Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

УДК 531.36

ПОСТРОЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Меликян А. А., Соколов Б. Н.

Рассматривается одно из особых многообразий, часто встречающихся в задачах оптимального управления и дифференциальных игр,— универсальная гиперповерхность (магистраль) [1]. Предлагаемая в работе теория этой поверхности включает в себя некоторую задачу Коши и необходимое условие оптимальности поверхности; последнее позволяет свести построение поверхности к задаче Коши. Даны формулировка задачи и достаточные условия ее разрешимости. Доказано, что необходимым условием оптимальности универсальной гиперповерхности является дважды гладкость на ней функции оптимального результата. Сформулированы достаточные условия существования в малом универсальной гиперповерхности. Статья продолжает исследования [2—4] по изучению особых многообразий в экстремальных задачах динамики и примыкает по тематике к работам [5—9].

Универсальное многообразие в фазовом пространстве экстремальной задачи состоит из (особых) оптимальных движений, причем оптимальные движения из окрестности этого многообразия попадают на него (под углом или с касанием). Универсальная гиперповерхность является поверхностью разрыва позиционного [5] оптимального управления [1]. Функция оптимального результата, непрерывная в окрестности универсального многообразия, оказывается гладкой на ней [8], что вытекает из геометрии траекторий. В случае гиперповерхности оказалось, что из семейства геометрически допустимых поверхностей оптимальна та из них, на которой функция оптимального результата дважды гладкая. Это один из результатов данной работы, которая в известной мере решает проблему, сформулированную в [1], с. 213.

При использовании попятной процедуры в простейшем варианте [1] указанием наличия в задаче универсальной поверхности служит появление области, не заполненной характеристиками. Поэтому при построении универсальной гиперповерхности функция оптимального результата должна строиться одновременно с поверхностью и по обе ее стороны. Это определяет специфику математической задачи, возникающей при построении поверхности. Следует упомянуть также, что в связи с разрывностью оптимального позиционного [7] управления на особом многообразии функция минимума (минимакса для игровых задач), при помощи которой записывается уравнение [1, 7], является разрывной.

Таким образом, особенность типа универсальной гиперповерхности не связана с разрывом функции оптимального результата и ее первых двух производных. Однако процедура ее построения оказывается сходной с процедурой построения слабого разрыва [3, 4], т. е. многообразия разрыва градиента функции оптимального результата.

2. Постановка задачи Коши. Пусть две скалярные функции $u_0\ (x)$, $u_1\ (x)$, $x \in R^n$ класса $C^m\ (\Gamma_0)$ имеют на некоторой гиперповерхности $\Gamma_1 \subset \Gamma_0 \subset R^n$ равные значения всех частных производных по компонентам вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ до порядка m включительно (здесь Γ_0 — окрестность некоторой фиксированной точки в R^n). Будем говорить, что пара функций (u_0, u_1) m раз гладко сопрягается на Γ_1, и обозначать это включением $(u_0, u_1) \in K^m\ (\Gamma_1)$, т. е. $K^m\ (\Gamma_1)$ — множество всех пар функций класса $C^m\ (\Gamma_0)$, удовлетворяющих приведенным выше условиям.

Пусть заданы гладкое многообразие Γ_2, $\dim \Gamma_2 = n - 2$, $\Gamma_2 \subset \Gamma_0$ и дважды гладкие функции $v\ (x) \in C^2\ (\Gamma_0)$, $F_0\ (z)$, $F_1\ (z)$, $z = (x,\ p,\ u) \in R^{2n+1}$. Считаем фиксированной точку $x^* \in \Gamma_2$, окрестность которой обозначена через Γ_0.

Задача 1. Найти гладкое могообразие Γ_1, $\dim \Gamma_1 = n - 1$ и пару функций $(u_0(x), u_1(x)) \in K^2(\Gamma_1)$, удовлетворяющих условиям: 1) $\Gamma_2 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0$; 2) $u_0(x) = u_1(x) = v(x)$, $x \in \Gamma_2$; 3) $F_i(x, u_{ix}, u_i) = 0$, $x \in \Gamma_0$, $i = 0, 1$.

Условия разрешимости этой задачи и процедура построения ее решения даны в п. 2.

2. Достаточные условия разрешимости. Градиент $p = u_{0x} = u_{1x}$ искомых в задаче 1 функций $u_i(x)$, $i = 0, 1$ удовлетворяет при $x = \Gamma_2$ системе уравнений

(2.1) $$(p - v_x, \ y_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-2, \quad F_i(x, \ p, \ v) = 0$$
$$i = 1, 2, \quad x \in \Gamma_2$$

где $y_j = y_j(x)$ — некоторый базис касательного к Γ_2 пространства в точке x.

Теорема 1. Пусть функции F_0, F_1 трижды гладкие и выполнены условия: 1) вектор p^* — решение системы (2.1) в точке x^*; 2) векторы $y_1, \ldots, y_{n-2}$, F_{0p}, F_{1p} линейно независимы в R^n при $x = x^*$, $p = p^*$, $v = v(x^*)$; 3) справедливы неравенства $\{\{F_0, F_1\}, F_0\} \neq 0$, $\{F_1, \{F_0, F_1\}\} \neq 0$ в точке (x^*, p^*, v^*); 4) выполнено равенство $\{F_0, F_1\} = 0$ для $p = w(x)$, $x \in \Gamma_2$. Тогда для каждого p^* существует единственное решение u_0, u_1, Γ_1 задачи 1. Поверхность Γ_1 состоит из x-компонент решений системы уравнений с условиями Коши

(2.2) $$\dot{x} = \{\{F_0, F_1\}, F_0\}F_{1p} + \{F_1, \{F_0, F_1\}\}F_{0p}$$
$$\dot{p} = -\{\{F_0, F_1\}, F_0\}(F_{1x} + pF_{1u}) - \{F_1, \{F_0, F_1\}\}(F_{0x} + pF_{0u}), \quad \dot{u} = (p, \dot{x})$$
$$x(0) = x^\circ, \ p(0) = w(x^\circ), \ u(0) = v(x^\circ), \ x^\circ \in \Gamma_2$$
$$\{F_0, F_1\} = \{F_{0x} + pF_{0u}, \ F_{1p}) - (F_{1x} + pF_{1u}, \ F_{0p})$$

где $p = w(x)$, $x \in \Gamma_2$ — гладкое решение системы (2.1), $\{F_0, F_1\}$ — скобка Якоби функций F_0, F_1 [10].

Сформулируем утверждения, используемые при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. Пусть пара функций $u, v \in C_2(\Gamma_0)$ гладко сопрягается на многообразии Γ_1, $(u, v) \in K^1(\Gamma_1)$, где

(2.3) $$\Gamma_1\colon x_1 = 0$$

Для того чтобы имело место дважды гладкое сопряжение, $(u, v) \in K^2(\Gamma_1)$, необходимо и достаточно выполнения в точках Γ_1 равенства

(2.4) $$u_{11} = v_{11}, \quad x \in \Gamma_1$$

Здесь и ниже элемент матрицы Гесса обозначается как $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$.

Доказательство. Необходимость равенства (2.4) очевидна. По условию леммы $\partial u/\partial x_i = \partial v/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$ при $x \in \Gamma_1$. Продифференцируем эти равенства по $x_2, \ldots, x_n$, т. е. по касательным к Γ_1 направлениям. Получим: $u_{ij} = v_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 2, \ldots, n$. Эти равенства вместе с (2.4) составляют требуемое условие дважды гладкого сопряжения.

Лемма 2. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ в дополнение к условиям леммы 1 удовлетворяют уравнениям: $F(x, u_x, u) = 0$, $G(x, v_x, v) = 0$, $x \in \Gamma_0$, $F(z)$, $G(z) \in C^2$, $z = (x, p, u)$. Тогда в точках поверхности Γ_1 справедливо равенство

(2.5) $$\{F, G\} + F_{p_1}G_{p_1}(u_{11} - v_{11}) = 0, \quad x \in \Gamma_1$$

Доказательство. Продифференцируем тождества $F(x, u_x, u) = 0$, $G(x, v_x, v) = 0$ по x_i, $i = 1, \ldots, n$. Получим

$$F_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{p_j} u_{ji} + F_u p_i = 0 \quad (p = u_x)$$

$$G_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} G_{q_j} v_{ji} + G_u q_i = 0 \quad (q = v_x)$$

Почленно умножим первое равенство на G_{q_i}, а второе — на F_{p_i} и вычтем второе из первого. Сложив затем полученные n разностей, отнесенных к точке $x \in \Gamma_1$, и учтя, что $q = p$, $u_{ij} = v_{ij}$ при $i \cdot j > 1$, $x \in \Gamma_1$, придем к формуле (2.5).

Следствие. Для всякого решения задачи 1

$$\{F_0, F_1\} = 0 \quad \text{при} \quad p = u_{ix}(x), \quad x \in \Gamma_1$$

Лемма 3. Пусть функции $u, v \in C^2(\Gamma_0)$ удовлетворяют условиям: 1) $F(x, u_x, u) = 0$, $G(x, v_x, v) = 0$, $x \in \Gamma_0$, $F, G \in C^2$; 2) $(u, v) \in K^1(\Gamma_1)$, где Γ_1 — дважды гладкая гиперповерхность; 3) x — компоненты характеристик уравнений $F = 0$, $G = 0$, т. е. векторы F_p, G_p не касаются поверхности Γ_1. Условие $(u, v) \in K^2(\Gamma_1)$ выполнено тогда и только тогда, когда $\{F, G\} = 0$ при $p = u_x = v_x$, $u = v$, $x \in \Gamma_1$.

Доказательство. Дважды гладкой заменой переменных $x = \varphi(\xi)$, $\xi \in R^n$ поверхность Γ_1 приводится к виду $\xi_1 = 0$, т. е. (2.3). В пространстве (x, p, u) замена $x = \varphi(\xi)$ порождает точечное контактное преобразование, сохраняющее скобки Якоби [10]. В силу невырожденности якобиана, $\det \| \partial\varphi/\partial\xi \| \neq 0$, условие некасания к поверхности Γ_1 в новых переменных сохраняется. Утверждение леммы 3 следует тогда из формулы (2.5).

Отметим, что утверждение леммы 3 справедливо и для поверхности Γ_1 класса C^1. Для обоснования этого требуется переформулировать леммы 1 и 2 на случай произвольной гладкой поверхности Γ_1. Выше было отдано предпочтение частному виду (2.3) из-за простоты выкладок.

Доказательство теоремы 1. Существование гладкого решения $p = w(x)$, $x \in \Gamma_2$ системы (2.1) обеспечивается условием 2) и теоремой о неявной функции.

Установим существование решения задачи 1. Положим $F_{-1}(z) \equiv \{F_0, F_1\}$ и рассмотрим гамильтониан [2, 4] $H(z) = \lambda_1 F_1 + \lambda_0 F_0 + \lambda_{-1} F_{-1}$ при $\lambda_1 = \{\{F_0, F_1\}, F_0\}$, $\lambda_0 = \{F_1, \{F_0, F_1\}\}$, $\lambda_{-1} = F_{-1}$.

Уравнения (2.2) представляют собой характеристическую систему

$$x^{\cdot} = H_p, \quad p^{\cdot} = -H_x - pH_u, \quad u^{\cdot} = (p, H_p)$$

рассматриваемую на своем инвариантном многообразии

$$W = \{z \in R^{2n+1}: F_0(z) = 0, \; F_1(z) = 0, \; F_{-1}(z) = 0\}$$

Система (2.2) удовлетворяет стандартным условиям существования, единственности решения и гладкой зависимости его от начальных данных [11, 12].

Условия 2) и 3) теоремы обеспечивают трансверсальность вектора $H_p(z^*)$ многообразию Γ_2. Поэтому x-компоненты решений системы (2.2) определяют гладкое многообразие $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$. На Γ_1 оказываются заданными условия Коши для двух уравнений $F_i = 0$, $i = 0, 1$. В силу условий 2), 3) векторы F_{0p}, F_{1p} оказываются трансверсальными к поверхности Γ_1, поэтому существуют [12] решения $u_i(x) \in C^2(\Gamma_0)$ этих уравнений. По построению $\{F_0, F_1\} = 0$ на Γ_1, поэтому совокупность $\{u_0, u_1, \Gamma_1$ — решение задачи 1. Для любого другого решения задачи 1 в силу леммы 3 выполнено $\{F_0, F_1\} = 0$ на Γ_1.

Из условия 3) следует, что градиент g_x функции $g(x) = \{F_0, F_1\}$ при $p = u_{ix}(x)$ отличен от нуля. Прямым вычислением убеждаемся, что вектор $x^{\cdot}$ вида (2.2) касается Γ_2, т. е. $(g_x, x^{\cdot}) = 0$, $x \in \Gamma_1$, и производная $p^{\cdot}$ вектора $p(x)$ по направлению $x^{\cdot}$ определяется формулой (2.2). Система (2.2) удовлетворяет стандартным условиям существования и единственности решения, откуда и следует единственность Γ_1. Функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ также являются единственными решениями соответствующих задач Коши. Теорема доказана.

Отметим, что вместо вектора p^* в условии 1) теоремы 1 можно считать заранее заданным на многообразии Γ_2 класса C^1 поле вектора $p = w(x)$ и функцию $v(x)$, согласованные соотношениями (2.1), как это делается в теории уравнений в частных производных первого порядка [12].

3. Построение универсального многообразия. Используем результаты пп. 1.2 для локального построения особой универсальной поверхности в задаче синтеза для динамической управляемой системы вида

$$(3.1) \qquad x^{\cdot} = f(x, w); \quad w \in W; \quad x, f \in R^n$$

где $W \subset R^m$ — замкнутое ограниченное множество. Будем рассматривать задачу оптимального быстродействия из произвольной начальной точки $x \notin M$ на терминальное многообразие $M \in R^n$.

Стандартными приемами к этой задаче могут быть сведены и некоторые другие задачи оптимального управления [1, 5]. Отметим также, что рассматриваемая ниже универсальная поверхность встречается в задачах как оптимального управления, так и теории дифференциальных игр. В последнем случае система вида (3.1) может быть получена после подстановки в уравнения движения игровой задачи непрерывного позиционного [7] управления одного из игроков.

Опишем предположения и ограничения, в рамках которых рассматривается задача быстродействия для системы (3.1). Ограничимся открытой окрестностью $\Gamma_0 \subset R^n$ некоторой фиксированной точки $x^* \in R^n$. Пусть в Γ_0 существует $(n-1)$-мерная гладкая универсальная поверхность Γ_1, к которой оптимальные траектории подходят с обеих сторон без касания. Поверхность Γ_1 делит окрестность Γ_0 на две открытые области $D_i : \Gamma_0 = D_0 + \Gamma_1 + D_1$. Вместо указания области D_i или Γ_0 иногда будем использовать выражения «i-я сторона от поверхности» или «окрестность Γ_1». Полагаем $x^* \in \Gamma_1$.

Обозначим через $u_i(x)$, $x \in D_i$ функцию оптимального результата по i-ю сторону от Γ_1, $i = 0, 1$. По предположению $u_i(x) \in C^2(D_i)$, функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ гладко сопрягаются на поверхности Γ_1 [8]. В областях D_i функции $u_i(x)$ удовлетворяют основному уравнению [1, 5, 7]

$$F_i(x, u_{ix}(x)) = \min_{w \in W}(u_{ix}, f(x, w)) + 1 = (u_{ix}(x), f^i(x)) + 1 = 0, \quad x \in D_i \tag{3.2}$$

Соотношение (3.2) написано в предположении (которое считаем выполненным), что множество $f(x, W)$ выпуклое. Функции $f^i(x)$ получены подстановкой в правую часть (3.1) экстремального значения $w_i(x) = \psi_i(x, u_{ix}(x))$, доставляющего минимум в (3.2). Будем предполагать, что $w_i(x)$, $x \in D_i$ — единственные точки минимума. Величины $w = \psi_i(x, p)$ доставляют минимум $\min_w(p, f(x, w))$, $w \in W$ при $p = u_{ix}$. Будем считать, что зависимости $\psi_i(x, p)$ определены в окрестности точки $(x^*, p^*) \in R^{2n}$, причем $\psi_i \in W$, а функции

$$F_i(x, p) = (p, f(x, \psi_i(x, p))) + 1 \tag{3.3}$$

дважды гладкие в окрестности точки (x^*, p^*), где $p^* = u_{0x}(x^*) = u_{1x}(x^*)$. Отметим, что, вообще говоря, не для всех точек (x, p) из этой окрестности величины $\psi_i(x, p)$ имеют смысл экстремального вектора; это имеет место для (x, p), где $p = u_{ix}$, $x \in D_i$.

Таким образом, ограничения на динамическую систему (3.1) сформулированы через посредство функций F_i, ψ_i. Их свойства позволяют доопределить функции $u_i(x)$ во всей окрестности Γ_0 как дважды гладкие решения уравнений $F_i(x, u_{ix}) = 0$, $i = 0{,}1$ с условиями Коши на Γ_1, так как для универсальной поверхности без касания оказываются выполненными классические достаточные условия существования и единственности решений этих уравнений [12]. Тогда в Γ_0 оказываются определенными два гладких поля $f^i(x) = F_{ip}(x, u_{ix}(x))$, $i = 0, 1$, которые для $x \in D_i$ имеют смысл оптимального поля скоростей в рассматриваемой экстремальной задаче.

Оптимальная фазовая скорость на поверхности Γ_1 задается равенством

$$\dot{x} = \mu(x) f^0(x) + (1 - \mu(x)) f^1(x), \quad 0 < \mu < 1 \tag{3.4}$$

где скаляр $\mu(x)$ находится из условия касания вектора (3.4) поверхности Γ_1; зависимость $\mu = \mu(x)$, $x \in \Gamma_1$ — гладкая. Неравенства в (3.4) следуют из предположений о геометрии оптимальных траекторий в окрестности Γ_1. Из (3.2) и равенства $u_{0x} = u_{1x}$ при $x \in \Gamma_1$ следует, что производные функций u_{ix} по направлению (3.4) равны -1, т. е. интегральные линии поля (3.4) являются оптимальными (особыми) движениями.

Поскольку вектограмма $f(x, W)$ выпукла, то найдется вектор $w^*(x) \in W$, такой, что правая часть в (3.4) равна $f(x, w^*(x))$, $x \in \Gamma_1$. Фазовая скорость (3.4) соответствует форме скользящего режима, при котором скорости $f^0(x)$ и $f^1(x)$ используются с весами $\mu(x)$ и $1 - \mu(x)$. Традиционный подход при исследовании особых движений состоит в отыскании особого управления как функции времени [6]. В данной работе движение по особому многообразию конструируется в форме скользящего режима с помощью оптимальных управлений в областях D_i. Управляющие параметры на поверхности Γ_1 не фигурируют в рассмотрениях.

Особое оптимальное управление может быть восстановлено после решения задачи как результирующее управление скользящего режима.

Основной результат — необходимое условие оптимальности,— позволяющий использовать построения пп. 1, 2, сформулирован ниже для дважды гладкой поверхности Γ_1, что упрощает доказательство. Некоторым его усложнением этот результат можно установить и для гладкой поверхности.

Лемма 4. Пусть Γ_1 — универсальная поверхность класса C^2, для которой выполнено: 1) $0 < \mu(x) < 1$, $x \in \Gamma_1$; 2) F_i, $u_i \in C^2$, $i = 0, 1$. Тогда u_0, u_1 дважды гладко сопрягаются на Γ_1, т. е. $(u_0, u_1) \in K^2(\Gamma_1)$.

Доказательство. Дважды гладкой заменой переменных, сохраняющей свойства гладкости функций $u_i(x)$, поверхность Γ_1 можно привести к виду (2.3). Поэтому, не ограничивая общности, считаем Γ_1 заданной равенством $x_1 = 0$. В силу леммы 1 здесь достаточно показать, что

$$\partial^2 u_0/\partial x_1^2 = \partial^2 u_1/\partial x_1^2, \qquad x \in \Gamma_1 \tag{3.5}$$

Гладкая функция $\mu(x)$ в (3.4) определена только на Γ_1. Равенством $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(0, x_2, \ldots, x_n)$ она гладко доопределяется во всем Γ_0. Рассмотрим гладкое поле $f^*(x) = \mu(x) f^0(x) + (1 - \mu(x)) f^1(x)$ и производные функции $u_i(x)$ по направлению этого поля $h_i(x) = (u_{ix}(x), f^*(x))$, $x \in \Gamma_0$. По построению, $h_i(x) = -1$ при $x \in \Gamma_1$. С использованием равенств, полученных дифференцированием тождества (уравнений Беллмана) $(u_{ix}(x), f^i(x)) + 1 = 0$, можно вывести следующие формулы для частных производных $\partial h_i/\partial x_1$ для $x \in \Gamma_1$:

$$\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_1} = (-1)^i \mu_i f_1^{1-i} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right), \quad x \in \Gamma_1, \quad i = 0,1 \tag{3.6}$$

Здесь $\mu_0 = \mu$, $\mu_1 = 1 - \mu$; f_1^j — первая компонента вектора $f^j(x)$. Отметим, что в силу предположений о геометрии траекторий f_1^0 и f_1^1 отличны от нуля и имеют разные знаки. Если теперь допустить, что (3.5) не имеет места, то из (3.6) следует одно из неравенств $\partial h_1/\partial x_1 < 0$, $\partial h_0/\partial x_1 > 0$, $x_* \in \Gamma_0$. Это означает, что в достаточно близкой к Γ_1 точке $x_* \in \Gamma_0$ выполнено $h_i(x_*) < 1$ для одного из индексов $i = 0, 1$, что противоречит условиям (3.2).

Итак, если в задаче быстродействия для системы (3.1) локально существует гладкая универсальная поверхность Γ_1, для которой $u_i(x)$, $F_i(x, p) \in C^2$, то $(u_0, u_1) \in K^2(\Gamma_1)$. Иными словами, совокупность u_0, u_1, Γ_1 — решение задачи 1 при подходящих данных Коши. Из второй части доказательства теоремы 1 следует, что вектор $x^{\cdot}$ вида (2.2), построенный по данным задачи u_i, F_i, касается поверхности Γ_1. Более того, он оказывается коллинеарным оптимальной фазовой скорости (3.4) на Γ_1.

Действительно, векторы $\dot{x}$ в (2.2) и в (3.4) являются касательными к Γ_1 векторами из выпуклой оболочки векторов $F_{0p} = f^\circ(x)$ и $F_{1p} = f^1(x)$. Следовательно, оба вектора $\dot{x}$ коллинеарны и коэффициенты при F_{ip} пропорциональны, т. е.

$$\mu(1-\mu)^{-1} = \{F_1, \{F_0, F_1\}\}\{\{F_0, F_1\}, F_0\}^{-1} \tag{3.7}$$

В (3.4) точка у x означает дифференцирование по времени, а в (2.2) — по некоторому вспомогательному параметру, отличающемуся на скалярный множитель. Первое уравнение системы (2.2) будет определять скользящий режим, если заменой параметра дифференцирования сделать сумму множителей при F_{0p} и F_{1p} равной единице. Из (3.7) следует, что в случае универсальной поверхности знаки у скобок $\{\{F_0, F_1\}, F_0\}$ и $\{F_1, \{F_0, F_1\}\}$ одинаковы. Этот факт, как и равенство $\{F_0, F_1\} = 0$, $x \in \Gamma_2$, является необходимым условием наличия универсальной поверхности. Оба эти условия вычислениями на Γ_2 могут быть использованы для предварительной проверки существования поверхности данного типа.

Подытожим приведенные рассуждения в виде следующих необходимых условий.

Лемма 5. Пусть в задаче быстродействия для системы (3.1) существует в малом гладкая универсальная поверхность Γ_1, для которой $u_i(x)$, $F_i(x, p) \in C^2$. Тогда величины x и $p = u_{ix}$ на особых движениях по Γ_1 с точностью до параметра дифференцирования удовлетворяют системе (2.2).

Подчеркнем, что в задаче управления функции F_1 не зависят от u_i, что несколько упрощает систему (2.2).

Усилив требования гладкости к функциям $F_i(x, p)$ при подходящих начальных условиях, можно сформулировать достаточные условия существования в малом универсальной поверхности.

Пусть в фазовом пространстве системы (3.1) рассматриваемая точка x^* принадлежит некоторой гладкой гиперповерхности M, которая гладким $(n-2)$-мерным многообразием Γ_2 $x^* \in \Gamma_2$ разбивается на две полуповерхности M_0, M_1, так, что $M = M_0 + \Gamma_2 + M_1$. Пусть на M заданы значения $v(x)$ времени оптимального быстродействия $u(x)$ и гладкое поле его градиента $u_x = r(x)$, $x \in M$, такие, что $F_i(x, r(x)) = 0$, $x \in M_i$, $i = 0, 1$. Величины v, r на M могут быть найдены в результате неполного решения задачи синтеза оптимального быстродействия для системы (3.1); в частности, поверхность M может быть участком терминального многообразия, а величины v, r — начальными данными для попятных построений. Пусть $l = l(x)$ — нормаль к поверхности M в точке $x \in M$, ориентированная в сторону попятного движения, т. е. $(F_{ip}, l) < 0$ при $p = r(x)$, $x \in M_i$, $i = 0, 1$. Через Γ_0^+ обозначим ту полуокрестность точки x^*, отсекаемую поверхностью M, куда направлена нормаль $l(x^*)$. Напомним, что зависимости $F_i(x, p)$ определены в п. 3.

Теорема 2. Пусть функции (3.3) для системы (3.1) трижды гладкие, $F_i(x, p) \in C^3$, $i = 0, 1$, а на поверхности M для значений $p = r(x)$ выполнены условия

1) $\{F_0, F_1\} = 0$, $x \in \Gamma_2$, $\sigma(-1)^i\ \{F_0, F_1\} < 0$, $x \in M_i$, $i = 0,1$;

2) $\{\{F_0, F_1\}, F_0\}\{F_1, \{F_0, F_1\}\} > 0$, $x \in \Gamma_2$, $\sigma = \operatorname{sgn}\{\{F_0, F_1\}, F_0\}$;

3) $(F_{ip}, l) < 0$, $F_i(x, p) = 0$, $w_i(x) = \psi_i(x, r(x))$, $x \in M_i$, $i = 0, 1$.

Тогда в области Γ_0^+ существуют гладкие функции оптимального результата $u(x)$, $u(x) = v(x)$ при $x \in M$ и универсальная гиперповерхность Γ_1 с краем Γ_2.

Схема доказательства. Поясним сначала условия теоремы. Условие 1) означает, что величина $\{F_0, F_1\}$ имеет на M разные знаки по разные стороны от Γ_2. Двойные скобки Пуассона в условии 2) должны иметь один и тот же знак на Γ_2, согласованный со знаком $\{F_0, F_1\}$ на M_i. Условия 1) и 2) обеспечивают характерное расхождение оптимальных траекторий, выпущенных попятно из точек M, в результате которого остается свободной от траекторий клинообразная область, зарождающаяся на Γ_2. Эта область заполняется затем траекториями, исходящими (попятно) из универсальной поверхности.

Поверхность Γ_1, существование которой гарантируется теоремой 1, делит полуокрестность Γ_0^+ на две части (в силу условий 2), 3)). По i-ю сторону от Γ_1, в которой лежит полуповерхность M_i, рассмотрим задачу Коши для уравнения $F_i(x, p) = 0$ с граничными условиями на кусочно-гладкой поверхности $M_i + \Gamma_2 + \Gamma_1$, $i = 0, 1$. Решения $u_i(x)$ этих задач можно построить методом характеристик, выпускаемых из Γ_1, Γ_2 и M_i. Возможность сопряжения функций, определяемых характеристиками, идущими из Γ_1 и M_i, а также требуемое направление движения вдоль них (выход в прямом времени оптимальных движений на Γ_1 и M_i) обеспечивается условиями 1) — 3). Таким образом окажется построенной гладкая функция $u(x)$, равная $u_i(x)$ по i-ю сторону от Γ_1 и удовлетворяющая уравнению Беллмана (3.2) с граничным условием $u(x) = v(x)$, $x \in M$. Аналогично обоснованию теоремы 3.15 в книге [13] устанавливается, что функция $u(x)$, $x \in \Gamma_0^+$ равна времени оптимального быстродействия из точки x на множество M.

Отметим в заключение, что вопрос о дважды гладкости $u(x)$ упирается в степень гладкости сопряжения функций, определяемых участками границ Γ_1 и M_i; однако для данных рассмотрений достаточно иметь $u(x) \in C^1$.

4. Примеры. В ряде известных задач теории оптимального управления и дифференциальных игр оказываются выполненными достаточные условия теоремы 2, в частности в задаче о максимизации высоты подъема зондирующей ракеты [5], в задачах «шофер-убийца», «игра двух автомобилей» [1]. Динамика последней описывается соотношениями

$$x_1^{\cdot} = -x_2 u + \nu \sin x_3, \quad x_2^{\cdot} = x_1 u - 1 - \nu \cos x_3, \qquad \nu < 1$$
$$x_3^{\cdot} = -u + \nu\gamma v, \qquad |u| \leqslant 1, \qquad |v| \leqslant 1$$

Рассмотрим универсальную поверхность, в окрестности которой $v = 1$. Уравнение Беллмана — Айзекса в исходной задаче имеет вид [1]

$$F(x, p) = \min_u \max_v H_1 + \nu\gamma p_3 v + Au = 0$$
$$H_1(x, p) = p_1 \nu \sin x_3 + p_2 \nu \cos x_3 - p_2 + 1$$
$$A(x, p) = -p_1 x_2 + p_2 x_1 - p_3$$

Произведем минимизацию по u и положим $v = 1$. Имеем (см. (3.2))

$$F_0(x, p) = H - A = 0, \quad A > 0; \quad H = H_1 + \nu\gamma p_3 \tag{4.1}$$
$$F_1(x, p) = H + A = 0, \quad A < 0$$

Соответствующее управление $u(x, p) = -\operatorname{sgn} A$, в обозначениях п. 3: $\psi_0(x, p) \equiv -1$, $\psi_1(x, p) \equiv 1$.

После параметризации терминальное множество M [1] (это цилиндр) задается формулами: $x_1 = l \sin s_1$, $x_2 = l \cos s_1$, $x_3 = s_2$, $-\pi < s_1, s_2 < \pi$. Условия трансверсальности дают

$$p_1 = \frac{\sin s_1}{\cos s_1 - \nu \cos(s_2 - s_1)}, \quad p_2 = \frac{\cos s_1}{\cos s_1 - \nu \cos(s_2 - s_1)}, \quad p_3 = 0 \tag{4.2}$$

Согласно условиям теоремы 2, на Γ_2 должно быть $F_0(x, p) = F_1(x, p) = \{F_0, F_1\} = 0$. Но $F_0(x, p) \equiv F_1(x, p) \equiv 0$ на M, поэтому условие $\{F_0, F_1\} \equiv 2\{H, A\} = -2p_1 = 0$ выделяет на M линию Γ_2^*, параметрическое представление которой согласно (4.2) следующее: Γ_2^*: $s_1 = 0$ или $x_1 = 0$, $x_2 = l$. На M имеем $A \equiv p_3 \equiv 0$. Однако рассуждениями, аналогичными приведенным в [1] при построении барьера в этой игре, можно показать следующее. Линия Γ_2, принадлежащая Γ_2^* и отвечающая значению $v = 1$, выделяется соотношениями $-\pi < s_2 < 0$, $s_1 = 0$. Окрестность Γ_0 точки $x^* \in \Gamma_2$ определяет на M два множества M_0 и M_1, разделенные линией Γ_2, на которых выполнено $s_1 < 0$ и $s_2 > 0$ соответственно, а оптимальное управление $u(x) = \psi_i(x, p(x)) = \operatorname{sgn} s_1$ на M.

Непосредственным вычислением получаем $\{\{F_0, F_1\}, F_0\} = \{F_1, \{F_0, F_1\}\} = -2p_2 < 0$ при $-\pi/2 < s_1 < \pi/2$. Таким образом, в окрестности Γ_2 выполнены достаточные условия теоремы 2 существования универсальной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Меликян А. А.* Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 4, с. 10—18.
3. *Меликян А. А.* О построении слабых разрывов в задачах оптимального управления и дифференциальных игр.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 1, с. 45—50.
4. *Меликян А. А., Овсеевич А. И.* Гамильтоновы системы с заданным инвариантным многообразием и некоторые их приложения.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 205—213.
5. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
7. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. *Зеликина Л. Ф.* К вопросу о регулярном синтезе.— Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 3, с. 532—535.
9. *Зеликин М. И.* Условия оптимальности особых траекторий в задаче минимизации криволинейного интеграла.— Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 3, с. 528—531.
10. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. —Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
11. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 239 с.
12. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
13. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1984