

УДК 531.36:534.1

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СТРУНЕ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ОПОРАХ

Веденова Е. Г., Маневич Л. И., Пилипчук В. Н.

Рассматривается задача построения и классификации нормальных колебаний струны с сосредоточенными массами на нелинейно-упругих опорах (предельными частными случаями являются линейная и виброударная системы). Показано, что в пределе интенсивного ударного взаимодействия нелинейная система обладает дополнительными свойствами симметрии, позволяющими эффективно решить поставленную задачу. С другой стороны, нормальные колебания виброударной системы могут быть использованы как порождающие решения при динамическом расчете близких к ним существенно нелинейных систем. Обсуждается связь локализованных нормальных колебаний с решениями солитонного типа.

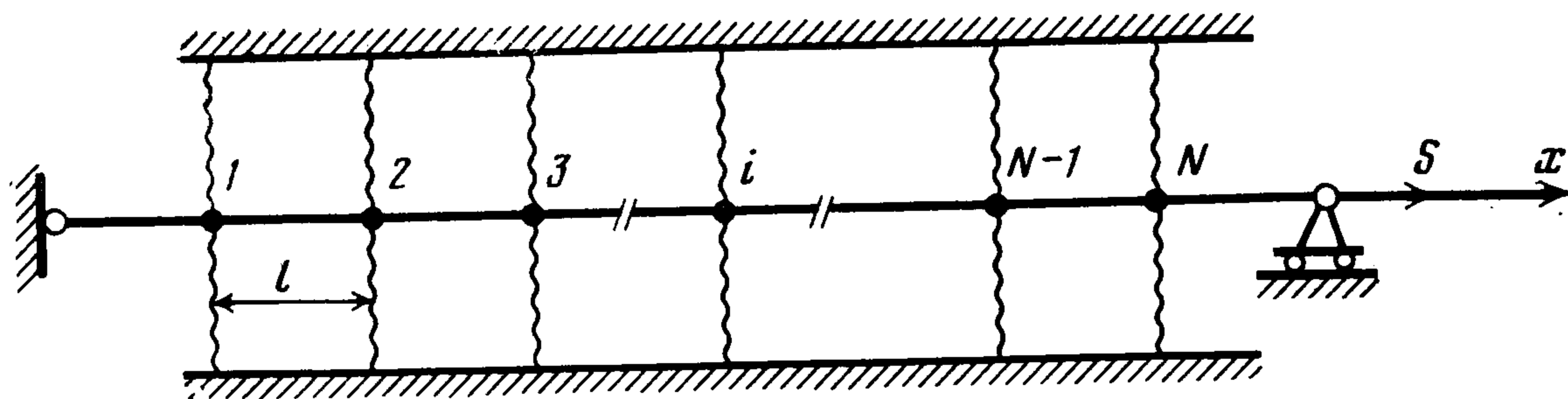
Существование нормальных колебаний как специальных частных решений линейной консервативной системы обусловлено присущими ей свойствами симметрии, которые частично могут сохраниться и в нелинейном случае [1, 2]. С этим обстоятельством связана возможность построения в некоторых сильно нелинейных системах синхронных движений, обладающих рядом свойств линейных нормальных колебаний [3, 4] (в квазилинейном случае нормальные, «главные», колебания рассматривались еще в работах Ляпунова [5]). В силу этих свойств многомерная нелинейная система в режиме нормального колебания ведет себя подобно нелинейному осциллятору.

1. Рассматриваются поперечные колебания регулярной цепочки масс, связанных между собой невесомой струной и взаимодействующих с нелинейно-упругими опорами (фиг. 1), которые в пределе становятся жесткими ограничителями с некоторым зазором $2e$. Реакция j -й опоры

$$q_j = a (u_j/e)^{2n-1}$$

где u_j — прогиб струны в соответствующем сечении, n — целое число a — параметр жесткости.

Среди различных типов движения нелинейных систем выделяются простейшие режимы, к которым относятся прежде всего нормальные колеба-



Фиг. 1

ния. При $n = 1$ (струна с сосредоточенными массами на линейно-упругих опорах) имеем N нормальных колебаний; спектр соответствующих собственных частот дискретный и ограниченный.

Если $n > 1$, будем различать случаи сильной и слабой связи вдоль цепи. В первом случае нелинейность мала и рассматриваемая система принадлежит к классу систем Ляпунова [5]. Тогда возникает задача построения нелинейных нормальных колебаний, которые при уменьшении

амплитуды переходят в нормальные колебания линеаризованной системы. Этот наиболее простой случай далее не рассматривается.

Во втором случае при пренебрежении связью вдоль цепи получаем систему невзаимодействующих однородных осцилляторов (потенциальная энергия каждого осциллятора — однородная функция смещения). Однако точные решения этой системы затруднительно использовать в качестве первого приближения в той или иной схеме теории возмущений, поскольку они выражаются через специальные функции. В то же время характер колебательного процесса, в том числе и в режиме нормальных колебаний, будет теперь существенно зависеть от показателя n . При $n \sim 1$ (например, $n = 2, 3$) нормальные колебания еще близки к гармоническим (во времени) и, следовательно, для их описания можно использовать квазигармоническое приближение в рамках стандартной схемы метода усреднения. Когда же $n \gg 1$, поведение системы оказывается более близким к другому предельному случаю ($n \rightarrow \infty$), который соответствует характеристике упругой опоры, изображенной на фиг. 2, т. е. ударному взаимодействию. Исследование нормальных колебаний систем рассматриваемого класса в этой ситуации, наименее благоприятной с точки зрения квазигармонического подхода, и составляет основное содержание данной статьи.

2. Рассмотрим вначале струну с двумя единичными сосредоточенными массами в предельном случае ударного взаимодействия, когда нелинейно-упругие опоры становятся жесткими ограничителями. Запишем уравнения движения

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \gamma (2u_1 - u_2) + q\left(u_1, \frac{du_1}{dt}\right) &= 0 \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \gamma (2u_2 - u_1) + q\left(u_2, \frac{du_2}{dt}\right) &= 0 \\ |u_1| \leq e, \quad |u_2| \leq e; \quad \gamma &= S/l \end{aligned}$$

где q — усилие ударного взаимодействия, которое включается при $|u_j| = e$ ($j = 1, 2$), S — натяжение струны, l — расстояние между опорами (массами).

При $\gamma = 0$ (связь отсутствует) обе массы движутся независимо одна от другой, испытывая лишь абсолютно упругие удары об ограничители. Соответствующие координаты u_j ($j = 1, 2$) определяются следующим образом:

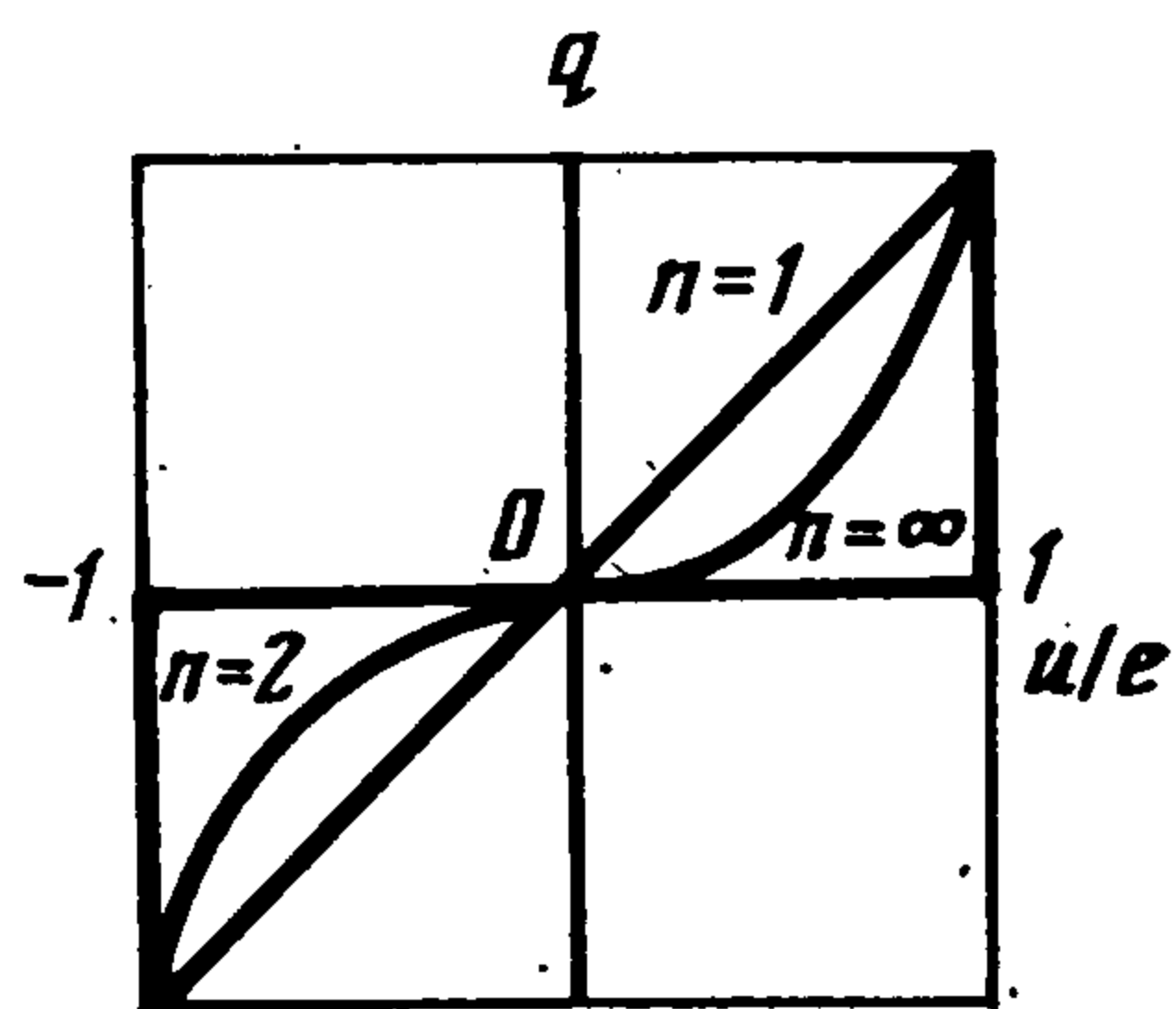
$$(2.2) \quad u_j = e\Pi(\varphi_j); \quad \frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\pi v_j}{e}$$

Здесь $\Pi(\varphi)$ — пилообразная функция с периодом 2π и амплитудой 1, φ_j — фаза j -й массы, v_j — постоянная во времени абсолютная величина скорости.

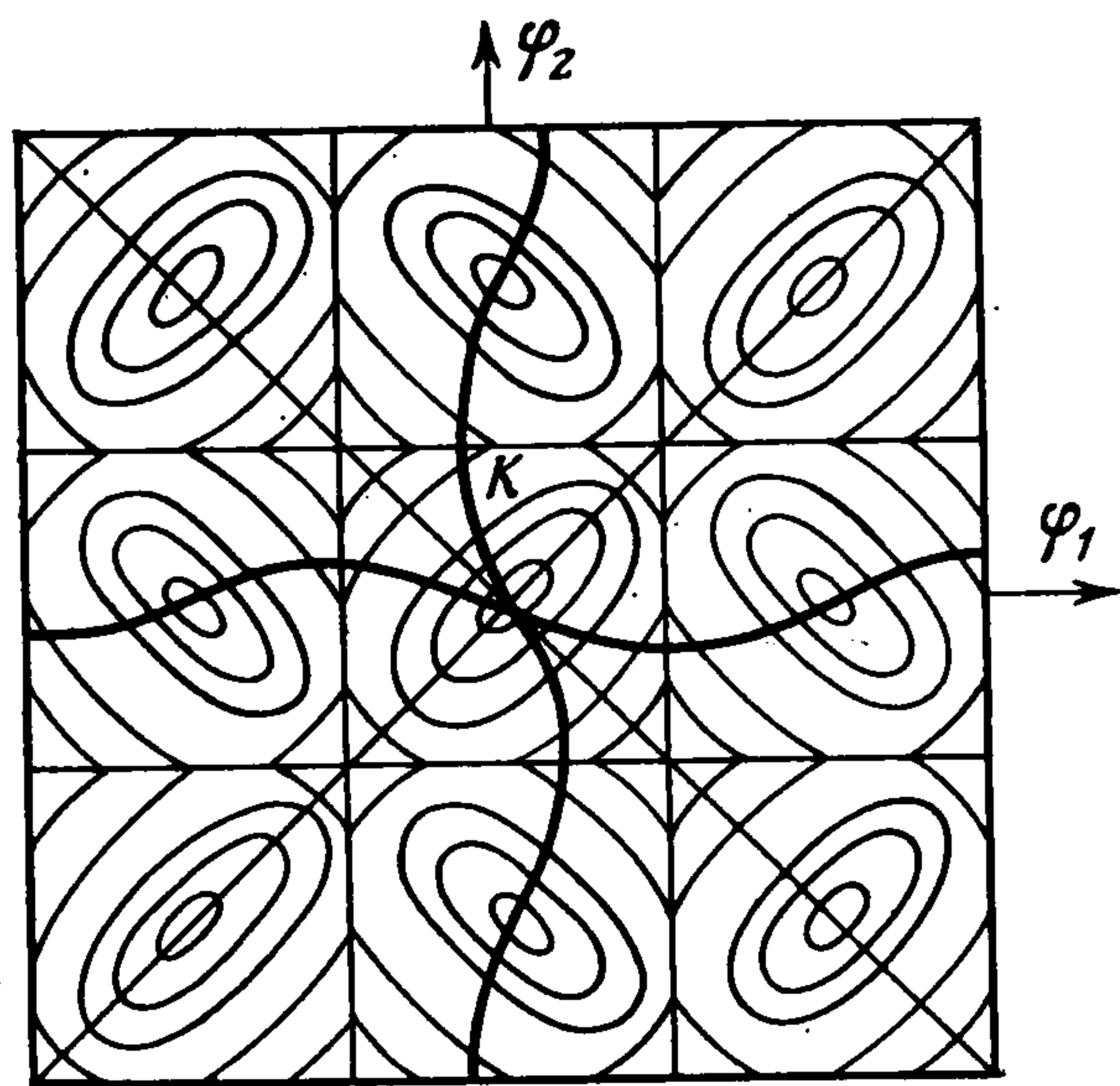
Переходя к общему случаю ($\gamma \neq 0$), будем рассматривать (2.2) как замену переменных (такие негладкие преобразования были впервые использованы в [6]). Тогда уравнения движения приводятся к виду

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \gamma \frac{\pi^2}{4} \Pi'(\varphi_1) [2\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)] &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \gamma \frac{\pi^2}{4} \Pi'(\varphi_2) [2\Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_1)] &= 0 \end{aligned}$$

Система уравнений (2.3) в отличие от (2.1) не содержит функций с разрывами второго рода.



Фиг. 2



Фиг. 3

Соотношения (2.3) можно рассматривать как уравнения движения единичной массы на плоскости (φ_1, φ_2) в периодическом потенциальном силовом поле; при $\gamma = 0$ имеем движение по инерции.

На фиг. 3 показано семейство эквипотенциальных линий. Траектория в плоскости (φ_1, φ_2) посредством (2.2) отображается в конфигурационное пространство исходной системы (u_1, u_2) . Это отображение «сворачивает» плоскость (φ_1, φ_2) по линиям

$$(2.4) \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + j\pi; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + j\pi \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

в квадрат $K: \{-\pi/2 \leq \varphi_i \leq \pi/2, i = 1, 2\}$ с последующим растяжением его в направлениях φ_1, φ_2 в e раз. При достаточно малых значениях энергии система движется без ударов, так что траектория на плоскости (φ_1, φ_2) остается внутри квадрата K . Переход в новую ячейку плоскости соответствует ударам об ограничитель.

Заметим, что рисунок в квадрате K (эквипотенциальные кривые линейной системы) обладает осью поворотной симметрии второго порядка, а узор (фиг. 3), полученный многократным зеркальным отражением этого рисунка (мотива) относительно прямых (2.4), имеет ось симметрии четвертого порядка. Это связано с существенным различием динамических свойств линейной модели (система без ударов) и режимов движения с ударами об ограничитель. Так, в первом случае имеем два нормальных колебания — собственные колебания линейной системы с двумя степенями свободы. При наличии ударов их уже четыре (фиг. 3), так как помимо симметричной (синфазной) и кососимметричной (антифазной) форм появляются две дополнительные пространственно локализованные формы, которые в пределе $\gamma \rightarrow 0$ переходят в прямые $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ и соответствуют покою одной из масс.

3. Роль рассматриваемых нормальных колебаний определяется в первую очередь возможностью их использования в качестве порождающих решений при асимптотическом интегрировании уравнений движения. Поэтому получим приближенные (осредненные) уравнения, описывающие поведение системы около перечисленных выше форм. При построении таких приближенных уравнений целесообразно использовать естественный малый параметр задачи, отражающий основную черту интенсивного ударного режима: малую относительную величину параметра связи

$$\varepsilon^2 = 4e^2\gamma/(\pi^2\nu^2)$$

Физическое ограничение $\varepsilon^2 \ll 1$, очевидно, связано с условием реализации ударов. Малость параметра ε предопределяет наличие в системе «быстрого» и «медленного» времен. Это позволяет использовать метод усреднения в той или иной модификации. Ниже в каждом из рассматриваемых случаев будут приведены лишь укороченные уравнения, соответствующие первому приближению. На их основе выполнена классификация нормальных форм по типу поведения в окрестностях этих форм.

Синфазная форма $\varphi_1 = \varphi_2$. Положим $\varphi_1 = \tau + \bar{\varphi}_1(t_1)$, $\varphi_2 = \tau + \bar{\varphi}_2(t_1)$, где $\tau = 1/2 \pi \nu e^{-1} t$ — быстрое, а $t_1 = \varepsilon \tau$ — медленное время. Быстрое время, естественно, связано с темпом ударов.

Выполняя в (2.3) осреднение по переменной τ , получаем

$$\frac{d^2(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)}{dt_1^2} = 0, \quad \frac{d^2(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)}{dt_1^2} + 2\Phi(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2) = 0$$

где $\Phi(\xi)$ — 2π -периодическая функция, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим выражением:

$$\Phi(\xi) = \frac{\pi^2}{4} \langle \Pi'(\tau) \Pi(\tau + \xi) \rangle_{\tau} = \begin{cases} \xi(1 - \xi/\pi), & 0 \leq \xi \leq \pi \\ \xi(1 + \xi/\pi), & -\pi \leq \xi \leq 0 \end{cases}$$

Тривиальное решение усредненной системы, соответствующее синфазной форме, орбитально устойчиво «в малом». В этом смысле будем относить синфазную форму к «устойчивому» типу.

Антифазная форма $\varphi_1 = -\varphi_2$. Пусть $\varphi_1 = \tau + \bar{\varphi}_1(t_1)$, $\varphi_2 = -\tau + \bar{\varphi}_2(t_1)$. В данном случае уравнения относительно $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ могут быть приведены к виду

$$\frac{d^2(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)}{dt_1^2} = 0; \quad \frac{d^2(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)}{dt_1^2} - 2\Phi(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) = 0$$

Теперь тривиальное решение усредненной системы соответствует антифазной форме и является орбитально неустойчивым. Отнесем поэтому антифазную форму к «неустойчивому» типу.

Локализованные формы. Рассмотрим, наконец, окрестность прямой $\varphi_2 = 0$. Как уже отмечалось, эта прямая будет нормальной формой лишь при значении $\gamma = 0$, однако при $\gamma \neq 0$ криволинейная форма «в среднем» направлена по прямой $\varphi_2 = 0$ (фиг. 3). Предположим, что траектория в процессе движения остается в полосе $-\pi/2 < \varphi_2 < \pi/2$. Тогда уравнения (2.3) принимают вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} + \frac{\varepsilon^2\pi^2}{4} \Pi(\varphi_1) \Pi'(\varphi_1) &= \frac{\varepsilon^2\pi}{4} \Pi'(\varphi_1) \varphi_2 \\ \frac{d^2\varphi_2}{d\tau^2} + \varepsilon^2\varphi_2 &= \frac{\varepsilon^2\pi}{4} \Pi(\varphi_1) \\ \varepsilon^2 = \frac{8e^2\gamma}{\pi^2\nu_1^2} &\ll 1, \quad \tau = \frac{\pi\nu_1}{2e} t \end{aligned}$$

Положив $\varphi_1 = \tau + \bar{\varphi}_1(t_1)$ и усредняя (3.1) по τ , получим уравнения

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_1}{dt_1^2} = 0, \quad \frac{d^2\bar{\varphi}_2}{dt_1^2} + \bar{\varphi}_2 = 0$$

которые свидетельствуют об орбитальной устойчивости траектории $\varphi_2 = 0$ относительно возмущений $\bar{\varphi}_2$, $\frac{d\bar{\varphi}_2}{dt_1}$. Это означает, что достаточно большая энергия, сообщенная в начальный момент одному из осцилляторов, сохраняется им и в дальнейшем. Тогда рассматриваемая локализованная форма в указанном выше смысле относится к «устойчивому» типу. Аналогичный вывод справедлив и для второй локализованной формы.

4. Модель с двумя степенями свободы позволила выявить важнейшую черту, присущую всем дискретным системам рассматриваемого класса — существование локализованных форм колебаний. Другие типы элементарных решений, отсутствующие в линейных системах, обнаруживаются, как будет видно из дальнейшего, лишь при $N \geq 3$. В связи с этим перейдем к анализу дискретной модели с тремя степенями свободы.

Уравнения, определяющие фазы φ_i ($i = 1, 2, 3$), в данном случае имеют вид

$$\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} - \frac{\gamma\pi^2}{4} \Pi'(\varphi_i) [\Pi(\varphi_{i-1}) - 2\Pi(\varphi_i) + \Pi(\varphi_{i+1})] = 0$$

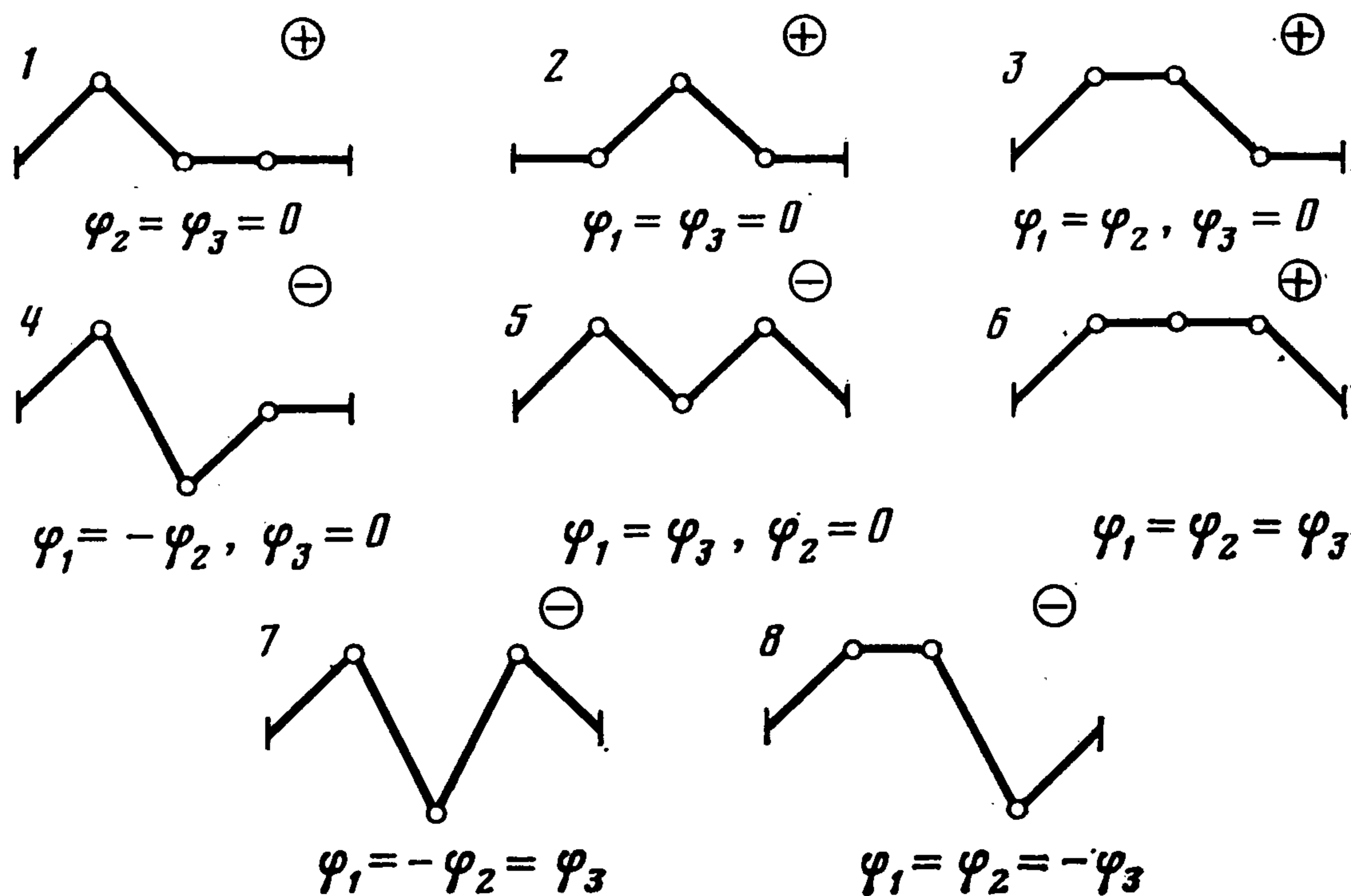
где $\varphi_0 \equiv \varphi_3 \equiv 0$. Введя безразмерный параметр времени $\tau = 1/2\pi v e^{-1}t$, запишем эту систему в виде

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} + \gamma \frac{e^2}{v^2} \Pi'(\varphi_1) [2\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)] = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\tau^2} + \gamma \frac{e^2}{v^2} \Pi'(\varphi_2) [-\Pi(\varphi_1) + 2\Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)] = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{d\tau^2} + \gamma \frac{e^2}{v^2} \Pi'(\varphi_3) [-\Pi(\varphi_2) + 2\Pi(\varphi_3)] = 0$$

Уравнения (4.1) можно рассматривать как уравнения движения единичной массы в трехмерном пространстве в периодическом потенциальном силовом поле. Эквипотенциальные поверхности этого поля представляют собой пространственный узор, полученный многократным зеркальным отражением кубической ячейки $-\pi/2 \leq \varphi_i \leq \pi/2$ ($i = 1, 2, 3$). Внутри ячейки силовое поле соответствует линейной задаче с тремя степенями свободы и обладает тремя осями симметрии трехосного эллипсоида. Поле во всем пространстве $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ имеет уже 13 осей симметрии кубической решетки, поэтому в отличие от линейной задачи здесь возможны не 3, а 13 нормальных колебаний. Однако приведенными на фиг. 4 соотноше-



Фиг. 4

ниями исчерпываются все существенно различные случаи (остальные формы легко восстановить из соображений симметрии). Здесь $t_1 = \varepsilon\tau$; $\varepsilon^2 = 4\gamma e^2/(\pi^2 v^2)$; в случаях 1, 2, 5 предполагается, что $-\pi/2 < \varphi_i < \pi/2$ ($i = 1, 2, 3$). Массы, показанные на фиг. 4 неподвижными, покоятся лишь в «среднем», совершая высокочастотные осцилляции с небольшими амплитудами.

Приведенные результаты свидетельствуют о существовании, как и для системы с двумя степенями свободы, локализованных форм колебаний «устойчивого» типа (решения 1, 2 и аналогичная форма с локализацией на третьей массе). В то же время в системе с тремя степенями свободы уже проявляется новый эффект: возможность кооперативного движения соседних масс (устойчивого типа) при наличии недеформированных в среднем связей (решение 3). Как и в п. 3, синфазная форма (решение 6) относится к устойчивому типу (на фиг. 4 они помечены знаком плюс), антифазная (решение 7) — к неустойчивому (помечены знаком минус). К неустойчивому типу относятся и другие формы движения, в которых перемещения двух соседних масс имеют разные знаки (решения 4, 8), а также форма, в которой неподвижная (в среднем) масса разделяет две деформированные связи (решение 2).

Полученные результаты (фиг. 4) позволяют наглядно представить возможные виды нормальных колебаний и при $N > 3$.

5. Покажем теперь, каким образом результаты, относящиеся к предельному случаю $n \rightarrow \infty$, могут быть использованы для построения нормальных колебаний при $n \gg 1$.

В качестве примера рассмотрим систему с двумя степенями свободы

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \gamma(2u_1 - u_2) + u_1^k &= 0 \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \gamma(2u_2 - u_1) + u_2^k &= 0 \quad (k = 2n - 1) \end{aligned}$$

Будем разыскивать нормальную форму колебаний, соответствующую локализованной форме предельной системы ($k \rightarrow \infty$).

Положим

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_0 + v^{-2}U(u_0), \quad u_2 = v^{-2}V(u_0) \\ u_0 &= A\Pi(\varphi), \quad \varphi = vt/A \end{aligned}$$

(период функции Π временно будем считать равным 4). Подставляя (5.2) в (5.1), получим систему уравнений относительно $U(u_0)$, $V(u_0)$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} U'' + \{A^{-1}(v^2 + U')\Pi''\} + 2\gamma u_0 + \gamma v^{-2}(2U - V) + \\ + (u_0 + v^{-2}U)^k &= 0 \\ V'' + \{A^{-1}V'\Pi''\} + \gamma v^{-2}(2V - U) - \gamma u_0 + v^{-2k}V^k &= 0 \end{aligned}$$

Полагая

$$(5.4) \quad U'_{u_0=A} = -v^2, \quad V'|_{u_0=A} = 0$$

уничтожим члены в фигурных скобках, соответствующие периодическим системам импульсов (δ -функций) по переменной φ .

Первому из условий (5.4) удовлетворим путем соответствующего выбора амплитуды A , а второму — за счет выбора постоянных интегрирования при решении уравнения относительно V . Разыскивая $U(u_0)$, $V(u_0)$ в виде

$$U = U_1 + v^{-2}U_2 + \dots, \quad V = V_1 + v^{-2}V_2 + \dots$$

получим из (4.3) в первом приближении

$$U_1'' + 2\gamma u_0 + u_0^k = 0, \quad V'' - \gamma u_0 = 0$$

Отсюда

$$U_1 = -\gamma \frac{u_0^3}{3} - \frac{u_0^{k+2}}{(k+2)(k+1)}, \quad V_1 = \gamma \left(\frac{u_0^3}{6} - \frac{A^2 u_0}{2} \right)$$

причем уравнение относительно A имеет вид

$$\gamma^2 A^2 + A^{k+1}/(k+1) = v^2$$

Таким образом, решение в этом приближении запишется в виде

$$U = u_0 - \frac{\gamma}{3v^2} u_0^3 - \frac{u_0^{k+2}}{v^2 (k+2)(k+1)}$$

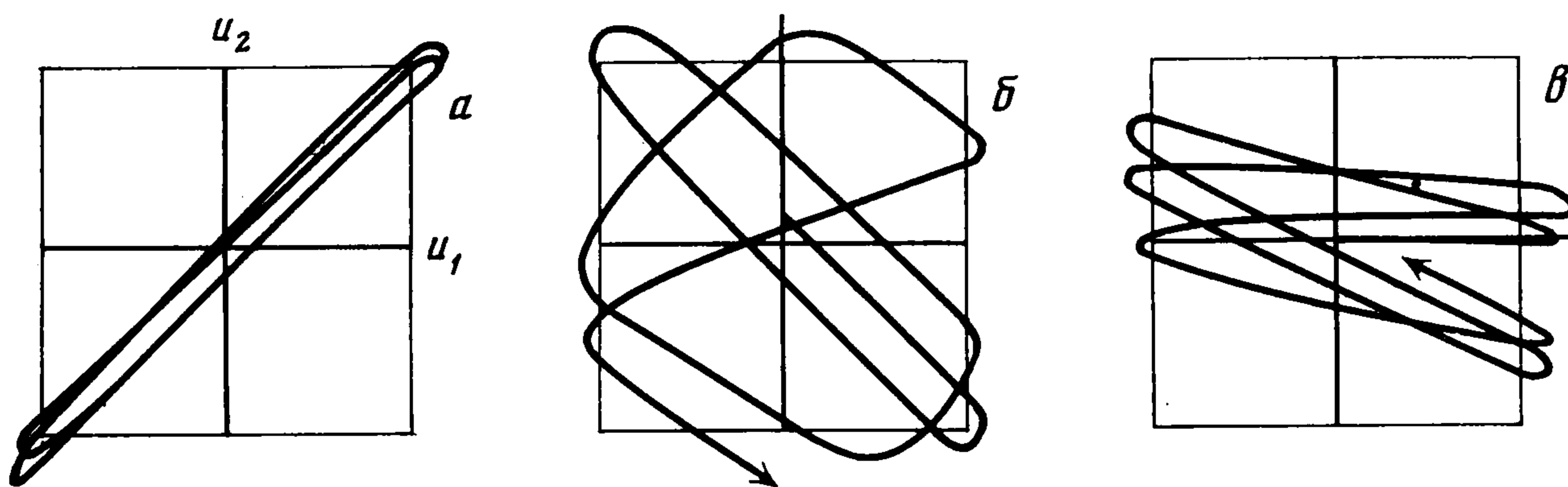
$$V = \frac{\gamma}{v^2} \left(\frac{u_0^3}{6} - \frac{A^2 u_0}{2} \right), \quad A \approx [(k+1)v^2]^{1/(k+1)}$$

Аналогично можно построить решения и в следующих приближениях, причем амплитуда A представляется разложением

$$A = A_1 + v^{-2} A_2 + \dots$$

6. Поскольку классификация нормальных форм выполнялась на основе усредненных уравнений, было проведено также численное интегрирование исходной системы с характеристикой $q_j = u_j^{21}$, практически соответствующей ударному процессу, при начальных условиях, заданных в «окрестностях» нормальных форм «устойчивого» и «неустойчивого» типов.

Приведем здесь результаты, полученные для модели с двумя степенями свободы при $\gamma = 0,5$; $a = 1$; $e = 1$ (фиг. 5).



Фиг. 5

В тех случаях, когда нормальная форма относится к устойчивому типу, при начальных условиях несколько отличных от «точных», траектория остается вблизи формы. Это имеет место для синфазной (фиг. 5, а) и локализованной (фиг. 5, в) форм. Если же форма относится к неустойчивому типу (фиг. 5, б, антифазная форма), наблюдается быстрый «уход» траектории от формы.

7. Обсудим связь локализованных нормальных колебаний с решениями солитонного типа для бесконечной цепочки.

Если в рассматриваемой системе $N \rightarrow \infty$, $e = 1$, уравнения движения при конечно-разностной аппроксимации упругих сил в струне имеют вид

$$(7.1) \quad d^2 u_j / dt^2 + \gamma (2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}) + a u_j^{2n-1} = 0$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эта система имеет точное частное решение, соответствующее антифазной нормальной форме

$$u_j = (-1)^j U(t)$$

где функция $U(t)$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению

$$(7.2) \quad d^2 U / dt^2 + 4\gamma U + a U^{2n+1} = 0$$

Решения солитонного типа можно искать в классе слабо модулированных стоячих волн

$$(7.3) \quad u_j = (-1)^j U_j(t)$$

предполагая при каждом t плавную (по сравнению с $u_j(t)$) зависимость функций $U_j(t)$ от индекса j . После подстановки (7.3) в (7.1) и простых преобразований получаем

$$(7.4) \quad d^2U_j/dt^2 + \gamma(U_{j+1} + U_{j-1} - 2U_j) + 4\gamma U_j + aU_j^{2n-1} = 0$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В силу плавной зависимости от j набор функций $U_j(t)$ может быть приближенно заменен одной функцией двух переменных ($U(x, t)$), а конечно-разностный оператор в (7.4) — второй частной производной по пространственной координате. Тогда приходим к одному дифференциальному уравнению в частных производных относительно $U(x, t)$

$$(7.5) \quad \partial^2 U / \partial t^2 + \gamma l^2 \partial^2 U / \partial x^2 + 4\gamma U + aU^{2n-1} = 0$$

что соответствует использованию континуального приближения для системы (7.4). Это нелинейное уравнение имеет локализованное решение солитонного типа с временной частотой ω , превышающей максимальную частоту собственных колебаний системы (7.1) после линеаризации — $\omega_{\max} = 2\sqrt{\gamma}$.

Пусть $\varepsilon^2 = \omega^2 - \omega_{\max}^2 \ll 1$, тогда в первом порядке по ε солитонное решение может быть выписано в явной форме. Например, при $n = 2$ [7—9]

$$(7.6) \quad U = 4\varepsilon \sin \omega t \operatorname{sech} \frac{\varepsilon}{l\sqrt{\gamma}} x$$

так что

$$(7.7) \quad u_j = (-1)^j U(x_j, t)$$

Аналогично могут быть получены решения солитонного типа при $n > 2$.

В области применимости континуального приближения (7.5) при $\varepsilon \ll 1$, когда функция $U(x, t)$ действительно плавно изменяется по координате x , ее локализация выражена слабо, а амплитуда может быть сколь угодно малой. Нелинейные и линейные члены в системе (7.5) имеют при этом один и тот же порядок по ε .

С ростом ε амплитуда увеличивается и проявляется отчетливая тенденция к выраженной локализации — решение солитонного типа становится практически неотличимым от локализованной нормальной формы. Однако континуальное приближение, а следовательно, и аналитическое представление (7.6), (7.7) становится здесь уже неприменимым. В таком случае наиболее естественным оказывается проведенный выше анализ в терминах нормальных колебаний.

Следовательно, аналитические представления вида (7.6), (7.7) и изучаемые в данной статье локализованные нормальные формы относятся к одному и тому же типу решений, но соответствуют различным областям изменения амплитуды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И., Пинский М. А. О нормальных колебаниях в нелинейных системах с двумя степенями свободы. — Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 9, с. 83—90.
2. Маневич Л. И., Пинский М. А. Об использовании симметрии при расчете нелинейных колебаний. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2, с. 43—46.

3. *Rosenberg R. M.* On the vibrations of systems with many degrees of freedom.— In. *Advances in Applied Mechanics*, V. 9, New York—London: Acad. press, 1966, p. 155—242.
4. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В.* О периодических решениях, близких к прямолинейным нормальным формам колебаний.— *ПММ*, 1972, вып. 6, с. 1051—1058.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956, 491 с.
6. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1976, № 2, с. 30—34.
7. *Косевич А. М., Ковалев А. С.* Самолокализация колебаний в одномерной ангармонической цепочке.— *ЖЭТФ*, 1974, т. 67, вып. 5, с. 1793—1804.
8. *Веденова Е. Г., Маневич Л. И.* Периодические и локализованные волны в виброударных системах регулярной структуры.— *Машиноведение*, 1981, № 4, с. 21—30.
9. *Веденова Е. Г.* Солитоны в существенно нелинейной системе ударного типа.— *Машиноведение*, 1983, № 1, с. 11—15.

Москва

Поступила в редакцию
22.XI.1983