Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ТРИВИАЛЬНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С ПСЕВДОЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Клоков А. С., Самсонов В. А.

Проводится качественный анализ задачи о стабилизации установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами [1—3]. Известно [3], что тривиальные установившиеся движения, степень неустойчивости которых отлична от нуля, для случая гироскопически несвязанных систем нестабилизируемы. Свойство гироскопической связанности системы предоставляет некоторые возможности для стабилизации.

1. Пусть механическая система с r позиционными координатами q_i и $n-r$ псевдоциклическими гироскопически связана, т. е. ее кинетическая энергия имеет вид

$$T=\frac{1}{2}q^{\cdot T}A(q)q^{\cdot}+q^{\cdot T}C(q)\omega+\frac{1}{2}\omega^TB(q)\omega$$

Здесь q, $q^{\cdot}$, ω — матрицы-столбцы позиционных координат, позиционных и псевдоциклических скоростей, A, B — положительно-определенные симметрические матрицы, C — прямоугольная матрица. Их коэффициенты зависят от позиционных координат.

Предположим, что обобщенные силы, отвечающие позиционным координатам, заданы и представляют собой сумму потенциальных и диссипативных сил, т. е.

$$Q_i=\partial U/\partial q_i+Q_{id}$$

Обобщенные силы F_j, отвечающие псевдоциклическим координатам, будем считать управляющими и подлежащими выбору.

Пусть система допускает тривиальное установившееся движение

$$q_0=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

Это означает [3], что

$$\frac{\partial U(q_0)}{\partial q_i}=\frac{\partial B_{kj}(q_0)}{\partial q_i}=0\quad (i,k,j=1,\ldots,r) \tag{1.2}$$

Величины псевдоциклических скоростей на установившемся движении (1.1) при условии (1.2) могут быть заданы произвольно.

2. Вопрос о стабилизируемости тривиального установившегося движения q_0, ω_0 по первому приближению сводится к анализу уравнений Лагранжа, линеаризованных в окрестности точки q_0, ω_0

$$A_ix^{\cdot\cdot}+C_i\eta^{\cdot}+G_ix^{\cdot}+D_ix^{\cdot}+W_ix=0 \tag{2.1}$$

$$x^{\cdot\cdot T}C_j+B_j\eta^{\cdot}=K_j\eta+P_jx+N_jx^{\cdot} \tag{2.2}$$

$$x=q-q_0,\quad \eta=\omega-\omega_0,\quad G_i=\omega^T\left(\frac{\partial C_i}{\partial q}-\frac{\partial C}{\partial q_i}\right)$$

$$W_i=\frac{\partial^2 v}{\partial q_i\partial q_j}+\omega^T\frac{\partial^2 B}{\partial q_i\partial q_j}\omega,\quad i=1,\ldots,r;\quad j=r+1,\ldots,n$$

Здесь D_i — i-я строка матрицы D (линейная часть диссипативной силы Q_{id}; будем считать, что $\det D \neq 0$), A_i, C_i, B_j — строки матриц A, C, B; K_j, P_j, N_j — строки матриц K, P, N линейных управляющих сил F_j. Все коэффициенты системы вычислены при $q = q_0$, $\omega = \omega_0$.

Отметим, что для гироскопически несвязанных механических систем $C \equiv 0$ и подсистема (2.1) «отщепляется» от подсистемы (2.2), в которую входят управляющие силы. В рассматриваемом же здесь случае $C \not\equiv 0$, подсистемы (2.1) и (2.2) имеют перекрестную связь через $\eta^{\cdot}$ и $x^{\cdot\cdot}$, что и предоставляет некоторые возможности для стабилизации. Естественно, что подобная задача актуальна, прежде всего, тогда, когда матрица W не является определенно-положительной. В частности, если W имеет l отрицательных собственных чисел (степень неустойчивости, равную l), то нулевое решение подсистемы (2.1) при условии $\eta^{\cdot} \equiv 0$ неустойчиво (в силу теорем Кельвина—Четаева [4]).

Для построения стабилизирующих воздействий воспользуемся методикой, изложенной в [3]. Потребуем, чтобы система (2.1) обладала асимптотически устойчивым инвариантным многообразием

$$\eta + Lx + Mx^{\cdot} = 0 \tag{2.3}$$

Для этого достаточно, чтобы система

$$y^{\cdot} = -\gamma y, \quad y = \eta + Lx + Mx^{\cdot} \tag{2.4}$$

удовлетворялась тождественно в силу уравнений (2.1), (2.2). Здесь γ — симметричная, положительно-определенная матрица. Выбор матриц L, M, γ однозначно определяет коэффициенты матриц K, P, N управляющих сил.

Система (2.1), (2.2) на инвариантном многообразии (2.3) имеет вид

$$\begin{gathered} A_*x^{\cdot\cdot} + [Q_*(D+G) + CB^{-1}S_*^{-1}L]\,x^{\cdot} + Q_*Wx = 0 \\ A_* = A - CB^{-1}C^T, \quad B_* = B - C^TA^{-1}C \\ S_* = -B_*^{-1} + MA_*^{-1}CB^{-1}, \quad T_* = -B_*^{-1}C^TA^{-1} + MA_*^{-1}, \\ Q_* = E - CB^{-1}S_*^{-1}T_* \end{gathered} \tag{2.5}$$

(матрицы G, W образованы строками G_i, W_i).

Справедливо утверждение: если возможен такой выбор матриц L, M, что нулевое решение системы (2.5) станет асимптотически устойчивым, то установившееся движение $q = q_0$, $\omega = \omega_0$ стабилизируемо. При этом коэффициенты матриц управляющих сил, стабилизирующих установившееся движение, определяются по формулам

$$\begin{gathered} K = S_*^{-1}\gamma, \quad P = S_*^{-1}(\gamma L - T_*W) \\ N = S_*^{-1}[\gamma M + L - T_*(D+G)] \end{gathered} \tag{2.6}$$

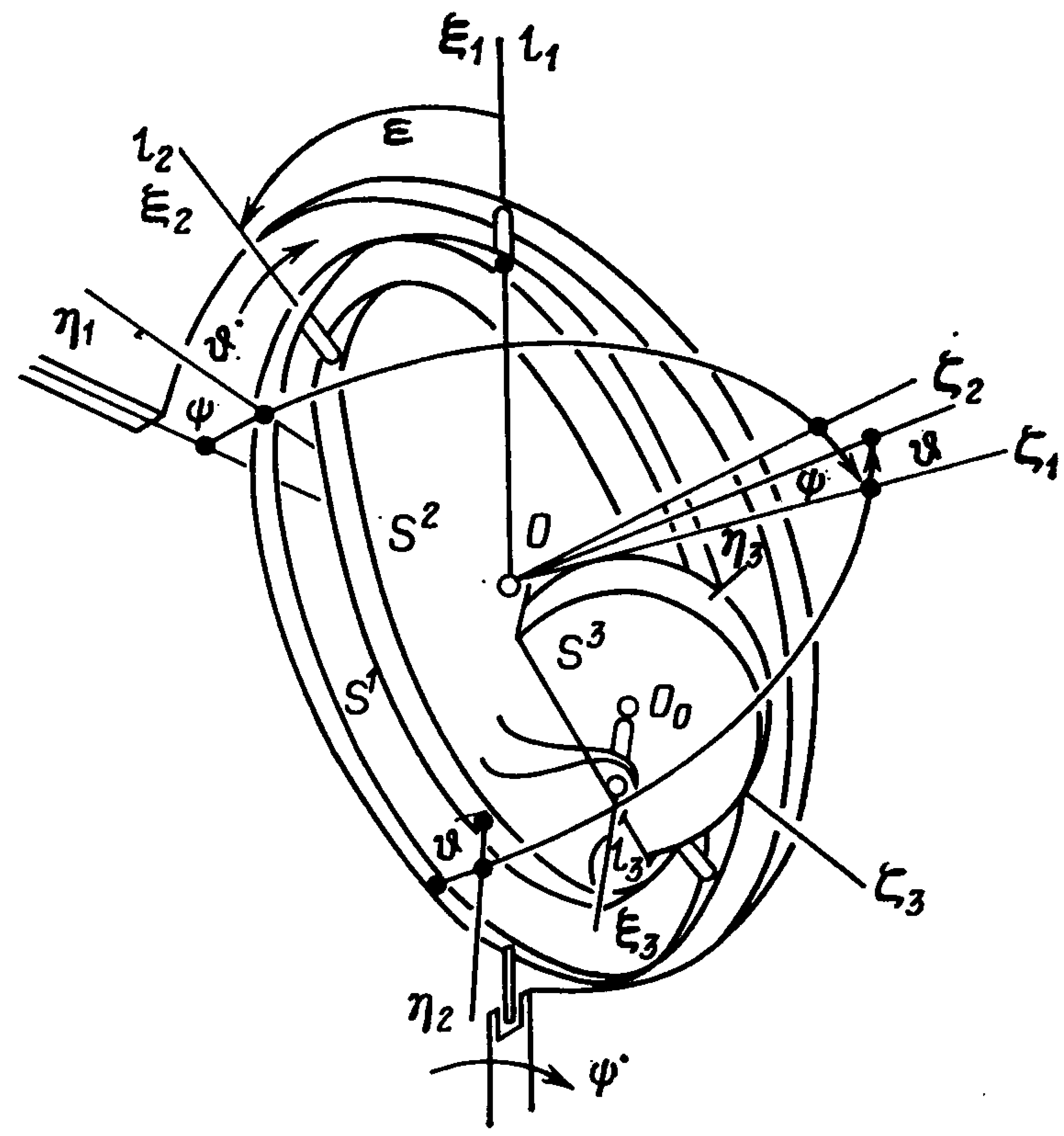
Система (2.5) является системой общего вида. Ее размерность определяется только числом позиционных координат.

Предположим, что степень неустойчивости l не превышает числа псевдоциклических координат $(n - r)$. Тогда можно попытаться выбрать матрицу M такой, чтобы матрица Q_*W стала симметричной и положительно-определенной. Затем, за счет выбора матрицы L, сделать положительно-определенной симметричную часть матрицы из коэффициентов при $x^{\cdot}$ в уравнении (2.5). Подобранные таким образом матрицы M и L решат задачу построения стабилизирующих воздействий [4].

3. Проиллюстрируем изложенное выше на задаче о стабилизации тривиальных установившихся движений тяжелого гироскопа в кардановом подвесе с направленным нарушением симметрии и вертикальной осью вращения внешнего кольца.

Результаты исследования стационарных движений совершенного гироскопа можно найти в ряде работ ([3, 5] и др.). Под совершенным гироскопом понимается гироскоп, ось внутреннего кольца которого ортогональна как оси внешнего кольца, так и оси ротора, причем все эти оси пересекаются в одной точке и каждая из них является главной осью инерции соответствующего тела.

Рассмотрим систему, состоящую из трех твердых тел: S^1 — внешнее кольцо, S^2 — внутреннее кольцо и S^3 — ротор, помещенный в поле силы тяжести (фигура). Тело S^1 связано с неподвижным основанием при помощи цилиндрического шарнира с осью l^1, имеющей направление силы тяжести, тела S^1 и S^2 связаны между собой цилиндрическим шарниром с осью l^2, пересекающей ось l^1 в точке O. Предположим, что ось ротора l^3 фиксирована в теле и распределение масс ротора симметрично относительно оси. Центр масс ротора обозначим через O_0.



Выберем подвижные системы координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ и $O_0\xi_3\eta_3\zeta_3$. Оси $O\xi_1$, $O\xi_2$, $O_0\xi_3$ совпадают соответственно с l^1, l^2, l^3. Плоскость $O\xi_1\eta_1$ содержит ось $O\xi_2$. Угол между $O\xi_1$ и $O\xi_2$ обозначим через ε ($0 < \varepsilon < \pi$); λ, μ, ν — направляющие косинусы оси ротора l^3 в системе $\xi_2\eta_2\zeta_2$.

Положение системы тел в пространстве определим углами Эйлера: ψ — угол поворота внешнего кольца, угол прецессии, ϑ — угол поворота внутреннего кольца относительно внешнего, угол нутации, φ — угол поворота ротора вокруг оси l^3 относительно внутреннего кольца подвеса. Будем считать, что $\vartheta = 0$, когда ось l^3 принадлежит плоскости, параллельной l^1 и l^2 ($0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$).

Введем обозначения: J — момент инерции внешнего кольца относительно оси l^1

$$I = \begin{Vmatrix} A_2 & -G_2 & -R_2 \\ -G_2 & B_2 & -E_2 \\ -R_2 & -E_2 & C_2 \end{Vmatrix}$$

— тензор инерции внутреннего кольца в осях $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, A_0 — осевой, B_0 — экваториальный моменты инерции ротора для точки O_0, m_2, m_3 — массы внутреннего кольца, ротора, x_1, y_1, z_1 — координаты центра масс ротора O_0 и x_2, y_2, z_2 — координаты общего центра масс внутреннего кольца и ротора в системе $O\xi_2\eta_2\zeta_2$.

Пусть параметры гироскопа удовлетворяют следующим условиям:

$\nu = 0$ (ось ротора l^3 параллельна плоскости $O\xi_2\eta_2$, связанной с внутренним кольцом);

$z_2 = 0$ (общий центр масс внутреннего кольца и ротора находится в плоскости $O\xi_2\eta_2$);

распределение масс в телах таково, что выполняются равенства

$$E_2 + m_3y_1z_1 = 0, \qquad R_2 + m_3z_1x_1 = 0$$

Обобщенная сила, соответствующая позиционной координате ϑ, представляет собой сумму момента силы тяжести с силовой функцией U и диссипативной силы $d\vartheta^{\cdot}$.

Управляющими силами служат воздействия момента F_1 двигателя, вращающего внешнее кольцо подвеса, и F_2 — момент двигателя, установленного на внутреннем кольце и приводящего во вращение ротор гироскопа.

При этих предположениях кинетическая энергия и силовая функция рассматриваемой механической системы имеют вид [6, 7]

$$T = {}^1/_2\,[a\vartheta^{\cdot 2} + 2\,(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)\,\vartheta^{\cdot} + b_{11}\omega_1{}^2 + 2b_{12}\omega_1\omega_2 + b_{22}\omega_2{}^2]$$

$$\psi^{\cdot} = \omega_1, \quad \varphi^{\cdot} = \omega_2; \qquad U = (m_2 + m_3)\,gy_2 \sin\varepsilon \cos\vartheta$$

$$a = A_2 + B_0 + (A_0 - B_0)\lambda^2 + (y_1^2 + z_1^2) m_3$$

$$c_1 = [A_2 + B_0 + (A_0 - B_0)\lambda^2 + m_3 (y_1^2 + z_1^2)]\cos\varepsilon + [G_2 + (B_0 - A_0)\lambda\mu + m_3 x_1 y_1]\sin\varepsilon\cos\vartheta, \quad c_2 = A_0\lambda$$

$$b_{11} = J + [A_2 + B_0 + (A_0 - B_0)\lambda^2 + m_3 (y_1^2 + z_1^2)]\cos^2\varepsilon + {}^1/_2 [B_2 + C_2 + 2B_0 + (A_0 - B_0)\mu^2 + m_3 (z_1^2 + 2x_1^2 + y_1^2)]\sin^2\varepsilon + [G_2 + (B_0 - A_0)\lambda\mu + m_3 x_1 y_1]\sin 2\varepsilon\cos\vartheta + {}^1/_2 [B_2 - C_2 + (A_0 - B_0)\mu^2 + m_3 (z_1^2 - y_1^2)]\sin^2\varepsilon\cos 2\vartheta$$

$$b_{12} = A_0\lambda\cos\varepsilon - A_0\mu\sin\varepsilon\cos\vartheta, \quad b_{22} = A_0$$

Можно проверить, что условия (1.2) выполняются при $\sin\vartheta = 0$.

Таким образом, среди установившихся движений гироскопа существуют тривиальные: $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$. Отметим, что в отличие от традиционного случая [3] ротор гироскопа совершает в тривиальном движении регулярную прецессию (угол между неподвижной осью l^1 и осью ротора отличен от нуля), причем угловые скорости прецессии ω_1 и собственного вращения ω_2 могут быть произвольными.

Ограничимся исследованием движения $\vartheta = 0$, $\omega_1 = \text{const}$, $\omega_2 = \text{const}$. Уравнения в отклонениях (2.1), (2.2) имеют вид

$$ax^{\cdot\cdot} + c_1\eta_1^{\cdot} + c_2\eta_2^{\cdot} + dx^{\cdot} + Wx = 0$$

$$c_1 x^{\cdot\cdot} + b_{11}\eta_1^{\cdot} + b_{12}\eta_2^{\cdot} = K_1\eta_1 + K_2\eta_2 + N_1 x^{\cdot} + P_1 x$$

$$c_2 x^{\cdot\cdot} + b_{12}\eta_1^{\cdot} + b_{22}\eta_2^{\cdot} = K_3\eta_1 + K_4\eta_2 + N_2 x^{\cdot} + P_2 x$$

$$W = {}^1/_2 \{[G_2 + (B_0 - A_0)\lambda\mu + m_3 x_1 y_1]\sin 2\varepsilon + 2[B_2 - C_2 + (A_0 - B_0)\mu^2 + m_3 (z_1^2 - y_1^2)]\sin^2\varepsilon\}\omega_1^2 - A_0\mu\sin\varepsilon\omega_1\omega_2 + (m_2 + m_3) g y_2 \sin\varepsilon$$

Здесь K_1, K_2, K_3, K_4, N_1, N_2, P_1, P_2 — коэффициенты управляющих сил F_1, F_2.

Рассмотрим случай $W < 0$. Он имеет место, в частности, при $\omega_1 = \omega_2 = 0$ и $y_2 < 0$, когда гироскоп находится в таком равновесии, что его центр тяжести расположен выше точки подвеса. Без управляющих воздействий это равновесие неустойчиво.

Уравнение (2.5) в этом случае имеет вид

$$x^{\cdot\cdot} + (\Delta_1/\Delta)\, x^{\cdot} + (W/\Delta)\, x = 0$$

$$\Delta_1 = d - c_1 L_1 - c_2 L_2, \quad \Delta = a - c_1 M_1 - c_2 M_2$$

Очевидно, что для стабилизации достаточно выбрать коэффициенты L_1, L_2, M_1, M_2 матриц L, M такими, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 < 0$, $\Delta < 0$.

Коэффициенты матриц управляющих сил вычисляются по формулам (2.6).

Поскольку рассматриваемая механическая система имеет только одну позиционную координату и две псевдоциклических, то существует некоторый произвол в выборе L_1, L_2, M_1, M_2. В частности, эти коэффициенты могут быть выбраны такими, что управляющие воздействия не будут зависеть либо от позиционной координаты, либо от позиционной скорости.

Таким образом, свойство гироскопической связанности доставляет качественно новые возможности в задаче о стабилизации установившихся движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 966—976.
2. *Лилов Л. К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 977—985.
3. *Самсонов В. А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 512—520.
4. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 374—378.
6. *Коносевич Б. И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 9. Киев: Наук. думка, 1977, с. 61—73.
7. *Харламов М. П.* Фазовая топология одной задачи о движении гироскопа.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 13. Киев: Наук. думка, 1981, с. 14—23.

Москва

Поступила в редакцию 23.II.1984