Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

УДК 62—50

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ СТРАТЕГИЯ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Красовский Н. Н.

Методом программного стохастического синтеза [1] решается задача об управлении, минимизирующем гарантированный результат [2]. Объект описывается линейным дифференциальным уравнением. Показатель качества складывается из нормы фазового вектора в конце процесса и из интегралов от реализаций управления и динамической помехи. Информационный элемент в текущий момент времени t складывается из сигнала, представляющего историю действительного движения с ошибкой, и из истории управления, выработанного к моменту t. Информационная ошибка, динамическая помеха и управление стеснены геометрическими ограничениями. Статья примыкает к работам [3—7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим x-объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)\,x + B(t)u + C(t)v, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

где x, u, v — векторы-столбцы, матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ непрерывны. Управление u и помеха v стеснены ограничениями $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q — компакты. Информация о начальном и текущем состояниях $x[t_0] = x_0$ и $x[t]$, $t > t_0$ фазового вектора x дается векторами $x_0^* = x_0 + \Delta x_0^*$ и $q^*[t] = K(t)\,x[t] + \Delta q^*[t]$, $t_0 < t \leqslant \vartheta$. Здесь $K(t)$ — непрерывная матрица-функция, искажения Δx_0^* и $\Delta q^*[t]$ стеснены ограничениями $\Delta x_0^* \in R$ и $\Delta q^*[t] \in S(t)$, где R и $S(t)$ — компакты; множества $S(t)$ непрерывны по t в хаусдорфовой метрике. Будем обозначать функции времени так: $x[t_*[\cdot]t^*] = \{x[\tau],\ t_* \leqslant \tau \leqslant t^*\}$, $x(t_*[\cdot]t^*] = \{x[\tau],\ t_* < \tau \leqslant t^*\}$ и т. п. В качестве информационного образа $Y[t]$ назначим набор

$$Y[t] = \{x_0^*,\ q^*(t_0[\cdot]\,t],\ u(t_0[\cdot]\,t]\} \tag{1.2}$$

В (1.2) допустимы кусочно-непрерывные реализации $q^*[\tau]$ и измеримые реализации $u[\tau]$. Кроме того, допустимые функции $q^*[\tau]$ и $u[\tau]$ связаны еще следующим условием. Пусть $X[\tau, \nu]$ — фундаментальная матрица решений для уравнения $dx/d\tau = A(\tau)\,x$. Обозначим

$$r[\tau] = q^*[\tau] - K(\tau)\int_{t_0}^{\tau} X[\tau, \nu]\,B(\nu)\,u[\nu]\,d\nu \tag{1.3}$$

Должны существовать вектор x_0 и измеримая функция $v(t_0[\cdot]\,t] = \{v[\tau] \in Q,\ t_0 < \tau \leqslant t\}$, которые удовлетворяют вложениям

$$(x_0^* - x_0) \in R \tag{1.4}$$

$$\Big(r[\tau] - K(\tau)\Big[X[\tau, t_0]\,x_0 + \int_{t_0}^{\tau} X[\tau, \nu]\,C(\nu)\,v[\nu]\,d\nu\Big]\Big) \in S(\tau), \quad t_0 < \tau \leqslant t \tag{1.5}$$

Будем называть стратегией $u(\cdot)$ функцию $u(t, Y, \varepsilon)$, определенную для $t \in [t_0, \vartheta)$, $\varepsilon > 0$ и всех возможных образов $Y = Y[t]$. Здесь ε —

параметр точности [1, 2, 7]. Пусть наступил момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и реализовался образ $Y[t_*]$. Закон управления U на оставшемся отрезке $[t_*, \vartheta]$ есть совокупность трех фиксированных компонент $U = \{u(\cdot), \varepsilon, \Delta\{t_i\}\}$, где $\Delta\{t_i\}$ — разбиение отрезка $[t_*, \vartheta] : t_1 = t_*;\ t_{i+1} > t_i,\ i = 1, \ldots, k;$ $t_{k+1} = \vartheta$, k — натуральное число. Закон U и образ $Y[t_*]$ порождают продолжение $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ движения. Оно является решением пошагового уравнения

$$(1.6)\qquad \begin{gathered} x^{\cdot}[t] = A(t)x[t] + B(t)u(t_i, Y[t_i], \varepsilon) + C(t)v[t], \\ t_i < t \leqslant t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, k \end{gathered}$$

В (1.6) допустимы измеримые реализации $v[t] \in Q$. Задан показатель качества процесса

$$(1.7)\qquad \gamma = |x[\vartheta]| + \int_{t_0}^{\vartheta} [\varphi(t, u[t]) + \psi(t, v[t])]\,dt$$

где функции φ и ψ непрерывны, символ $|x|$ означает евклидову норму вектора x.

Определим гарантированный результат для закона U равенством

$$(1.8)\qquad \rho(t_*, Y[t_*]; U) = \sup_{q^*(t_*[\cdot]\vartheta]}\ \sup_{\{x_0,\, v(t_0[\cdot]\vartheta]\}} \gamma$$

Здесь внутренняя верхняя грань вычисляется по всем возможным парам $\{x_0, v(t_0[\cdot]\vartheta]\}$, которые удовлетворяют условиям (1.4), (1.5) при $t = \vartheta$. Внешняя верхняя грань вычисляется по всем допустимым продолжениям $q^*(t_*[\cdot]\vartheta]$ допустимой компоненты $q^*(t_0[\cdot]t_*]$ из $Y[t_*]$. При этом допустимость продолжения $q^*(t_*[\cdot]\vartheta]$ определяется рекуррентно по шагам $t_i < t \leqslant t_{i+1}$ в паре с продолжением $u(t_*[\cdot]\vartheta]$ реализации управления $u[\tau] = u(t_i, Y[t_i], \varepsilon)$, $t_i < \tau \leqslant t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$. Здесь $Y[t_i]$ — образ, составленный из данной в начале компоненты $x_0{}^*$ и из допустимых компонент $q^*(t_0[\cdot]t_i]$ и $u(t_0[\cdot]t_i]$, доведенных уже до момента t_i.

Гарантированный результат для стратегии $u(\cdot)$ определим равенством

$$(1.9)\qquad \rho(u(\cdot);\ t_*, Y[t_*]) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \lim_{\delta\to 0}\ \sup_{U_\delta} \rho(t_*, Y[t_*]; U_\delta)$$

где U_δ — закон, шаг которого $\max_i(t_{i+1} - t_i)$ не превышает $\delta > 0$.

Надо найти оптимальную стратегию $u^\circ(\cdot)$, которая удовлетворяет условию

$$(1.10)\qquad \rho(u^\circ(\cdot);\ t_*, Y[t_*]) = \min_{u(\cdot)} \rho(u(\cdot);\ t_*, Y[t_*]) = \rho^\circ(t_*, Y[t_*])$$

каковы бы ни были момент $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и допустимый образ $Y[t_*]$. Оптимальная стратегия $u^\circ(\cdot)$ существует. Величину $\rho^\circ(t_*, Y[t_*])$ будем называть оптимальным гарантированным результатом. Ниже описывается вычисление $\rho^\circ(t_*, Y[t_*])$ и построение $u^\circ(\cdot)$ методом программного стохастического синтеза [1, 2, 7].

2. Программная стохастическая конструкция. Построим вспомогательную Z-модель. Ее основой является z-объект, работающий в воображаемом времени τ. Текущее состояние z-объекта определяется его фазовым вектором $z = \{w, \zeta\}$, где размерность вектора w совпадает с размерностью вектора x; ζ — скаляр. Изменение w и ζ подчиним уравнениям

$$w^{\boldsymbol{\cdot}} = A(\tau)\,w + B(\tau)\,u^* + C(\tau)\,v^* \tag{2.1}$$

$$\zeta^{\boldsymbol{\cdot}} = \varphi(\tau,\ u^*) + \psi(\tau,\ v^*) \tag{2.2}$$

где u^* и v^* стеснены ограничениями $u^* \in P$, $v^* \in Q$.

Пусть задан момент $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$. Назначим разбиение $\Delta\,\{\tau_j\} : \tau_1 = \tau_*$, $\tau_{j-1} > \tau_j$, $j = 1, \ldots, g$; $\tau_g = \vartheta$; g — натуральное число. Введем вероятностное пространство [8] $\{\Omega, B, p\}$, $\omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_g\}$, порожденное независимыми в совокупности случайными величинами ξ_j, каждая из которых $\xi_j = \xi\,[\tau_j]$ реализуется в свой момент τ_j. Значения ξ_j равновероятны на отрезке $[0, 1]$.

Будем называть стохастической программой $u^*(\cdot)$ для управления неупреждающую функцию [8]

$$u^*(\tau,\ \omega) = u^*[\tau,\ \xi_1, \ldots, \xi_j] \in P, \quad \tau_j < \tau \leqslant \tau_{j+1},$$
$$j = 1, \ldots, g - 1$$

Стохастической программой $v^*(\cdot)$ для динамической помехи назовем случайную функцию

$$v^*(\tau,\ \omega) = v^*[\tau,\ \xi_1, \ldots, \xi_g] \in Q$$

измеримую по совокупности переменных τ, ω.

Пусть указана некоторая детерминированная измеримая реализация $u^*(t_0\,[\cdot]\,\tau_*] = \{u^*[\tau] \in P,\ t_0 < \tau \leqslant \tau_*\}$. Случайный вектор $w(\cdot) = \{w(\omega),\ \omega \in \Omega_0\}$, число ζ_0, реализация $u^*(t_0\,[\cdot]\,\tau_*]$ и пара программ $u^*(\cdot)$, $v^*(\cdot)$ определяют случайное движение $z(\cdot,\ \cdot) = \{z(\tau,\ \omega) = \{w(\tau,\ \omega),\ \zeta(\tau,\ \omega)\},\ t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta,\ \omega \in \Omega;\ w(t_0,\ \omega) = w(\omega),\ \zeta(t_0,\ \omega) = \zeta_0\}$ для z-объекта. Здесь функции $w(\tau,\ \omega)$ и $\zeta(\tau,\ \omega)$ — решения стохастических дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2) при $u^* = u^*[\tau]$, $t_0 < \tau \leqslant \tau_*$, $u^* = u^*(\tau,\ \omega)$, $\tau_* < \tau \leqslant \vartheta$; $v^* = v^*(\tau,\ \omega)$, $t_0 < \tau \leqslant \vartheta$.

Пусть, как и в (1.3), размерность вектора r совпадает с размерностью вектора q^* из (1.2). Пусть указана какая-либо совокупность допустимых компонент x_0^*, $q^*(t_0\,[\cdot]\,\tau_*]$, $u(t_0\,[\cdot]\,\tau_*]$, которые составляют некоторый образ $Y[\tau_*]$ (1.2) (при $t = \tau_*$). Пусть $r(t_0\,[\cdot]\,\tau_*]$ — соответствующая функция (1.3). Назовем информационной стохастической программой $r^*(\cdot)$, допустимой при данных x_0^*, $r(t_0\,[\cdot]\,\tau_*]$ и $u(t_0\,[\cdot]\,\tau_*]$, неупреждающую функцию

$$r^*(\tau,\ \omega) = r^*[\tau,\ \xi_1, \ldots, \xi_j], \quad \tau_j < \tau \leqslant \tau_{j+1}, \quad j = 1, \ldots$$
$$\ldots, g - 1$$

реализации которой кусочно непрерывны почти наверное и удовлетворяют следующему условию (также почти наверное):

$$\Big(r^*(\tau,\omega) - K(\tau)\Big[X[\tau,\ t_0]\,w(\omega) + \int_{t_0}^{\tau} X[\tau,\ \nu]\,C(\nu)\,v^*(\nu,\ \omega)\,d\nu\Big]\Big) \in S(\tau), \quad \tau_* < \tau \leqslant \vartheta \tag{2.3}$$

причем пара $\{w(\omega),\ v^*(\nu,\ \omega)\}$, составленная из случайного вектора $w(\omega)$ и стохастической программы $v^*(\nu,\ \omega)$, удовлетворяет помимо условия (2.3) также условиям

$$(x_0^* - w(\omega)) \in R \tag{2.4}$$

$$\Big(r(\tau) - K(\tau)\Big[X[\tau,\ t_0]\,w(\omega) + \int_{t_0}^{\tau} X[\tau,\ \nu]\,C(\nu)\,v^*(\nu,\ \omega)\,d\nu\Big]\Big) \in S(\tau), \quad t_0 < \tau \leqslant \tau_* \tag{2.5}$$

Каждой допустимой совокупности x_0^*, $r(t_0[\cdot]\tau_*]$, $u(t_0[\cdot]\tau_*]$ отвечает по крайней мере одна допустимая программа $r^*(\cdot) = \{r^*(\tau, \omega),\ \tau_* < \tau \leqslant \vartheta,\ \omega \in \Omega\}$.

Состояние Z-модели в момент τ_* определим ее фазовым элементом

$$Z[\tau_*] = \{x_0^*, r(t_0[\cdot]\tau_*], z_*\} \tag{2.6}$$

Здесь $r(t_0[\cdot]\tau_*]$ — допустимая функция, т. е. такая, для которой существует пара $\{w(\omega), v^*(\nu, \omega)\}$, удовлетворяющая условиям (2.4), (2.5). Компонента z_* — какой-либо вектор $z_* = \{w_*, \zeta_*\}$.

Оценим элемент $Z[\tau_*]$ подходящим показателем $\rho(\tau_*, Z[\tau_*]; \Delta\{\tau_j\})$ следующим образом. Пусть l — вектор, размерность которого совпадает с размерностью вектора w. Введем случайный вектор $l(\cdot) = \{l(\omega), \omega \in \Omega\}$ с нормой

$$\| l(\cdot) \| = \operatorname*{vrai\,max}_{\omega \in \Omega} | l(\omega) | \tag{2.7}$$

Пусть $M\{\ldots\}$ означает математическое ожидание, $M\{\ldots | \xi_1, \ldots, \xi_j\}$ — условное математическое ожидание, верхний индекс штрих — транспонирование. Введем величину

$$\begin{aligned}
&\varkappa(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}, l(\cdot)) = \\
&= \sup_{r^*(\cdot)} \sup_{\{w(\cdot),\, v^*(\cdot)\}} \inf_{u^*(\cdot)} M\{l'(\omega)[X[\vartheta; t_0]w(\omega) + v_*] + \\
&+ \zeta_* + \int_{\tau_*}^{\vartheta} [l'(\omega)X[\vartheta, \tau]B(\tau)u^*(\tau, \omega) + \varphi(\tau, u^*(\tau, \omega))]\,d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{\vartheta} [l'(\omega)X[\vartheta, \tau]C(\tau)v^*(\tau, \omega) + \psi(\tau, v^*(\tau, \omega))]\,d\tau\}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь внутренняя верхняя грань вычисляется по всем парам $\{w(\omega), v^*(\tau, \omega)\}$, которые удовлетворяют условиям (2.3)—(2.5) при фиксированной допустимой программе $r^*(\cdot)$. Внешняя верхняя грань в (2.8) вычисляется затем по всем программам $r^*(\cdot)$, которые допустимы при компонентах x_0^* и $r(t_0[\cdot]\tau_*]$ из $Z[\tau_*]$. Нижняя грань в (2.8) вычисляется по всем возможным стохастическим программам $u^*(\cdot)$.

Определим программный экстремум ρ, который оценивает элемент $Z[\tau_*]$ при назначенном разбиении $\Delta\{\tau_j\}$, равенством

$$\rho(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}]) = \sup_{\|l(\cdot)\| \leqslant 1} \varkappa(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}, l(\cdot)) \tag{2.9}$$

Если в (2.8) положить

$$w_* = \int_{t_0}^{\tau_*} X[\vartheta, \tau]B(\tau)u[\tau]\,d\tau, \qquad \zeta_* = \zeta_0 + \int_{t_0}^{\tau_*} \varphi(\tau, u[\tau])\,d\tau \tag{2.10}$$

то величина $\rho(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\})$ (2.9) примет вид

$$\begin{aligned}
&\rho(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}) = \\
&= \sup_{\|l(\cdot)\| \leqslant 1} \sup_{r^*(\cdot)} \sup_{\{w(\cdot),\, v^*(\cdot)\}} \inf_{u^*(\cdot)} M\{l'(\omega)w(\vartheta, \omega) + \zeta(\vartheta, \omega)\}
\end{aligned}$$

где $z(\tau, \omega) = \{w(\tau, \omega), \zeta(\tau, \omega)\}$ — соответствующее случайное движение z-объекта, порожденное из начального состояния $z(t_0, \omega) = \{w(\omega), \zeta_0\}$ программой $v^*(\cdot) = \{v^*(\tau, \omega), t_0 < \tau \leqslant \vartheta\}$ и программой $u^*(\cdot) = \{u \cdot [\tau], t_0 < \tau \leqslant \tau_*; u(\tau, \omega), \tau_* < \tau \leqslant \vartheta\}$.

3. Стабильность программного экстремума. Обозначим $l_* = M\{l(\cdot)\}$. Возьмем какую-нибудь максимизирующую для (2.9) последовательность случайных векторов $l^{(s)}(\cdot)$, $s = 1, 2, \ldots$, для которой существует предел

$$(3.1)\qquad \lim_{s\to\infty} l_*^{(s)} = \lim_{s\to\infty} M\{l^{(s)}(\cdot)\} = l^\circ[\tau_*]$$

Составим множество $L^\circ[\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}]$ всех векторов $l^\circ[\tau_*]$, которые можно получить предельным переходом (3.1). Множество $L^\circ[\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}]$ оказывается замкнутым и выпуклым. Эти множества изменяются полунепрерывно сверху по включению при изменении составляющей z_* в $Z[\tau_*]$ (2.6). При фиксированных τ_*, $\Delta\{\tau_j\}$ и $Z[\tau_*]$ назначим момент $\tau^* = \tau_i$, где i — какой-нибудь фиксированный индекс из чисел $j = 2, \ldots$ $\ldots, g$. Пусть вектор h имеет размерность вектора z. Введем множества

$$H(\tau) = \mathrm{co}\,[h : h = \{B^*(\tau)\,u, \varphi(\tau, u)\},\ u \in P],\quad \tau_* < \tau \leqslant \tau^*$$

где символ co [...] означает выпуклую оболочку множества $[\ldots] B^*(\tau) = X[\vartheta,\tau]B(\tau)$. Возьмем элемент

$$(3.2)\qquad Z[\tau^*] = \{x_0^*, r(t_0[\cdot]r^*], z^*\}$$

где допустимая функция $r(t_0[\cdot]\tau^*]$ является продолжением функции $r(t_0[\cdot]\tau_*]$ из $Z[\tau_*]$ (2.6), вектор z^* связан с вектором z_* из $Z[\tau_*]$ равенством

$$(3.3)\qquad z^* = z_* + \int_{\tau_*}^{\tau^*} h[\tau]\,d\tau$$

причем $h[\tau]$ — какая-либо зафиксированная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$(3.4)\qquad h[\tau] \in H(\tau),\quad \tau_* < \tau \leqslant \tau^*$$

Пусть разбиение $\Delta\{\tau_j^*\}$ для отрезка $[\tau^*, \vartheta]$ связано с исходным разбиением $\Delta\{\tau_j\}$ для отрезка $[\tau_*, \vartheta]$ соотношением $\tau_j^* = \tau_{j+i-1}$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, g - i + 1 = g^*$. Следуя известному ходу рассуждений [2], получим оценку

$$(3.5)\qquad \rho(\tau^*, Z[\tau^*], \Delta\{\tau_j^*\}) \leqslant \rho(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}) +$$
$$+ \int_{\tau_*}^{\tau^*} (s^\circ[\tau^*]\,h[\tau] - \min_{h\in H(\tau)} s^\circ[\tau^*]\,h)\,d\tau,\quad s^\circ = \{l^{\circ\prime}, 1\}$$

где $l^\circ[\tau^*]$ — любой вектор из множества $L^\circ[\tau^*, Z[\tau^*], \Delta\{\tau_j^*\}]$. Введем функциональные множества

$$H_l = [h(\tau_*[\cdot]\tau^*] : h[\tau] \in H(\tau),\ sh[\tau] = \min_{h\in H(\tau)} sh],\ s = \{l', 1\}$$

где $h(\tau_*[\cdot]\tau^*]$ будем трактовать как элементы пространства функций $\{h[\tau], \tau_* < \tau \leqslant \tau^*\}$ с интегрируемым квадратом с нормой

$$\| h(\tau_*[\cdot]\tau^*] \|_{(2)} = \Big(\int_{\tau_*}^{\tau^*} |h[\tau]|^2\,d\tau\Big)^{1/2}$$

Множества H_l выпуклы, слабо замкнуты и слабо полунепрерывны сверху по включению при изменении вектора l. Используя свойства множеств $L^\circ[\tau^*, Z[\tau^*], \Delta\{\tau_j^*\}]$ и H_l, можно, опираясь на теорему о неподвижной точке из [9], установить существование пары $\{l^\circ[\tau^*], h^\circ(\tau_*[\cdot]\tau^*]\}$, для которой выполнены условия

$$(3.6)\qquad l^\circ[\tau^*] \in L^\circ[\tau^*, Z^\circ[\tau^*], \Delta\{\tau_j^*\}]$$

$$(3.7)\qquad h^\circ(\tau_*[\cdot]\tau^*] \in H_{l^\circ[\tau^*]}$$

Здесь символ $Z^\circ[\tau^*]$ означает элемент $Z[\tau^*]$ (3.2), третья компонента которого есть вектор

$$z^{*\circ} = z_* + \int_{\tau_*}^{\tau^*} h^\circ[\tau]\,d\tau$$

Упомянутая теорема о неподвижной точке прилагается здесь к подходящему отображению пар $\{l, h(\tau_*[\cdot]\tau^*]\}$, которое строится подобно тому, как это делается в других аналогичных случаях (см., например, [2, 10]). Выбирая в (3.5) вектор $l^\circ[\tau^*]$ и функцию $h[\tau] = h^\circ[\tau]$ из (3.6), (3.7), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Пусть назначено разбиение $\Delta\{\tau_j\}$ для отрезка $[\tau_*, \vartheta] \subset [t_0, \vartheta]$ и выбран допустимый элемент $Z[\tau_*]$. Назначим любой момент $\tau^* = \tau_i \in \Delta\{\tau_j\}$. Тогда при всяком допустимом продолжении $r(t_0[\cdot]\tau^*]$ компоненты $r(t_0 \cdot [\cdot]\tau_*]$ из $Z[\tau_*]$ найдется функция $h^\circ(\tau_*[\cdot]\tau^*]$ из (3.4), удовлетворяющая следующему условию. При ее подстановке в (3.3) получится вектор $z^{*\circ}$, который вместе с вектором x_0^* из $Z[\tau_*]$ и указанной выше продолжающей допустимой функцией $r(t_0[\cdot]\tau^*]$ составит элемент $Z^\circ[\tau^*]$, удовлетворяющий неравенству

$$\rho(\tau^*, Z^\circ[\tau^*], \Delta\{\tau_j^*\}) \leqslant \rho(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}) \tag{3.8}$$

Это утверждение и выражает свойство программного экстремума ρ (2.9), которое будем называть стабильностью этой величины ρ.

4. Экстремальный сдвиг. Рассмотрим некоторый образ $Y[t]$ (1.2). Пусть y — вектор, размерность которого на единицу больше, чем размерность вектора x. Стало быть, размерности векторов y и z совпадают. Образу $Y[t]$ отвечает вектор-функция $y[t_0[\cdot]t]$, которую определим равенством

$$y[\tau] = \int_{t_0}^{\tau} \left\| \begin{matrix} X[\vartheta, \nu]B(\nu)u[\nu] \\ \varphi(\nu, u[\nu]) \end{matrix} \right\| d\nu, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t \tag{4.1}$$

Назовем ее управляемой составляющей образа $Y[t]$. Функцию $r(t_0[\cdot]t] = \{r[\tau], t_0 < \tau \leqslant t\}$, которая определена равенством (1.3), будем называть информационной составляющей этого образа. Для данного образа $Y[t]$ будем называть соответствующим такой элемент $Z[t]$ (2.6) (где $\tau_* = t$), в котором вектор x_0^* и компонента $r(t_0[\cdot]t]$ совпадают с компонентой x_0^* и информационной составляющей $r(t_0[\cdot]t]$ (1.3) образа $Y[t]$. Назначим момент $\tau^* \in (t, \vartheta]$, удовлетворяющий неравенству $\tau^* - t \leqslant \delta$, где δ — некоторое положительное число. Выберем вектор $u_e \in P$ из условия

$$(y[t] - z_*)' \left\| \begin{matrix} B^*(t)u_e \\ \varphi(t, u_e) \end{matrix} \right\| = \min_{u \in P} (y[t] - z_*)' \left\| \begin{matrix} B^*(t)u \\ \varphi(t, u) \end{matrix} \right\| \tag{4.2}$$

где $y[t]$ — значение управляемой составляющей (4.1) данного образа $Y[t]$, z_* — компонента некоторого элемента $Z[t]$, соответствующего этому образу $Y[t]$. Условие (4.2) будем называть условием экстремального сдвига на $Z[t]$.

Пусть зафиксированы образ $Y[t]$ и соответствующий ему элемент $Z[t]$. Продолжим третью компоненту $u(t_0[\cdot]t]$ образа $Y[t]$ (1.2) до функции $u(t_0[\cdot]\tau^*]$, полагая $u[\tau] = u_e$, $t < \tau \leqslant \tau^*$. Продолжим как-нибудь информационный сигнал $q^*(t_0[\cdot]t]$ из $Y[t]$ до сигнала $q^*(t_0[\cdot]\tau^*]$, допустимого вместе с x_0^* из $Y[t]$ и с новой компонентой $u(t_0[\cdot]\tau^*]$. Иначе говоря, продолжим сигнал $q^*(t_0[\cdot]t]$ так, что получится допустимая функция

(4.3) $$r[\tau]=q^*[\tau]-K(\tau)\int_{t_0}^{\tau} X[\tau,\nu]B(\nu)u[\nu]d\nu,\quad t_0<\tau\leqslant\tau^*$$

Вектор x_0^* из $Y[t]$ вместе с указанными продолжениями $u(t_0[\cdot]\tau^*]$ и $q^*(t_0[\cdot]\tau^*]$ составят новый допустимый образ $Y[\tau^*]$. Его управляемая составляющая $y[t_0[\cdot]\tau^*]$ продолжает составляющую $y[t_0[\cdot]\tau_*]$ из $Y[t]$ в соответствии с равенством

$$y[\tau]=y[t]+\int_t^{\tau}\left\|\begin{matrix}X[\vartheta,\nu]B(\nu)u[\nu]\\ \varphi(\nu,u[\nu])\end{matrix}\right\|d\nu,\quad t<\tau\leqslant\tau^*$$

Возьмем какой-нибудь элемент $Z[\tau^*]=\{x_0^*, r(t_0[\cdot]\tau^*], z^*\}$, соответствующий новому образу $Y[\tau^*]$ и такой, что компонента $z^*=z[\tau^*]$ определена равенством (3.3) (где $\tau_*=t$), причем $h[\tau]$ — какая-либо функция, удовлетворяющая условию (3.4).

Справедливо следующее утверждение. Пусть

(4.4) $$\lambda=\max_{t_0\leqslant t\leqslant\vartheta}\|A(t)\|+1=\max_{t_0\leqslant t\leqslant\vartheta}\max_{|x|=1}|A(t)x|+1$$

Для любого числа $\alpha>0$ можно указать число $\delta>0$, такое, что, каковы бы ни были допустимая функция $r(t_0[\cdot]\tau^*]$ (4.3) и функция $h(t[\cdot]\tau^*]$ в (3.3), будет выполнено неравенство

(4.5) $$|y[\tau^*]-z^*|^2\leqslant|y[t]-z_*|^2\exp 2\lambda(\tau^*-t)+\alpha(\tau^*-t)$$

если только $\tau^*-t\leqslant\delta$.

5. Предельный программный экстремум. На основании утверждений, данных в пп. 3 и 4, устанавливается справедливость следующего утверждения.

Каковы бы ни были элемент $Z[\tau_*]$ и последовательность разбиений $\Delta^{(s)}=\Delta\{\tau_j^{(s)}\}$, $s=2,3,\ldots$ отрезка $[\tau_*,\vartheta]$, которая удовлетворяет условию

(5.1) $$\lim_{s\to\infty}\max_j(\tau_{j+1}^{(s)}-\tau_j^{(s)})=0$$

существует предел

(5.2) $$\lim_{s\to\infty}\rho(\tau_*,Z[\tau_*],\Delta\{\tau_j^{(s)}\})=\rho(\tau_*,Z[\tau_*])$$

Предел $\rho(\tau_*,Z[\tau_*])$ (5.2) для всякой последовательности $\Delta\{\tau_j^{(s)}\}$, удовлетворяющей условию (5.1), один и тот же. Величина $\rho(\tau_*,Z[\tau_*])$ обладает таким же свойством стабильности, как и величина $\rho(\tau_*,Z[\tau_*],\Delta\{\tau_j\})$. При этом в качестве момента τ^*, который фигурирует в условии стабильности, можно выбирать любой момент $\tau^*\in(\tau_*,\vartheta]$. Назовем $\rho(\tau_*,Z[\tau_*])$ предельным программным экстремумом.

Из свойства стабильности величины $\rho(\tau_*,Z[\tau_*])$ и из свойства (4.5) экстремального сдвига (4.2), данного в п. 4, вытекает обоснование следующего построения оптимальной стратегии $u^\circ(t,Y,\varepsilon)$. Возьмем некоторый информационный образ $Y[t]$, ему отвечает множество соответствующих элементов $Z[t]$, различающихся друг от друга только компонентой z_*. Среди соответствующих элементов $Z[t]$ выберем сопутствующий данному образу $Y[t]$ элемент $Z^{(c)}[t]$, который удовлетворяет условию

$$\rho(t,Z^{(c)}[t])=\min_{Z[t]}\rho(t,Z[t])$$

при ограничении

$$|y[t]-z_*|\leqslant\varepsilon\exp 2\lambda(t-t_0)$$

где λ — число из (4.4). Пусть $z^{(c)}[t]$ — компонента сопутствующего элемента $Z^{(c)}[t]$. Назначим вектор $u_e(t, Y[t], \varepsilon)$, определяющий экстремальную стратегию $u_e(t, Y, \varepsilon)$, исходя из условия экстремального сдвига (4.2), где $z_* = z^{(c)}[t]$.

Из оценки (4.5) и стабильности экстремума $\rho(t, Z[t])$ выводится, что для всякого исходного образа $Y[t_*]$ закон управления U, основанный на стратегии $u_e(\cdot)$ и работающий с разбиением $\Delta\{t_i\}$ с достаточно малым шагом $\max_i(t_{i+1} - t_i) \leqslant \delta$, гарантирует для получающегося образа неравенства

$$|y[\vartheta] - z^{(c)}[\vartheta]| \leqslant \mu(\varepsilon, \delta), \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\mu(\varepsilon, \delta) = 0 \tag{5.3}$$

$$\rho(\vartheta, Z^{(c)}[\vartheta]) \leqslant \rho(t_*, Z^{(c)}[t_*]) \tag{5.4}$$

По определению величины $\rho(\vartheta, Z^{(c)}[\vartheta])$ имеем равенство

$$\rho(\vartheta, Z^{(c)}[\vartheta]) = \max_{\|l(\cdot)\|\leqslant 1}\max_{\{w(\cdot),\, v(\cdot)\}} M\Big\{l'(\omega)(X[\vartheta, t_0]w(\omega) + w^{(c)}[\vartheta]) + \zeta^{(c)}[\vartheta] + \int_{t_0}^{\vartheta}[l'(\omega)X[\vartheta, \tau]C(\tau)v(\tau, \omega) + \psi(\tau, v(\tau, \omega))]\,d\tau\Big\} \tag{5.5}$$

где $w^{(c)}[\vartheta]$ и $\zeta^{(c)}[\vartheta]$ — составляющие вектора $z^{(c)}[\vartheta]$ из сопуствующего элемента $Z^{(c)}[\vartheta]$. Из (5.3) и (5.5) вытекает оценка

$$\rho(\vartheta, Z^{(c)}[\vartheta]) \geqslant \max_{\{x_0,\, v[\cdot]\}}\Big(|x[\vartheta]| + \int_{t_0}^{\vartheta}[\varphi(\tau, u[\tau]) + \psi(\tau, v[\tau])]\,d\tau\Big) + \sigma(\varepsilon, \delta) \tag{5.6}$$

Здесь

$$x[\vartheta] = X[\vartheta, t_0]x_0 + \int_{t_0}^{\vartheta} X[\vartheta, \tau](B(\tau)u[\tau] + C(\tau)v[\tau])\,d\tau$$

причем $u[\tau]$ — значения компоненты $u(t_0[\cdot]\vartheta]$ из $Y[\vartheta]$. Максимум в (5.6) берется по всем парам $\{x_0, v[\cdot]\}$, которые удовлетворяют условию (1.4), (1.5) при $t = \vartheta$. Величина $\sigma(\varepsilon, \delta)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\sigma(\varepsilon, \delta) = 0$$

Из (5.4), (5.6) по определению показателя γ (1.7) и гарантированных результатов ρ (1.8), (1.9) выводится, что для экстремальной стратегии $u_e(t, Y, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\rho(u_e(\cdot);\, t_*, Y[t_*]) \leqslant \rho(t_*, Z[t_*]) \tag{5.7}$$

Здесь $Z[t_*]$ — элемент, соответствующий исходному образу $Y[t_*]$, причем вектор $z_* = \{w_*, \zeta_*\}$ из $Z[t_*]$ определен равенствами (2.10) при $\tau_* = t_*$, $\zeta_0 = 0$.

Далее проверяется, что для всякой допустимой стратегии $u(\cdot)$ должно выполняться неравенство

$$\rho(u(\cdot);\, t_*, Y[t_*]) \geqslant \rho(t_*, Z[t_*]) \tag{5.8}$$

где $Z[t_*]$ — тот же соответствующий элемент.

Из (5.7), (5.8) следует, что $u_e(t, Y, \varepsilon)$ — оптимальная стратегия $u^\circ(t, Y, \varepsilon)$, и справедливо равенство

$$(5.9) \qquad \rho^\circ(t_*, Y[t_*]) = \rho(t_*, Z[t_*])$$

где $Z[t_*]$ — элемент, соответствующий образу $Y[t_*]$ и удовлетворяющий тому условию, что его компонента z_* равна значению управляемой составляющей $y[t_*]$ из $Y[t_*]$.

6. Алгоритм оптимального управления. Пусть задан начальный информационный образ $Y[t_0] = x_0^*$ и выбрано наперед сколь угодно малое положительное число $\alpha > 0$. Из пп. 3—5 следует, что для осуществления закона управления U, который гарантирует неравенство

$$(6.1) \qquad \gamma \leqslant \rho^\circ(t_0, Y[t_0]) + \alpha$$

надлежит поступить следующим образом. Выбрать достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta\{t_i\}$, $i = 1, \ldots, k$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с достаточно малым шагом δ. Для очередного текущего момента t_i, в который реализуется образ $Y[t_i]$, надлежит назначить разбиение $\Delta\{\tau_j\}$, $j = 1, \ldots, k - i + 1$ будущего отрезка $[t_i, \vartheta]$, удовлетворяющее условию $\tau_j = t_{i+j-1}$, $j = 1, \ldots, g$. Затем следует вычислить функцию $\rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\})$ для элементов $Z[t_i]$, соответствующих образу $Y[t_i]$ и удовлетворяющих условию

$$(6.2) \qquad |z_*[t_i] - y[t_i]| \leqslant \varepsilon \exp 2\lambda(t_i - t_0)$$

Согласно (2.8), (2.9), имеем

$$(6.3) \qquad \rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\}) =$$

$$= \sup_{\|l(\cdot)\|\leqslant 1}\ \sup_{r^*(\cdot)}\ \sup_{\{w(\cdot),\, v^*(\cdot)\}}\ \inf_{u^*(\cdot)} M\Big\{l'(\omega) X[\vartheta, t_0] w(\omega) +$$

$$+ \int_{t_0}^{\vartheta} [l'(\omega) X[\vartheta, \tau] C(\tau) v^*(\tau, \omega) + \psi(\tau, v^*(\tau, \omega))]\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_i}^{\vartheta} [l'(\omega) X[\vartheta, \tau] B(\tau) u^*(\tau, \omega) + \varphi(\tau, u^*(\tau, \omega))]\, d\tau +$$

$$+ l'(\omega) w_*[t_i] + \zeta[t_i]\Big\}$$

Представим случайный вектор $l(\cdot)$ в виде $l(\omega) = M\{l(\omega)\} + a(\omega) = l_* + a(\omega)$. Тогда искомую верхнюю грань ρ (6.3) можно определить так. Зафиксируем какой-нибудь вектор l_* с евклидовой нормой $|l_*| \leqslant 1$. Вычислим верхнюю грань в правой части (6.3) при дополнительном условии $M\{l(\omega)\} = l_*$. Обозначим ее символом $\rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\}, l_*)$. Теперь имеем

$$\rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\}) = \max_{|l_*|\leqslant 1} \rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\}, l_*)$$

Далее следует найти сопутствующий элемент $Z^{(c)}(t_i)$ с компонентой $z^{(c)}[t_i]$, исходя из условия

$$(6.4) \qquad \rho(t_i, Z^{(c)}[t_i], \Delta\{\tau_j\}) = \min_{Z[t_i]} \rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\}) =$$

$$= \min_{z_*[t_i]}\ \max_{|l_*|\leqslant 1} \rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\}, l_*)$$

Важный факт состоит в том, что функция ρ в правой части (6.4) линейна по $z_*[t_i]$ и вогнута по l_*. Поэтому операции min и max в (6.4) можно переставить. Таким образом, получаем равенство

$$\rho(t_i, Z^{(c)}[t_i], \Delta\{\tau_j\}) = \max_{|l_*|\leqslant 1} \min_{z_*[t_i]} \rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\}, l_*) \tag{6.5}$$

Вычисление показывает, что компонента $z^{(c)}[t_i] = \{w^{(c)}[t_i], \zeta^{(c)}[t_i]\}$ сопутствующего элемента $Z^{(c)}[t_i]$, найденная из условия минимума в (6.5) при ограничении (6.2), имеет вид

$$w^{(c)}[t_i] = x[t_i] + l_*\Lambda, \quad \zeta^{(c)}[t_i] = \eta[t_i] + \Lambda \tag{6.6}$$
$$\Lambda = \frac{\varepsilon \exp 2\lambda(t_i - t_0)}{(1 + |l_*|^2)^{1/2}}$$

где $x[t_i]$ и $\eta[t_i]$ — компоненты управляемой составляющей $y[t_i]$ реализовавшегося образа $Y[t_i]$. Далее оказывается, что функция от l_* под знаком максимума в (6.5) строго вогнута по l_*. Это означает, что задача на максимум в (6.5) имеет единственное решение $l^\circ[t_i]$. Итак, сопутствующий элемент $Z^{(c)}[t_i]$ при выбранном ε и для реализовавшегося образа $Y[t_i]$ определяется единственным образом. Искомый вектор $u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta) \in P$, который определяет управляющее воздействие

$$u[t] = u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta), \quad t_i < t \leqslant t_{i+1} \tag{6.7}$$

находится из условия экстремального сдвига

$$(y[t_i] - z^{(c)}[t_i])' \left\| \begin{matrix} B^*(t_i)\, u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta) \\ \varphi(t_i, u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta)) \end{matrix} \right\| =$$
$$= \min_{u \in P} (y[t_i] - z^{(c)}[t_i])' \left\| \begin{matrix} B^*(t_i)\, u \\ \varphi(t_i, u) \end{matrix} \right\|$$

Согласно (6.6), это означает, что вектор $u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta)$ является решением задачи на минимум

$$l^{\circ\prime}[t_i]\, B^*(t_i)\, u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta) + \varphi(t_i, u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta)) =$$
$$= \min_{u \in P} [l^{\circ\prime}[t_i]\, B(t_i)\, u + \varphi(t_i, u)] \tag{6.8}$$

где $l^\circ[t_i] = l^\circ(t_i, Y[t_i], \varepsilon, \Delta)$ — решение задачи на максимум (6.5). Этим вполне определяется пошаговый алгоритм управления.

Итак, если надо организовать пошаговое управление, которое гарантирует неравенство (6.1), надлежит выбрать достаточно малый параметр $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta\{t_i\}$ с достаточно малым шагом $\delta > 0$. Пусть разбиение $\Delta\{t_i\}$ содержит k шагов $(t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, k$. Для вычисления управляющего воздействия $u[t]$ (6.7) следует по ходу дела k раз обратиться к решению вспомогательных задач (6.5) и (6.8). Каждая из этих задач является задачей из выпуклого программирования.

Аналогичную процедуру управления можно обосновать и в том случае, когда вспомогательная задача вида (6.5) решается не для функции $\rho(t_i, Z[t_i], \Delta\{\tau_j\})$, но уже для предельной функции $\rho(t_i, Z[t_i])$. В таком случае управляющее воздействие $u[t] = u^\circ(t_i, Y[t_i], \varepsilon) = u_e(t_i, Y[t_i], \varepsilon)$, $t_i < t \leqslant t_{i+1}$, найденное из условия экстремального сдвига, уже не зависит от разбиения $\Delta\{t_i\}$, а определяется только моментом t_i, реализовавшимся образом $Y[t_i]$ и параметром ε. В этом случае вектор $u^\circ(t_i, Y[t_i], \varepsilon)$ будет значением универсальной оптимальной стратегии $u^\circ(t, Y, \varepsilon)$.

Заметим, что в некоторых случаях при определении величины $\rho(\tau_*, Z[\tau_*], \Delta\{\tau_j\})$ (2.8), (2.9) удобно выбирать не норму $\| l(\cdot) \|$ вида (2.7), а какую-нибудь другую норму. Часто оказывается удобной норма

$$\| l(\cdot) \| = (M \{ | l(\omega) |^2 \})^{1/2}$$

Например, такую норму можно выбрать в случае, когда показатель γ (1.7) имеет вид

$$\gamma = | x[\vartheta] | \tag{6.9}$$

В этом случае в (1.7) $\varphi \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ и предыдущие построения можно упростить, не вводя дополнительные координаты η и ζ. Но при этом в рассуждениях могут возникнуть детали, связанные с тем, что решения вспомогательных задач вида (6.5) могут оказаться не единственными. Поэтому и в случае показателя γ (6.9) может оказаться целесообразным для нахождения вектора $l^\circ[t_i]$ сохранить описанную выше полную схему вычислений. Разумеется, в этой схеме в тех ее частях, где фигурируют функции φ и ψ, соответствующие члены автоматически выпадут.

Вместо последовательностей случайных величин ξ_j можно выбрать какой-либо непрерывный по времени τ вероятностный процесс $\xi[\tau, \omega]$ с независимыми приращениями. Например, можно выбрать стандартный броуновский процесс. Тогда можно не вводить разбиения $\Delta\{\tau_j\}$ и теоретические рассуждения принимают более сжатую форму. Однако в случае непрерывного процесса $\xi[\tau, \omega]$ оказывается более сложной проблема существования максимизирующего случайного элемента $l(\omega)$, так как соответствующий искомый мартингал $l_*[\tau] = M\{l(\omega) \mid \{\xi[\nu, \omega], \tau_* \leqslant \nu < \tau\}$ оказывается менее приспособленным для этой вспомогательной проблемы. Подчеркнем, что трудность возникает с существованием именно всего случайного вектора. Максимизирующее значение $l^\circ[t] = l^\circ(t, Y[t], \varepsilon)$ для вектора l_*, играющего роль математического ожидания $M\{l(\omega)\}$, существует и при выборе непрерывного процесса $\xi[\tau, \omega]$.

Вместо сигнала $q^*[t]$ можно использовать какой-нибудь другой носитель информации. Так, можно использовать информационные множества $G[t]$, которые получаются тем или иным путем и складываются из фазовых состояний, совместимых с текущей информацией.

Например, в случае показателя γ (6.9) изложенная теория без изменения по существу переформулируется понятным образом в терминах множеств $G[t]$, складывающихся из возможных состояний $x[t]$. При этом роль программ-векторов $r(t, \omega)$ перелагается на программы-множества

$$N(\tau, \omega) = \Big\{ w : w = w_G - \int_{t_0}^{\tau} X[\tau, \nu] B(\nu) u(\nu, \omega) d\nu, \ w_G \in$$

$$\in G(\tau, \omega), \ \omega \in \Omega, \ \tau_* < \tau \leqslant \vartheta \Big\}$$

Тогда выкладки переписываются автоматически введением в нужных местах неупреждающих по $\xi_j = \xi[\tau_j]$ опорных функций $n(l, \tau, \omega)$ множеств $N(\tau, \omega)$ (или множеств со $N(\tau, \omega)$). В таком виде соответствующие записи подчас формально даже упрощаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский А. Н., Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 579—586.
2. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Одна задача оптимального управления на минимум гарантированного результата.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 2, с. 6—23.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

5. *Осипов Ю. С.* Позиционное управление в параболических системах.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 195—201.
6. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
7. *Красовский Н. Н.* Задача об управлении в условиях неполной информации.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 533—539.
8. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
9. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 517 с.
10. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* О программном синтезе позиционного управления.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 6, с. 1309—1312.

Свердловск

Поступила в редакцию 3.X.1984