Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 532.539

К ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ВОЛН В НАКЛОННОМ КАНАЛЕ

Тер-Крикоров А. М.

Методом, близким к асимптотическому методу малого параметра [1—3], исследуются установившиеся длинные волны в наклонном канале, вырождающиеся в солитон при длине волны, стремящейся к бесконечности. По аналогии с теорией устойчивости упругих стержней можно представить процесс перехода от одномерного установившегося потока к двумерному как мгновенный, в результате которого все прямолинейные линии тока искривляются, но сохраняются значения чисел Фруда и Рейнольдса. Показано, что решения рассматриваемого типа могут существовать, если скорость распространения волны и число Рейнольдса близки к критическим значениям. Получены простые формулы для профиля волны и зависимости скорости распространения от амплитуды. Если число Рейнольдса мало, а угол наклона канала близок к $\pi/2$, то те же семые формулы справедливы и без предположения о близости числа Рейнольдса к критическому значению. Предлагаемый метод открывает принципиальную возможность доказательства теоремы существования и единственности по аналогии с [1—3]. Технические сложности связаны с оценками функции Грина для бигармонического оператора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившийся двумерный поток однородной несжимаемой тяжелой вязкой жидкости со свободной границей над прямолинейным дном, наклоненным под углом α к линии горизонта. Предположим, что двумерный поток возник в результате мгновенной потери устойчивости одномерным потоком, характеризующимся числами Рейнольдса $R = Q/\nu$ и Фруда $F = gH^3/Q^2$ (Q — расход, H — глубина потока). Уравнения движения будем записывать в системе координат, движущейся параллельно дну канала со скоростью волны c. Начало координат выбрано на невозмущенной свободной границе, ось y параллельна силе тяжести. Расход вычисляется в неподвижной системе координат.

Для скорости одномерного потока имеем следующие формулы [4]:

$$a(\eta) = \frac{3}{2}(\eta^2 - 1) + c = \frac{3}{2}(\eta^2 + \lambda), \quad \lambda = \frac{2}{3}c - 1 \tag{1.1}$$

(η — ордината). Введем также функции тока для одномерного потока

$$\frac{d\psi}{d\eta} = a(\eta) = \frac{3}{2}\eta^2 + \lambda, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi = \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{3}{2}\lambda\eta$$

Если $\lambda > 0$, то $a(\eta) > 0$ и существует обратная функция

$$\eta = \eta(\psi), \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda, \quad \frac{d\eta}{d\psi} = 1/a(\eta) \tag{1.2}$$

2. Преобразование уравнений двумерного потока. Введя для двумерного потока функцию тока $\psi(x, y)$ и воспользовавшись соотношением $FR \sin\alpha = 3$ [4], уравнения Навье — Стокса можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{3}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

На свободной границе $y = Y(x)$ должны быть равны нулю касательные напряжения. Придадим этому условию следующий вид:

$$y = Y(x), \quad p = \frac{2}{R}\frac{1+Y'(x)^2}{1-Y'(x)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{4Y'(x)}{1-Y'(x)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 0$$

Свободная граница и дно должны быть линиями тока, а на дне — выполнено условие прилипания

$$\psi(x, Y(x)) = 0, \quad \psi(x, 1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1) = c \tag{2.3}$$

Трудности решения нелинейной граничной задачи (2.1)—(2.3) связаны с тем, что свободная граница $y = Y(x)$ неизвестна и должна быть определена в процессе решения. Задача усложняется в нестационарном и трехмерном случаях, а также при учете поверхностного натяжения на свободной границе.

Заметим, что в формулировку задачи (2.1)—(2.3) входит несколько параметров и все асимптотические методы построения приближенного решения основаны на некоторых априорных предположениях о характере функциональной зависимости решения от параметров. Обычно решение разыскивается в виде формального ряда по степеням одного малого параметра, выбор которого диктуется физическими соображениями. Формальные ряды будут асимптотическими для точного решения только при правильном выборе малого параметра.

В ряде работ ([5—7] и др.) к задачам о волнах, образующихся при стекании вязкой пленки по наклонной плоскости, была применена методика Кортевега — де Вриза. Уравнение типа Кортевега — де Вриза использовалось для исследования устойчивости одномерного потока и стационарных двумерных периодических и солитонных решений [7—9]. Другие ссылки на работы этого направления можно найти в [5—9]. В [10] формальное разложение по малому параметру применялось к стационарной системе (2.1) — (2.3) в предположении, что число Рейнольдса мало и $\alpha \approx \pi/2$, но не было получено правильных формул для профиля волны и зависимости скорости распространения от амплитуды.

Ниже применяется методика, использованная в [11, 12] и основанная на сведении задачи (2.1) — (2.3) к граничной задаче для области с известной границей.

В силу условий (2.3) в независимых переменных x, ψ области течения соответствует прямолинейная полоса. Удобно вместо независимой переменной ψ ввести независимую переменную η, связанную с ψ соотношениями (1.2). Тогда области течения будет соответствовать полоса $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Ордината $y(x, \eta)$ станет зависимой переменной. Дифференцируя тождество $y(x, \eta(\psi(x, y))) \equiv y$, получаем соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{a(\eta)}{y_\eta(x,\eta)}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{a(\eta)\,y_x(x,\eta)}{y_\eta(x,\eta)} \tag{2.4}$$

$$z = \Delta\psi = \frac{1}{y_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{a}{y_\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a y_x}{y_\eta}\right) + \frac{y_x}{y_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{a y_x}{y_\eta}\right)$$

Так как в силу (1.1) $a(1) = c$, в силу (2.3) получаем граничные условия для $y(x, \eta)$

$$y(x, 1) = y_\eta(x, 1) = 1 \tag{2.5}$$

Если в качестве зависимой переменной взять функцию $\omega(x, \eta)$, следующим образом выражающуюся через $y(x, \eta)$

$$y(x,\eta) = \eta - \frac{\omega(x,\eta)}{a(\eta)} - \int_1^\eta \varphi\left[\left(\frac{\omega(x,t)}{a(t)}\right)_t\right] dt \tag{2.6}$$

$$\omega(x, 1) = \omega_\eta(x, 1) = 0, \quad \varphi(u) = e^{-u} - 1 + u$$

то граничные условия (2.5) будут выполнены.

Систему уравнений Навье — Стокса (2.1) и граничных условий (2.2) можно теперь свести к решению интегродифференциального уравнения с начальным условием при $\eta = 0$

$$\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^3} = 3\varphi\left[\left(\frac{3\omega}{a}\right)_\eta\right] - 2a\left(\frac{\omega}{a}\right)^2_{\eta\eta} + F(y)\exp\left[-\left(\frac{3\omega}{a}\right)_\eta\right] \tag{2.7}$$

$$\eta = 0, \quad \omega_{\eta\eta} - \mu\omega = a\chi(y)\exp(-2u_\eta), \quad \mu = 2/\lambda$$

$$F(y) = \left\{-3\operatorname{ctg}\alpha\, y_x + 2a\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{y_\eta}\frac{1+y_x^2}{1-y_x^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)\right]\right\}_{\eta=0} +$$

$$+\int_0^\eta\left[\frac{\partial}{\partial x}(z_\eta y_x - z_x y_\eta) - Ra^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)\right]d\eta + \frac{Ra^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)^2 -$$

$$- R\frac{a^2}{y_\eta^3}y_{x\eta} - \frac{z_\eta}{y_\eta}y_x^2 - \frac{1}{y_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[z - \frac{1}{y_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{a}{y_\eta}\right)\right] - z_x y_x$$

$$\chi(y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)^2 - \frac{2}{1-y_x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)^2$$

Функция y выражается через ω соотношением (2.6). Граничные условия для $\omega(x, \eta)$ содержатся в (2.6), $z(y)$ определено в (2.4).

Заметим, что уравнения и граничные условия инвариантны относительно сдвига по независимой переменной x. Поэтому и решение определено с точностью до сдвига. Для устранения этой неопределенности потребуем, чтобы ось y проходила через максимум или минимум профиля свободной границы. Это приводит к следующему условию:

$$y_x(0, 0) = 0 \tag{2.8}$$

Выделим также линейные части у операторов $F(y)$ и $\chi(y)$

$$F_{\text{lin}}(y) = 2\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial\omega(x,0)}{\partial x} - \frac{\partial^3\omega(x,0)}{\partial x^2\partial\eta} - 2\frac{\partial^3\omega(x,\eta)}{\partial x^2\partial\eta} + \tag{2.9}$$

$$+\int_0^\eta Ra\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}d\eta - \int_0^\eta\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}d\eta + R\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial\omega}{\partial\eta} - a'\omega\right), \quad a\chi_{\text{lin}} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$$

3. **Построение приближенного решения.** Форма уравнения и граничных условий (2.7) и (2.6) позволяет применить общую схему построения теории длинных волн [1—3]. Отбрасывая в уравнениях и граничных условиях нелинейные члены и члены, содержащие производные по x, приходим к задаче на собственные значения

$$v'''(\eta) = 0, \quad v''(0) - \mu_0 v(0) = 0, \quad v(1) = v'(1) = 0 \tag{3.1}$$

Можно проверить, что задача (3.1) имеет единственное собственное значение и собственную функцию

$$\mu_0 = 2, \quad v_0(\eta) = \frac{3}{2}(\eta - 1)^2 = a_0 - 3\eta, \quad a_0 = \frac{3}{2}(\eta^2 + 1) \tag{3.2}$$

Из соотношения $\mu = 2/\lambda$ следует, что

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\mu_0 = 1, \quad c_0 = \frac{3}{2}(1 + \lambda_0) = 3$$

Таким образом, критическое значение для скорости распространения волны равно трем, что совпадает с результатом работы [10].

Будем считать, что угол наклона дна канала удовлетворяет условию $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$. Положим $\mu = 2 - \varepsilon$, $R = R_0 + \varepsilon R_1$.

Малый параметр ε характеризует близость скорости распространения к критическому значению, так как

$$c = \frac{3}{2}(1 + \lambda) = 3 + \frac{3\varepsilon}{4 - 2\varepsilon}$$

Критическое значение числа Рейнольдса R_0 будет найдено в дальнейшем.

Сделаем обычное в теории длинных волн растяжение независимой переменной x и будем искать решение в виде ряда по степеням параметра $\sqrt{|\varepsilon|}$

(3.3) $$x = \xi\,|\varepsilon|^{1/2}, \quad \omega = |\varepsilon|\,\omega_1 + |\varepsilon|^{3/2}\omega_2 + |\varepsilon|^2\omega_3 + \ldots$$

Подставляя разложение (3.3) в уравнения и граничные условия (2.6), (2.7), получаем последовательность граничных задач для определения функций $\omega_i(\xi, \eta)$. Для ω_1 получаем граничную задачу

$$\frac{\partial^3\omega_1}{\partial\eta^3} = 0, \quad \frac{\partial^2\omega_1}{\partial\eta^2}(\xi, 0) - 2\omega_1(\xi, 0) = 0, \quad \omega_1(\xi, 1) = \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}(\xi, 1) = 0.$$

В силу (3.1) и (3.2) ее решение имеет вид

(3.4) $$\omega_1(\xi, \eta) = C(\xi)\, v_0(\eta)$$

где $C(\xi)$ — неизвестная функция, которая должна быть определена из последующих приближений.

Для определения ω_2 получаем граничную задачу

(3.5) $$\frac{\partial^3\omega_2}{\partial\eta^3} = R_0\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}a_0 - a_0'\omega_1\right)_\xi + 2\operatorname{ctg}\alpha\,\frac{\partial\omega_1(\xi, 0)}{\partial\xi} =$$
$$= C'(\xi)\,E(\eta), \quad E(\eta) = 3\operatorname{ctg}\alpha - \frac{9}{2}R_0(1 - \eta^2)$$
$$\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\eta^2}(\xi, 0) - 2\omega_2(\xi, 0) = 0, \quad \omega_2(\xi, 1) = \frac{\partial\omega_2}{\partial\eta}(\xi, 1) = 0$$

Несложным вычислением доказывается справедливость следующей леммы:

Лемма. Пусть $f(\eta)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция, α — вещественное число. Неоднородная граничная задача

$$d^3v/d\eta^3 = f(\eta), \quad v''(0) - 2v(0) = \alpha, \quad v(1) = v'(1) = 0$$

разрешима в том и только том случае, когда выполнено условие

(3.6) $$\alpha + \int_0^1 (1 - t^2) f(t)\, dt = 0$$

Применяя лемму к граничной задаче (3.5), получаем условие ее разрешимости в виде

$$\int_0^1 (1 - t^2)\, E(t)\, dt = 0$$

Подставляя из (3.5) выражение для функции $E(t)$, получаем, что критическое значение числа Рейнольдса равно $R_0 = {}^5/_6 \operatorname{ctg}\alpha$. Такому значению соответствует потеря устойчивости одномерного потока (см., например, [8]). Если в качестве единицы скорости принять максимальную скорость невозмущенного потока, а не среднюю, то $R_0 = {}^5/_4 \operatorname{ctg}\alpha$.

Для функции ω_2 получаем следующее выражение:

(3.7) $$\omega_2(\xi, \eta) = C'(\xi)\,\delta(\eta) + D(\xi)\, v_0(\eta), \quad \delta(\eta) = \frac{3}{48}(2\eta^3 - \eta^5 - \eta)$$

где $D(\xi)$ — новая неизвестная функция. Таким образом, из уравнений второго приближения определяется критическое значение числа Рейнольдса, но не определяется неизвестная функция $C(\xi)$.

Сформулируем теперь граничную задачу для определения функции $\omega_3(\xi, \eta)$. Имеем, используя выражения (3.4) и (3.7), для функций

$\omega_1(\xi, \eta)$ и $\omega_2(\xi, \eta)$

$$(3.8) \qquad \frac{\partial^3\omega_3}{\partial\eta^3} = A(\eta)C(\xi)^2 + B(\eta)C''(\xi) + E(\eta)D'(\xi)$$

$$\omega_3(\xi, 1) = \frac{\partial\omega_3(\xi, 1)}{\partial\eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2\omega_3(\xi, 0)}{\partial\eta^2} - 2\omega_3(\xi, 0) = \frac{3}{2}\operatorname{sgn}\varepsilon C(\xi) + \frac{3}{2}C''(\xi)$$

$$A(\eta) = 54\frac{(1-\eta^2)^2}{(1+\eta^2)^4} - 48\frac{\eta^2(3-\eta^2)^2}{(1+\eta^2)^5}$$

$$B(\eta) = 9 - 6\eta + \frac{5}{64}\operatorname{ctg}^2\alpha(-1 + 7\eta^2 - 3\eta^4 - 3\eta^6)$$

Применяя условие разрешимости (3.6) для задачи (3.8), получаем дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции $C(\xi)$. При этом нужно учесть, что функция $E(\eta)$ ортогональна функции $(1-\eta^2)$

$$(3.9) \qquad a_1C''(\xi) + a_2C'(\xi) + a_3C(\xi) = 0$$

$$a_1 = \frac{3}{2} + \int_0^1 B(\eta)(1-\eta^2)\,d\eta = 9, \quad a_2 = \int_0^1 A(\eta)(1-\eta^2)\,d\eta = 6,$$

$$a_3 = \frac{3}{2}\operatorname{sgn}\varepsilon$$

Второй интеграл в (3.9) вычисляется подстановкой $\eta = \operatorname{tg}\varphi/2$. Обратим внимание на тот факт, что коэффициенты уравнения (3.9) не зависят от угла наклона дна канала α. Уравнение (3.9) имеет вид $C''(\xi) + {}^2/_3C^2(\xi) = {}^1/_6\operatorname{sgn}\varepsilon C(\xi)$. Оно исследовано неоднократно (см., например, [1—3]). Периодические решения существуют только в том случае, когда $\varepsilon > 0$. Они могут быть выражены через эллиптическую функцию Якоби $\operatorname{cn}(\xi, k)$. Когда $k \to 1$ и, следовательно, период стремится к бесконечности, периодическое решение вырождается в апериодическое (солитон). В этом случае

$$(3.10) \qquad C(\xi) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2\sqrt{6}}\right)$$

Формулы для свободной границы и скорости распространения имеют вид

$$(3.11) \qquad Y(x) = -\frac{3\varepsilon}{8}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}\right) + o(\varepsilon), \quad c = 3 + \frac{3\varepsilon}{4} + o(\varepsilon)$$

В размерных переменных

$$(3.12) \qquad Y(x) = -a\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{3}\sqrt{\frac{a}{H^3}}\right), \quad c = \frac{Q}{H}\left(3 + \frac{2a}{H}\right), a > 0$$

Поскольку решения уравнения (3.9) определены с точностью до сдвига, то выбираем решение, удовлетворяющее условию (2.8).

Получаем, что в первом приближении профиль волны и скорость распространения зависят только от безразмерной амплитуды и не зависят от угла наклона дна канала и числа Рейнольдса. Это объясняется связями между параметрами: $FR\sin\alpha = 3$, $R = {}^5/_6\operatorname{ctg}\alpha + O(\varepsilon)$, $c = 3 + O(\varepsilon)$.

Первая из формул (3.12) может быть выведена из выражения для профиля волны, приведенного в [5].

4. Построение дальнейших приближений. Решая граничную задачу (3.8), получаем

$$\omega_3(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + D'(\xi)\delta(\eta) + K(\xi)v_0(\eta)$$

где функция $\varphi(\xi, \eta)$ известна, функция $\delta(\eta)$ определена равенством (3.7), а $K(\xi)$ — новая неизвестная функция. Граничная задача для определения

ω_4 имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^3\omega_4}{\partial\eta^3}=27\left(\frac{\omega_1}{a_0}\right)_\eta\left(\frac{\omega_2}{a_0}\right)_\eta-4a_0\left(\frac{\omega_1}{a_0}\right)_{\eta\eta}\left(\frac{\omega_2}{a_0}\right)_{\eta\eta}-2\frac{\partial^3\omega_2}{\partial\xi^2\partial\eta}+$$
$$+R\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a_0\frac{\partial\omega_3}{\partial\eta}-a_0'\omega_3\right)+2\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial\omega_3(\xi,0)}{\partial\xi}-$$
$$-\frac{\partial^3\omega_2(\xi,0)}{\partial\xi^2\partial\eta}+\varphi_1(\xi,\eta),\quad \omega_4(\xi,1)=\frac{\partial\omega_4(\xi,1)}{\partial\eta}=0$$
$$\frac{\partial^2\omega_4(\xi,0)}{\partial\eta^2}-2\omega_4(\xi,0)=-\operatorname{sgn}\varepsilon\omega_2(\xi,0)+\frac{\partial^2\omega_2(\xi,0)}{\partial\xi^2}+\varphi_2(\xi)$$

где $\varphi_1(\xi,\eta)$ и $\varphi_2(\xi)$ — некоторые известные функции. Нетрудно показать, что они будут многочленами от $C(\xi)$. Воспользовавшись условием разрешимости (3.6), получаем уравнение для определения неизвестной функции $D(\xi)$

$$D''(\xi)+\frac{4}{3}C(\xi)D(\xi)-\frac{1}{6}\operatorname{sgn}\varepsilon D(\xi)=\psi(\xi) \tag{4.1}$$

где $\psi(\xi)$ — известная функция (многочлен относительно $C(\xi)$).

Уравнения типа (4.1) исследованы в [1—3]. Одно частное решение однородного уравнения есть $y_1=C'(\xi)$, второе (y_2) может быть вычислено по формуле Лиувилля. Если $C(\zeta)$ есть периодическое решение уравнения (3.9), то получаем, что $y_2(\xi)=\zeta(\xi)+B\xi C'(\xi)$, где $\zeta(\xi)$ — четная периодическая функция, B — некоторая постоянная, зависящая от периода. Периодическое решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условию $D'(0)=0$, имеет вид

$$D(\xi)=y_2(\xi)\int_L^\xi\psi(t)y_1(t)\,dt-y_1(\xi)\int_0^\xi\psi(t)y_2(t)\,dt+$$
$$+\frac{y_2(\xi)}{2BL}\int_{-L}^{L}\psi(t)y_2(t)\,dt$$

Заметим, что для построения дальнейших приближений придется решать каждый раз уравнение (4.1), но с другими правыми частями.

Таким образом, все члены ряда (3.3) могут быть последовательно построены. Ряд (3.3), вообще говоря, сходиться не будет. По аналогии с теорией длинных волн в идеальной жидкости можно ожидать, что он будет равномерно асимптотическим для точного решения при $\varepsilon\to0$.

Заметим еще, что если число Рейнольдса мало, а угол наклона α близок к $\pi/2$, точнее $\operatorname{ctg}\alpha=o(\varepsilon)$, $R=o(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to0$, то решение задачи нужно искать в виде ряда по целым степеням параметра ε, $\omega=\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots$. В первом приближении получим $\omega_1(\xi,\eta)=C(\xi)v_0(\eta)$, где неизвестная функция $C(\xi)$ определяется из уравнений второго приближения. Уравнения для определения $\omega_2(\xi,\eta)$ имеет вид (3.8), если только положить в этих уравнениях $\operatorname{ctg}\alpha=0$. Уравнение для определения свободной границы сохранит форму (3.12), но при этом нет необходимости связывать число Рейнольдса и угол наклона соотношением $R={}^5/_6\operatorname{ctg}\alpha$. Для малых углов наклона и больших чисел Рейнольдса нужно развивать другую асимптотическую теорию, близкую к теории пограничного слоя. Эта задача здесь не рассматривается (см., например, [13]).

5. Некоторые соображения о доказательстве теорем существования и единственности. В [1—3] была разработана общая схема доказательства теорем существования и единственности длинных волн, вырождающихся в уединенную при длине волны, стремящейся к бесконечности. Эта схема с некоторыми изменениями применима и к теории катящихся волн. Технические сложности при этом возрастают.

Оставим в уравнениях (2.7) только линейные члены и квадратичные члены, не содержащие производных по x. Будем для простоты считать, что число Рейнольдса мало (следовательно, угол α близок к $\pi/2$). Поэтому отбросим в уравнениях (2.7) члены, содержащие R и $\operatorname{ctg} \alpha$. Учитывая (2.9), получаем

(5.1) $$\partial^3\omega/\partial\eta^3 = L_0\omega + F_{\text{lin}}\omega, \quad \omega(x, 1) = \omega_\eta(x, 1) = 0$$

$$F_{\text{lin}} = -\frac{\partial^3\omega(x, 0)}{\partial x^2\,\partial\eta} - 2\frac{\partial^3\omega(x, \eta)}{\partial x^2\,\partial\eta} - \int\limits_0^\eta \frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}\,d\eta$$

$$L_0\omega = \frac{27}{2}\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2_{\eta} - 2a_0\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2_{\eta\eta}$$

(5.2) $$\omega_{\eta\eta}(x, 0) - 2\omega(x, 0) = -\varepsilon\omega(x, 0) + \frac{\partial^2\omega(x, 0)}{\partial x^2}$$

Задачу решения интегродифференциального уравнения (5.1) с граничными условиями (5.2) и (2.6) можно заменить эквивалентной граничной задачей для дифференциального уравнения четвертого порядка. Дифференцируя (5.1) по η, получаем

(5.3) $$\Delta^2\omega = \frac{\partial}{\partial\eta}(L_0\omega)$$

где Δ — оператор Лапласа. Полагая в (5.1) $\eta = 0$, получаем граничное условие

(5.4) $$\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^3} = -3\frac{\partial^3\omega}{\partial x^2\,\partial\eta} + L_0\omega, \quad \eta = 0$$

Таким образом, нужно решать уравнение четвертого порядка (5.3) при граничных условиях (5.2), (5.4) и (2.6).

Аналогичные задачи для некоторых классов эллиптических уравнений второго порядка были рассмотрены [1—3] методом расщепления, основанным на проектировании функции ω на направление собственной функции $v_0(\eta)$ и его ортогональное дополнение. В силу наличия в уравнении (5.3) смешанных производных и несамосопряженности соответствующих дифференциальных операторов этот метод непосредственно неприменим к уравнению (5.3).

Можно пойти по более громоздкому пути, использованному в работах [11, 12]. Для определенности будем иметь в виду случай уединенной волны. Рассмотрим линейную неоднородную граничную задачу для бигармонического оператора в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$

(5.5) $$\Delta^2 u = \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial\eta}, \quad u(x, 1) = \frac{\partial u}{\partial\eta}(x, 1) = 0$$

$$\frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial\eta^3} + 3\frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial x^2\partial\eta} = f(x, 0)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} - 2u(x, 0) = \varphi(x)$$

где $\varphi(x)$ и $f(x, \eta)$ — достаточно гладкие функции, имеющие при $x \to \infty$ экспоненциальный порядок убывания.

Если построить функцию Грина для задачи (5.5), то можно нелинейную задачу для уравнения (5.3) свести к нелинейному интегродифференциальному уравнению. Применяя преобразование Фурье, можно функцию Грина задачи (5.5) выразить через контурный интеграл от мероморфной функции, имеющей в нуле кратный полюс. При помощи теории вычетов можно представить функцию Грина в виде суммы некоторого ряда, все члены которого (за исключением первого, соответствующего вычету в нуле) имеют экспоненциальный порядок убывания на бесконечности. Расщеплению функции Грина будет соответствовать и расщепление интегродифференциального уравнения. Дальнейшее доказательство можно вести по схеме [1—3]. Технические сложности весьма значительны, но преодолимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ter-Krikorov A. M.* Théorie exacte des ondes longues stationnaires dans un liquide hétérogène.— J. Méc., 1963, v. 2, No. 3, p. 351—376.
2. *Тер-Крикоров А. М., Треногин В. А.* Существование и асимптотика решений типа «уединенной волны» для одного класса нелинейных эллиптических уравнений.— Матем. сб., 1963, т. 62, № 3, с. 263—274.
3. *Тер-Крикоров А. М., Треногин В. А.* Решения типа длинных волн для квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной полосе.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 3, с. 496—508.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
5. *Benney D. J.* Long waves on liquid films.— J. Math. and Phys., 1966, v. 45, No. 2, p. 150—155.
6. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений.— Уч. зап. Пермск. ун-та, 1974, № 316, с. 91—104.
7. *Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю.* Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 6, с. 1321—1323.
8. *Chia-Shun-Yih.* Stability of liquid flow down an inclined plane.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, No. 3, p. 321—334.
9. *Петвиашвили В. И.* Неустойчивость течения идеальной жидкости со свободной поверхностью.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 4, с. 787—789.
10. *Иванилов Ю. П.* Катящиеся волны в наклонном канале.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, с. 1061—1076.
11. *Friedrichs K. O., Hyers D. H.* The exitence of solitary waves.— Comm. Pure and Appl. Math., 1954, v. 7, No. 3, p. 517—550.
12. *Тер-Крикоров А. М.* Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, с. 622—636.
13. *Демехин Е. А., Демехин И. А., Шкадов В. Я.* Солитоны в стекающих слоях вязкой жидкости.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 4, с. 9—16.

Москва

Поступила в редакцию
17.I.1983