad \Omega_3 = \psi^{\boldsymbol{\cdot}}\cos\theta + \varphi^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= H[\cos\varkappa\sin\theta\sin\varphi + \sin\varkappa(\cos\theta\sin\psi\sin\varphi - \\ &\quad -\cos\psi\cos\varphi)] \\ R_2 &= H[\cos\varkappa\sin\theta\cos\varphi + \sin\varkappa(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi + \\ &\quad +\cos\psi\sin\varphi)] \\ R_3 &= H(\cos\varkappa\cos\theta - \sin\varkappa\sin\theta\sin\psi) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Определив $\boldsymbol{\Omega}$ и $\mathbf{R}$, векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{U}$ найдем из соотношений (1.2) и представим их в тензорном виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{C}\cdot\mathbf{R}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{C}^{\tau}\cdot\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{R} \\ &\mathbf{A} = \| A_{ij}\|_1^3 = a^{-1}, \quad \mathbf{C} = \| C_{ij}\|_1^3 = a^{-1}\cdot c, \quad \mathbf{B} = \| B_{ij}\|_1^3 = \\ &= b - c^{\tau}\cdot a^{-1}\cdot c \\ &a = \| a_{ij}\|_1^3, \quad b = \| b_{ij}\|_1^3, \qquad c = \| c_{ij}\|_1^3 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Из (2.9), равенства $\mathbf{R} = H\mathbf{v}$ и (2.3), (2.6) находим

$$\mathbf{P} = \left[\psi^\cdot \mathbf{A} - H\left(\cos\varkappa + \frac{\sin\varkappa\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta}\right)\mathbf{C}\right]\cdot\boldsymbol{\gamma} +$$
$$+\left[\varphi^\cdot\mathbf{A} + H\frac{\sin\varkappa\sin\psi}{\sin\theta}\mathbf{C}\right]\cdot\mathbf{i}_3 + H\frac{\sin\varkappa\cos\psi}{\sin\theta}\mathbf{C}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{i}_3)$$
$$u = \left[\psi^\cdot\mathbf{C}^\tau + H\left(\cos\varkappa + \frac{\sin\varkappa\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta}\right)\mathbf{B}\right]\cdot\boldsymbol{\gamma} +$$
$$+\left[\varphi^\cdot\mathbf{C}^\tau - H\frac{\sin\varkappa\sin\psi}{\sin\theta}\mathbf{B}\right]\cdot\mathbf{i}_3 - H\frac{\sin\varkappa\cos\psi}{\sin\theta}\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{i}_3)$$

Отсюда для P_i, u_i получаем выражения

(2.10) $$P_1 = (A_{11}\sin\varphi + A_{12}\cos\varphi)\,\psi^\cdot\sin\theta + A_{13}(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta) -$$
$$-C_{11}H[\cos\varkappa\sin\theta\sin\varphi + (\cos\theta\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi)\sin\varkappa] -$$
$$-C_{12}H[\sin\varkappa(\cos\theta\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) +$$
$$+\cos\varkappa\sin\theta\cos\varphi] + C_{13}H(\sin\varkappa\sin\theta\sin\psi - \cos\varkappa\cos\theta) \qquad (123)$$

(2.11) $$u_1 = (C_{11}\sin\varphi + C_{21}\cos\varphi)\,\psi^\cdot\sin\theta + C_{31}(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta) +$$
$$+B_{11}H[\cos\varkappa\sin\theta\sin\varphi + (\cos\theta\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi)\cdot$$
$$\cdot\sin\varkappa] + B_{12}H[\sin\varkappa(\cos\theta\cos\varphi\sin\psi +$$
$$+\sin\varphi\cos\psi) + \cos\varkappa\sin\theta\cos\varphi] + B_{13}H(\cos\varkappa\cos\theta -$$
$$-\sin\varkappa\sin\theta\sin\psi) \qquad (123)'$$

Здесь символ (123) означает, что два других соотношения получаются из приведенного в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3 у величин P_i, u_i и первого индекса у постоянных A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, штрих над этим символом указывает, что в (2.11) у C_{ij} следует изменить не первый, а второй индекс согласно перестановке (123).

Подставляя выражения (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) для Ω_i, R_i, P_i, u_i во вторую группу уравнений (1.3) и потребовав, чтобы они удовлетворялись тождественно по φ и ψ, получим искомые условия существования прецессионных движений твердого тела в жидкости.

3. Пусть

(3.1) $$\theta = \pi/2, \quad \varphi^\cdot = \psi^\cdot = \text{const}, \quad \varphi = \psi = \varphi^\cdot t + \varphi_0$$

В этом случае условия существования прецессионных движений имеют вид

(3.2) $$B_{ij}H\sin\varkappa = 0, \quad (B_{22} - B_{11})H\sin\varkappa = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; \ i \neq j)$$
$$[(C_{12} + C_{21})\varphi^\cdot + {}^1/_2(4B_{12}\cos\varkappa - B_{23}\sin\varkappa)H]H\sin\varkappa = 0$$
$$[(C_{23} + C_{32})\varphi^\cdot + (B_{12}\sin\varkappa + 2B_{23}\cos\varkappa)H]H\sin\varkappa = 0$$
$$\{(C_{22} - C_{11})\varphi^\cdot + [(B_{22} - B_{11})\cos\varkappa +$$
$$+{}^1/_2B_{13}\sin\varkappa]H\}H\sin\varkappa = 0$$
$$8A_{12}\varphi^{\cdot 2} + [(C_{23} + C_{32})\sin\varkappa - 4(C_{12} + C_{21})\cos\varkappa]\varphi^\cdot H +$$
$$+(B_{12}\sin\varkappa - 2B_{23}\cos\varkappa)H\sin\varkappa = 0$$
$$A_{23}\varphi^{\cdot 2} - [(C_{12} + C_{21})\sin\varkappa + ((C_{23} + C_{32})\cos\varkappa]\varphi^\cdot H +$$
$$+(B_{12}\sin\varkappa\cos\varkappa - B_{23})H = 0$$
$$[(C_{23} + C_{32})\varphi^\cdot + {}^1/_2(2B_{23}\cos\varkappa - B_{12}\sin\varkappa)H]H\sin\varkappa =$$
$$= e_2H\sin\varkappa, \quad [(C_{12} + C_{21})\varphi^\cdot + {}^1/_2(4B_{12}\cos\varkappa -$$
$$-B_{23}\sin\varkappa)H]H\sin\varkappa = -2e_2H\cos\varkappa - 2\lambda_2\varphi^\cdot$$

(3.3) $$[(C_{23} + C_{32})\varphi^\cdot - (B_{12}\sin\varkappa - 2B_{23}\cos\varkappa)H]H\sin\varkappa = 0$$
$$A_{23}\varphi^{\cdot 2} + [(C_{12} + C_{21})\sin\varkappa - (C_{23} + C_{32})\cos\varkappa]\varphi^\cdot H -$$
$$-{}^1/_2[B_{12}\sin 2\varkappa + B_{23}(2 - 3\sin^2\varkappa)]H = 0$$

$$A_{23}\varphi^{\cdot 2} + [(C_{12} + C_{21}) \sin \varkappa + (C_{23} + C_{32}) \cos \varkappa] \varphi^{\cdot} H + $$
$$+ {}^1/_4 [2B_{12} \sin 2\varkappa + B_{23} (4 - 7 \sin^2 \varkappa)] H = -2\lambda_2 \varphi^{\cdot}.$$
$$2A_{12}\varphi^{\cdot 2} - [(C_{12} + C_{21}) \cos \varkappa - {}^5/_4 (C_{23} + C_{32}) \sin \varkappa] \varphi^{\cdot} H -$$
$$-{}^1/_4 [B_{12} \sin \varkappa - 2B_{23} \cos \varkappa] H^2 \sin \varkappa = e_2 H \sin \varkappa$$
$$2A_{12}\varphi^{\cdot 2} - [2 (C_{12} + C_{21}) \cos \varkappa - (C_{23} + C_{32}) \sin \varkappa] \varphi^{\cdot} H -$$
$$-[B_{12} (2 - 3 \sin^2 \varkappa) - B_{23} \sin \varkappa \cos \varkappa] H^2 = -e_2 H \sin \varkappa$$

(3.4)
$$\{(C_{13} + C_{31}) \varphi^{\cdot} + [(B_{11} - B_{33}) \sin \varkappa + 2B_{13} \cos \varkappa] H\} H \sin \varkappa = 0$$
$$[(C_{13} + C_{31}) \varphi^{\cdot} + (B_{22} - B_{33}) H \sin \varkappa] H \sin \varkappa = 0$$
$$\{(2C_{33} + C_{22} - C_{11}) \varphi^{\cdot} + [(B_{22} - B_{11}) \cos \varkappa -$$
$$- {}^1/_2 B_{13} \sin \varkappa] H\} H \sin \varkappa = 2e_1 H \cos \varkappa + 2\lambda_1 \varphi^{\cdot}$$
$$(A_{22} - A_{11}) \varphi^{\cdot 2} - [(C_{13} + C_{31}) \sin \varkappa + 2 (C_{22} - C_{11}) \cos \varkappa] \varphi^{\cdot} H +$$
$$+ {}^1/_2 [(B_{11} - B_{22})(2 - 3 \sin^2 \varkappa) - B_{13} \sin 2\varkappa] H^2 = e_1 H \sin \varkappa$$
$$(A_{11} - A_{22} - A_{33}) \varphi^{\cdot 2} + [(C_{33} + C_{22} - C_{11}) \cos \varkappa + {}^3/_4 (C_{13} +$$
$$+ C_{31}) \sin \varkappa] \varphi^{\cdot} H + {}^1/_4 [(B_{33} - B_{11}) \sin \varkappa - 2B_{13} \cos \varkappa] H^2 \sin \varkappa =$$
$$= H (e_1 \sin \varkappa + e_3 \cos \varkappa) + \lambda_3 \varphi^{\cdot}$$
$$(A_{11} - A_{22} + A_{33}) \varphi^{\cdot 2} - [(C_{33} + C_{11} - C_{22}) \cos \varkappa - {}^3/_4 (C_{13} +$$
$$+ C_{31}) \sin \varkappa] \varphi^{\cdot} H + {}^1/_4 (B_{33} - B_{22}) H^2 \sin^2 \varkappa = -e_3 H \cos \varkappa -$$
$$- \lambda_3 \varphi^{\cdot}$$
$$A_{13}\varphi^{\cdot 2} - [2C_{22} \sin \varkappa + (C_{13} + C_{31}) \cos \varkappa] \varphi^{\cdot} H + {}^1/_2 [(B_{33} -$$
$$- B_{11}) \sin 2\varkappa + 2B_{13} (2 - 3 \cos^2 \varkappa)] H^2 = -e_3 H \sin \varkappa$$
$$A_{13}\varphi^{\cdot 2} + [2 (C_{11} - C_{33}) \sin \varkappa + (C_{13} + C_{31}) \cos \varkappa] \varphi^{\cdot} H +$$
$$+ [(B_{11} - B_{33}) \sin \varkappa \cos \varkappa + {}^1/_4 B_{13} (4 - 5 \sin^2 \varkappa)] H^2 =$$
$$= -e_3 H \sin \varkappa - 2\lambda_1 \varphi^{\cdot}$$
$$A_{13}\varphi^{\cdot 2} + [2C_{11} \sin \varkappa - (C_{13} + C_{31}) \cos \varkappa] \varphi^{\cdot} H +$$
$$+ {}^1/_2 [(B_{33} - B_{22}) \sin 2\varkappa + B_{13} (1 - 3 \cos^2 \varkappa)] H^2 =$$
$$= -e_3 H \sin \varkappa$$

Из уравнений (3.2) последовательно находим

(3.5)
$$B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22}$$
$$C_{12} + C_{21} = 0, \quad C_{23} + C_{32} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad A_{12} = A_{23} = 0$$
$$e_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0$$

При выполнении условий (3.5) уравнения (3.3) удовлетворяются тождественно.

Рассмотрим теперь уравнения (3.4) с учетом равенств (3.5). Почленно складывая пятое и шестое уравнения и принимая во внимание первое и и четвертое, получаем

(3.6) $$e_1 = 0$$

Последние два уравнения совместны лишь при условии

(3.7) $$C_{11} = 0$$

При выполнении условий (3.6), (3.7) седьмое уравнение — следствие первого, третьего и восьмого, а первые два уравнения совпадают. Теперь при выполнении условий (3.5)—(3.7) уравнения (3.4) приводятся к следующим:

(3.8) $$\lambda_1 = C_{33} H \sin \varkappa$$

(3.9) $$(C_{13} + C_{31}) \varphi^{\cdot} = (B_{33} - B_{11}) H \sin \varkappa, \quad (A_{22} - A_{11}) \varphi^{\cdot} = = (C_{13} + C_{31}) H \sin \varkappa$$

(3.10) $$(C_{33}\varphi^{\cdot} - e_3) H \sin \varkappa = (A_{13}\varphi^{\cdot} + \lambda_1) \varphi^{\cdot}, \quad (C_{33}\varphi^{\cdot} - e_3) H \cos \varkappa = = (A_{33}\varphi^{\cdot} + \lambda_3) \varphi^{\cdot}$$

Из (3.8), (3.10) находим

$$(3.11)\qquad [(A_{13}\varphi^{\cdot} + \lambda_1)^2 + (A_{33}\varphi^{\cdot} + \lambda_3)^2]\, A_{13}^2\varphi^{\cdot 4} = p^2\,(A_{13}\varphi^{\cdot} + \lambda_1)^2$$

$$(3.12)\qquad \operatorname{tg}\varkappa = \frac{A_{13}\varphi^{\cdot} + \lambda_1}{A_{33}\varphi^{\cdot} + \lambda_3}, \quad H = \frac{\lambda_1}{C_{33}\sin\varkappa}$$

где $p = e_3H$ — произведение веса жидкости, вытесненной телом, на расстояние от центра масс гиростата до центра тяжести объема, ограниченного внешней поверхностью тела.

Из (3.9) находим

$$(3.13)\qquad (C_{13} + C_{31})^2 = (A_{22} - A_{11})(B_{33} - B_{11})$$

$$(3.14)\qquad \varphi^{\cdot} = \frac{\lambda_1\,(C_{13} + C_{31})}{C_{33}\,(A_{22} - A_{11})}$$

Подстановка (3.14) в (3.11) приводит к соотношению

$$(3.15)\qquad \begin{aligned}&[C_{33}\,(A_{22} - A_{11}) + A_{13}\,(C_{13} + C_{31})]^2\, C_{33}^4\,(A_{22} - A_{11})^4\, p^2 =\\ &= \{[C_{33}\,(A_{22} - A_{11}) + A_{13}\,(C_{13} + C_{31})]^2\,\lambda_1^2 +\\ &+ [A_{33}\,(C_{13} + C_{31})\,\lambda_1 + C_{33}\,(A_{22} - A_{11})\,\lambda_3]^2\}\, A_{13}^2\,(C_{13} +\\ &+ C_{31})^4\lambda_1^2\end{aligned}$$

При выполнении условий (3.1), (3.5) — (3.7) формулы (2.8), (2.10), (2.7), (2.11), (2.5) принимают вид

$$(3.16)\qquad \begin{aligned}&R_1 = H\,(\cos\varkappa\sin\varphi - \sin\varkappa\cos^2\varphi), \quad R_3 = -H\sin\varkappa\sin\varphi\\ &R_2 = H\,(\cos\varkappa + \sin\varkappa\sin\varphi)\cos\varphi, \quad \varphi = \varphi^{\cdot}t + \varphi_0\\ &P_1 = (A_{13} + A_{11}\sin\varphi)\,\varphi^{\cdot} - [C_{12}\,(\sin\varkappa\sin\varphi + \cos\varkappa)\cos\varphi -\\ &-C_{13}\sin\varkappa\sin\varphi]\, H\\ &P_2 = A_{22}\,\varphi^{\cdot}\cos\varphi + [C_{12}\,(\cos\varkappa\sin\varphi - \sin\varkappa\cos^2\varphi) +\\ &+ C_{23}\sin\varkappa\sin\varphi]\, H\\ &P_3 = (A_{33} + A_{13}\sin\varphi)\,\varphi^{\cdot} + [C_{31}\,(\sin\varkappa\cos^2\varphi - \cos\varkappa\sin\varphi) +\\ &+ C_{23}\,(\sin\varkappa\sin\varphi + \cos\varkappa)\cos\varphi + C_{33}\sin\varkappa\sin\varphi]\, H\end{aligned}$$

$$(3.17)\qquad \begin{aligned}&\Omega_1 = \varphi^{\cdot}\sin\varphi, \quad \Omega_2 = \varphi^{\cdot}\cos\varphi, \quad \Omega_3 = \varphi^{\cdot}\\ &u_1 = (C_{31} - C_{12}\cos\varphi)\,\varphi^{\cdot} + B_{11}H\,(\cos\varkappa\sin\varphi - \sin\varkappa\cos^2\varphi)\\ &u_2 = (-C_{23} + C_{12}\sin\varphi)\,\varphi^{\cdot} + B_{11}H\,(\sin\varkappa\sin\varphi + \cos\varkappa)\cos\varphi\\ &u_3 = (C_{33} + C_{13}\sin\varphi + C_{23}\cos\varphi)\,\varphi^{\cdot} - B_{33}H\sin\varkappa\sin\varphi\end{aligned}$$

$$(3.18)\qquad \gamma_1 = \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \cos\varphi, \quad \gamma_3 = 0$$

Выражение для кинетической энергии системы с учетом (1.1), (1.2), (2.9), (3.5) можно представить в виде [2, 5]

$$(3.19)\qquad \begin{aligned}&2T = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega}\cdot A\cdot\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\cdot B\cdot\mathbf{R} =\\ &= A_{11}\Omega_1^2 + A_{22}\Omega_2^2 + A_{33}\Omega_3^2 + 2A_{13}\Omega_1\Omega_3 + B_{11}\,(R_1^2 + R_2^2) + B_{33}R_3^2\end{aligned}$$

Сформулируем полученный результат. Если кинетическая энергия системы гиростат плюс жидкость имеет вид (3.19) и выполняются условия (3.5), (3.6), то уравнения (1.3) допускают решение (3.16), (3.17), в котором постоянная $\varphi^{\cdot}$ определяется из уравнения (3.11), постоянные $\varkappa$ и H вычисляются по формулам (3.12), а параметры C_{13}, C_{31}, C_{33}, A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{13}, B_{11}, B_{33}, λ_1, λ_3, p связаны соотношениями (3.13), (3.15). Это решение описывает движение тела, вращательная часть которого представляет собой регулярную прецессию вокруг неподвижной в пространстве оси, проекции единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ которой определяются выражениями (3.18) и которая образует с восходящей вертикалью угол $\varkappa$, а собственное вращение происходит вокруг оси, параллельной оси x_3 и ортогональной вектору $\boldsymbol{\gamma}$.

При $\lambda_1 = C_{12} = C_{23} = C_{13} = C_{31} = C_{33} = A_{11} - A_{22} = B_{11} = B_{33} = 0$ это решение переходит в решение Е. И. Харламовой [6] задачи о движении тяжелого гиростата с одной закрепленной точкой, а последнее при $\lambda_3 = 0$ — в решение Гриоли [7].

Замечание. В указанном решении без ограничения общности можно положить $B_{11} = 0$. Действительно, уравнения (1.3) не изменяются, если в (1.1) коэффициенты b_{ii} ($i = 1, 2, 3$) заменить на $b_{ii} - b$, тогда постоянные B_{ii} в силу (2.9) будут иметь значения $B_{ii} - b$. Полагая $b = B_{ii}$, получаем искомый результат. Механически это означает [2, 3], что от рассматриваемого движения тела отбрасывается постоянное поступательное движение в направлении вертикали со скоростью $\mathbf{U} = b\mathbf{R}$.

4. Дадим полную геометрическую интерпретацию движения твердого тела в жидкости, описываемого указанным решением при $B_{11} = 0$. Для этого удобно использовать аппарат винтового исчисления [8].

Обозначим через $\mathbf{V}$ кинематический винт, определяемый формулами (3.17), и представим его в дуальном виде $\mathbf{V} = \mathbf{\Omega} + \omega\mathbf{U}$, где ω ($\omega^2 = 0$) — число Клиффорда. Для дуального модуля [8] V винта $\mathbf{V}$ имеем выражение $V = \varphi^{\cdot} \sqrt{2}\ (1 + {}^1/_2 C_{33}\omega)$.

Пусть $\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\gamma} + \omega\boldsymbol{\gamma}^{\circ}$ — единичный винт неподвижной в пространстве прямой, имеющей направление вектора $\boldsymbol{\gamma}$. Для $\mathbf{\Gamma}$ имеем уравнение

$$\mathbf{\Gamma}^{\cdot} + \mathbf{V} \times \mathbf{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{\Gamma}^2 = 1$$

Отделяя здесь моментную часть, для определения вектора $\boldsymbol{\gamma}^{\circ}$ с проекциями γ_1°, γ_2°, γ_3° получаем уравнение

$$\boldsymbol{\gamma}^{\cdot\circ} + \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}^{\circ} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{\circ} = 0$$

Отсюда находим с учетом (3.17), (3.18)

$$\begin{aligned}
(4.1)\qquad & \gamma_1^{\circ} = {}^1/_4\, [C_{31} + \mu_1 - 4C_{12}\cos\varphi + (C_{23} - \mu_2)\sin 2\varphi + (C_{31} + \\
& + \mu_1)\cos 2\varphi] \\
& \gamma_2^{\circ} = {}^1/_4\, [-C_{23} + \mu_2 + 4C_{12}\sin\varphi - (C_{31} + \mu_1)\sin 2\varphi + \\
& + (C_{23} - \mu_2)\cos 2\varphi] \\
& \gamma_3^{\circ} = {}^1/_2 [\, 2C_{33} - (C_{31} - \mu_1)\sin\varphi + (C_{23} + \mu_2)\cos\varphi], \\
& \varphi = \varphi^{\cdot} t + \varphi_0
\end{aligned}$$

где μ_1, μ_2 — произвольные постоянные.

Обозначим через $A = \alpha + \omega\alpha^{\circ}$ дуальный угол [8] между осями винтов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Gamma}$, где α — угол между векторами $\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, а α° — расстояние между осями винтов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Gamma}$. Составим скалярное произведение винтов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Gamma}$

$$\begin{aligned}
(4.2)\qquad & \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Gamma} = V\cos A, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \omega(\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{\circ} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \\
& V\cos A = \varphi^{\cdot} \sqrt{2}\ (1 + {}^1/_2 C_{33}\omega)(\cos\alpha - \omega\alpha^{\circ}\sin\alpha)
\end{aligned}$$

Отделяя в (4.2) главную и моментную части, для определения α и α° получаем уравнения

$$\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \varphi^{\cdot} \sqrt{2}\cos\alpha, \quad \mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{\circ} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \varphi^{\cdot} \sqrt{2}\ ({}^1/_2 C_{33}\cos\alpha - \alpha^{\circ}\sin\alpha)$$

или с учетом (3.17), (3.18), (3.9), (4.1)

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha^{\circ} = -\frac{1}{2}[C_{33} + (C_{31} + \mu_1)\sin\varphi - (C_{23} - \mu_2)\cos\varphi]$$

Полагая $\mu_1 = -C_{31}$, $\mu_2 = C_{23}$, окончательно получаем

$$(4.3)\qquad \alpha = {}^1/_4 \pi, \qquad \alpha^{\circ} = -{}^1/_2 C_{33}$$

Возьмем какую-нибудь точку M твердого тела с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ (x_1, x_2, x_3) и обозначим через $\mathbf{E} = \mathbf{i}_3 + \omega\mathbf{i}_3^{\circ}$, $\mathbf{i}_3^{\circ} = \mathbf{r} \times \mathbf{i}_3$ единичный винт прямой, проходящей через точку M и параллельной оси x_3. Обозначим через $B = \beta + \omega\beta^\circ$ дуальный угол между осями винтов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{E}$ и составим скалярное произведение винтов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{E}$

$$(4.4)\qquad \mathbf{V}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{V}\cos B, \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{E} = \Omega\cdot i_3 + \omega(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{i}_3{}^\circ + \mathbf{u}\cdot\mathbf{i}_3)$$
$$V\cos B = \varphi^\bullet \sqrt{2}\,(1 + {}^1/{}_2C_{33}\omega)\,(\cos\beta - \omega\beta^\circ\sin\beta)$$

Отделяя в (4.5) главную и моментную части, для определения β и β° получаем уравнения

$$\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{i}_3 = \varphi^\bullet \sqrt{2}\cos\beta, \quad \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{i}_3{}^\circ + u\cdot i_3 = \varphi^\bullet\sqrt{2}\,({}^1/{}_2C_{33}\cos\beta - \beta^\circ\sin\beta)$$

или с учетом (3.17), (3.9)

$$\varphi^\bullet = \varphi^\bullet\sqrt{2}\cos\beta, \quad \varphi^\bullet\,[C_{33} + (x_2 - C_{31})\sin\varphi - (x_1 - C_{23})\cos\varphi] = \varphi^\bullet\,({}^1/{}_2C_{33} - \beta^\circ)$$

Отсюда находим

$$\beta = {}^1/{}_4\pi, \quad \beta^\circ = -{}^1/{}_2\,[C_{33} + (x_2 - C_{31})\sin\varphi - (x_1 - C_{23})\cos\varphi]$$

Полагая $x_1 = C_{23}$, $x_2 = C_{31}$, окончательно получаем

$$(4.5)\qquad \beta = {}^1/{}_4\pi, \quad \beta^\circ = -{}^1/{}_2C_{33}$$

В силу (4.2), (4.4) винт V можно представить в виде геометрической суммы двух винтов

$$(4.6)\qquad \mathbf{V} = V\,(\mathbf{\Gamma}\cos A + \mathbf{E}\cos B)$$

дуальные модули которых $V\cos A$ и $V\cos B$ постоянны.

Из (4.6), (4.3), (4.5) заключаем, что исследуемое движение твердого тела слагается из двух винтовых движений с единичными винтами $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{E}$ и постоянными дуальными модулями. Оси этих винтов ортогональны, а расстояние между ними постоянно и равно C_{33}. Винт $\mathbf{V}$ образует с винтами $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{E}$ равные постоянные дуальные углы и поэтому при движении тела ось винта V описывает в пространстве и в теле одинаковые однополостные гиперболоиды, осями симметрии которых служат оси винтов $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{E}$.

Обозначим через L и N точки пересечения оси винта $\mathbf{\Gamma}\times\mathbf{E}$ с осями винтов $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{E}$, соответственно, при этом координаты точки N суть $x_1 = C_{23}$, $x_2 = C_{31}$, $x_3 = C_{12}$. Введем в рассмотрение неподвижную прямоугольную систему осей координат $Ly_1y_2y_3$, ось y_3 которой совпадает с осью винта $\mathbf{\Gamma}$. Тогда указанные однополостные гиперболоиды определяются уравнениями

$$(4.7)\qquad y_1{}^2 + y_2{}^2 = {}^1/{}_4C_{33}{}^2 + y_3{}^2$$

$$(4.8)\qquad (x_1 - C_{23})^2 + (x_2 - C_{31})^2 = {}^1/{}_4C_{33}{}^2 + (x_3 - C_{12})^2$$

Движение твердого тела в жидкости, описываемое решением (3.16), (3.17), можно представить себе как результат качения неизменно связанного с телом однополостного гиперболоида (4.8) по такому же неподвижному гиперболоиду (4.7) вокруг общей образующей с постоянной по величине угловой скоростью $\varphi^\bullet\sqrt{2}$ и его скольжения вдоль этой образующей с постоянной по величине скоростью ${}^1/{}_2\sqrt{2}C_{33}\varphi^\bullet$.

При $C_{33}\to 0$ гиперболоиды (4.7), (4.8) в пределе переходят в свои асимптотические конусы с общей вершиной в точке N (C_{23}, C_{31}, C_{12}). В этом случае движение твердого тела происходит так, что неизменно связанный с ним конус катится по неподвижному конусу с постоянной по величине угловой скоростью $\varphi^{\cdot} \sqrt{2}$.

Аналогичное геометрическое представление исследуемого движения имеет место в другом предельном случае, когда плотность жидкости стремится к нулю. В этом случае задача о движении тяжелого твердого тела в жидкости переходит в задачу о движении гиростата с одной закрепленной точкой, а исследуемое решение — в решение Е. И. Харламовой ($\lambda_3 \neq 0$) или Гриоли ($\lambda_3 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости.— В кн.: Собр. соч. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1948, с. 337—346.
2. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая.— В кн.: Собр. соч. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1948, с. 136—193.
3. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая.— В кн.: Собр. соч. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 194—311.
4. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью.— ПМТФ, 1963, № 4, с. 17—29.
5. *Харламов П. В.* Поступательные движения тяжелого твердого тела в жидкости.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 124—129.
6. *Харламова Е. И.* О линейном инвариантном соотношении уравнений движении тела, имеющего неподвижную точку.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 1 Киев: Наук. думка, 1969, с. 5—12.
7. *Grioli G.* Existenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetriko.— Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4, 1947, t. 26, fsc., 3—4, p. 271—281.
8. *Диментберг Ф. М.* Винтовое исчисление и его приложения в механике. М.: Наука, 1965. 199 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1983