

УДК 531+539.3

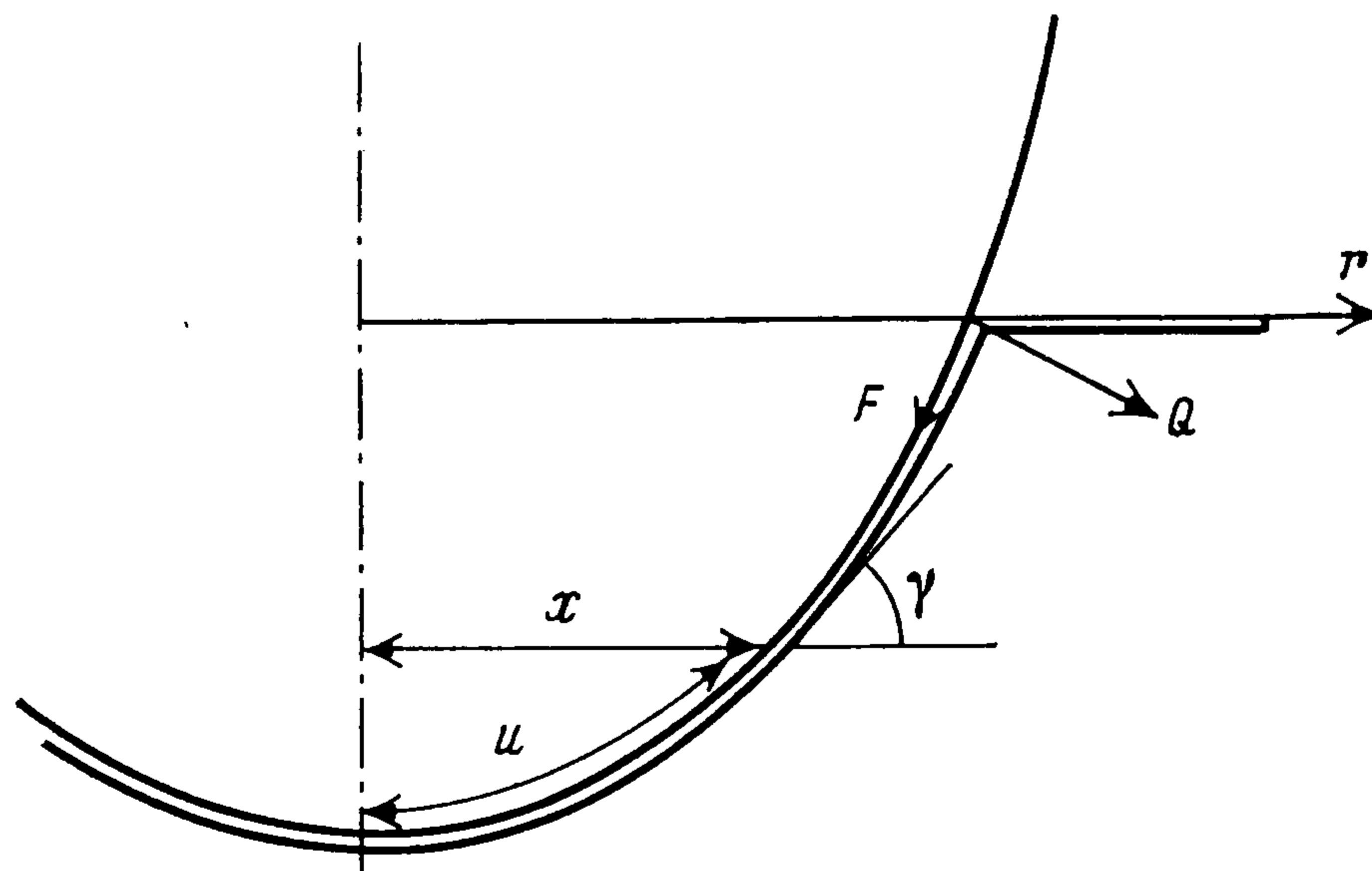
О ДИНАМИКЕ СОУДАРЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГИБКОЙ НИТЬЮ И МЕМБРАНОЙ

Григорян С. С., Муталлимов Ш. М.

Даются точный анализ граничных условий в точке встречи элемента абсолютно гибкой нити или мембраны с поверхностью ударяющего по ней со «сверхзвуковой» скоростью жесткого тела, постановка задачи о таком соударении, сопровождающемся обрывом нити или разрушением мембраны, и построение ее решения для автомодельного режима удара с постоянной скоростью.

Основы математической теории соударения твердого тела с гибкими конструкциями в виде нитей или мембран были заложены Х. А. Рахматулиным [1]. Был получен ряд интересных результатов, однако некоторые вопросы теории выяснены не до конца. В частности, не было сделано окончательных выводов о множестве возможных формулировок граничного условия в точке встречи элемента гибкой конструкции с поверхностью твердого тела. Не было также постановки задачи о соударении, сопровождающемся разрушением гибкой конструкции. Ниже дается решение этих двух вопросов.

1. Ограничимся рассмотрением случая, когда материал гибкой конструкции описывается линейным законом упругости в терминах условных напряжений, а соударения таковы, что точка встречи элемента конструкции с поверхностью тела перемещается по конструкции со «сверхзвуковой» скоростью, т. е. со скоростью, превышающей скорость распространения упругих волн. Поскольку в точке встречи происходит резкий изгиб конструкции (фиг. 1), т. е. наблюдается «скачкообразное» изменение вектора



Фиг. 1

количества движения элемента конструкции, а также его напряженно-деформированного состояния, в этой точке будет развиваться локальная реакция поверхности ударяющего тела, которую схематизируют сосредоточенной силой. С учетом сказанного при идеализированном рассмотрении задачи, когда гибкая конструкция (нить или мембрана) рассматривается как одномерный или двумерный деформируемый континуум, механика событий в малой окрестности упомянутой точки «излома» конструкции моделируется путем введения «волны сильного разрыва», т. е. вводится схема со скачкообразным изменением механических параметров в этой точке.

В качестве механических характеристик процесса в одномерном случае вводятся лагранжевая и эйлерова координаты r и u , отсчитываемые соответственно вдоль конструкции от точки первого ее соприкосновения с ударяющим телом и вдоль поверхности этого тела, радиальное и азимутальное напряжения $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$ (в случае нити — одно напряжение вдоль нити $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_x$), соответствующие деформации

$$(1.1) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} - 1, \quad \varepsilon_\theta = \frac{x(u)}{r} - 1$$

где $x(u)$ — эйлерова координата, отсчитываемая вдоль недеформированной конструкции (фиг. 1), «условные» напряжения σ_r, σ_θ по формулам (плотность материала полагаем постоянной)

$$(1.2) \quad \sigma_r = \frac{\bar{\sigma}_r}{1 + \varepsilon_r}, \quad \sigma_\theta = \frac{\bar{\sigma}_\theta}{1 + \varepsilon_\theta}$$

и принимается закон упругости в виде

$$(1.3) \quad \sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r)$$

где E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

В случае нити вместо (1.3) имеем $\sigma_x = E \varepsilon_x$.

Уравнения движения записываются в виде

$$(1.4) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta \cos \gamma}{r} + \rho \frac{dV}{dt} \sin \gamma - \\ - \mu \left(\frac{\sigma_r}{r} \sin \gamma + \sigma_r \frac{d\gamma(u)}{du} + \rho \frac{dV}{dt} \cos \gamma \right) \text{sign} \frac{\partial u}{\partial t}$$

в случае мембраны и

$$(1.5) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} \sin \gamma - \mu \left(\sigma_x \frac{d\gamma(u)}{du} + \rho \frac{dV}{dt} \cos \gamma \right) \text{sign} \frac{\partial u}{\partial t}$$

в случае нити. Здесь $V = V(t)$ — скорость ударяющего тела, γ — угол между невозмущенным положением нити (мембраны) и касательной к образующей осесимметричной поверхности ударяющего тела в данной точке, зависимость $\gamma = \gamma(u)$ определяется формой тела, ρ — плотность материала деформируемой конструкции, μ — коэффициент трения конструкции о поверхность тела. Уравнения (1.4), (1.5) записаны в системе координат, связанной с ударяющим телом, поэтому в них возникли силы инерции $\rho dV/dt$.

Соотношения на волне сильного разрыва имеют вид

$$(1.6) \quad \frac{b - v_1}{1 + \varepsilon_{r1}} = \frac{b/\cos \gamma - v_2}{1 + \varepsilon_{r2}} \\ \rho (b - v_1) (v_2 - v_1 \cos \gamma - V \sin \gamma) = (\sigma_{r1} \cos \gamma - \sigma_{r2} - \\ - F) (1 + \varepsilon_{r1}) \\ \rho (b - v_1) (V \cos \gamma - v_1 \sin \gamma) = (Q + \sigma_{r1} \sin \gamma) (1 + \varepsilon_{r1}) \\ v_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_1, \quad v_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_2, \quad b = V \text{ctg} \gamma$$

Индексы 1, 2 относятся к величинам перед и за фронтом сильного разрыва, F, Q — касательная и нормальная к поверхности тела составляющие сосредоточенной силы — реакции поверхности тела.

При записи соотношений (1.6) принято существенное предположение о том, что элемент конструкции (нити, мембраны) непосредственно после

соударения с поверхностью тела располагается на этой поверхности. Последнее в некотором смысле означает, что соударение неупруго и может рассматриваться как схематизация учета необратимых эффектов, сопровождающих локальный изгиб на конечный угол тонкой конструкции в месте ее соударения с поверхностью тела.

Далее будем рассматривать, как уже говорилось, «сверхзвуковой» случай, когда $b = V \operatorname{ctg} \gamma > a$, где

$$(1.7) \quad a = \sqrt{\frac{E}{(1 - \nu^2)\rho}}$$

— скорость распространения упругих волн в конструкции, и, следовательно, возмущения из области за фронтом сильного разрыва не могут влиять на параметры непосредственно на этом фронте, которые, таким образом, должны находиться независимо от поведения решения в области за фронтом. Тогда будем иметь $\varepsilon_{r1} = 0$, $\nu_1 = 0$ и соотношения (1.6) приведутся к виду

$$(1.8) \quad \nu_2 = (1/\cos \gamma - 1 - \varepsilon_{r2}) V \operatorname{ctg} \gamma$$

$$(1.9) \quad F = -\sigma_{r2} + \rho V \operatorname{ctg} \gamma (V \sin \gamma - \nu_2)$$

$$(1.10) \quad Q = \rho V^2 \operatorname{ctg} \gamma \cos \gamma$$

К выписанным соотношениям, конечно, должно быть добавлено условие непрерывности смещений

$$(1.11) \quad x(u_2) = x(u_1) = r$$

Используя (1.11) и (1.1), получаем $\varepsilon_{\theta 2} = 0$, а из (1.3) и (1.7) имеем

$$(1.12) \quad \sigma_{r2} = \rho a^2 \varepsilon_{r2}, \quad \sigma_{\theta 2} = \nu \sigma_{r2}$$

Подставив это выражение σ_{r2} в (1.9), получаем

$$(1.13) \quad F = -\rho a^2 \varepsilon_{r2} + \rho V \operatorname{ctg} \gamma (V \sin \gamma - \nu_2)$$

что вместе с (1.8), (1.10) образует систему трех уравнений для определения четырех величин F , Q , ε_{r2} , ν_2 , т. е. система остается незамкнутой.

Для ее замыкания нужно еще одно независимое соотношение. В качестве такового можно принять [2] условие

$$(1.14) \quad \nu_2 = 0 \quad (|F| < \mu_* Q)$$

которое может соблюдаться только при выполнении неравенства, записанного в скобках, где μ_* — коэффициент кулонова трения для пары материалов конструкции — поверхность ударяющего тела в терминах составляющих реакции поверхности F , Q . Вообще говоря, μ_* может отличаться от μ .

Можно думать, что условия (1.14) будут соблюдаться лишь для некоторого множества значений параметров задачи, граница которого определяется условием

$$(1.15) \quad |F| = \mu_* Q$$

Естественно принять, что за пределами указанного множества в качестве замыкающего условия нужно принять (1.15), при этом, конечно, будет уже $\nu_2 \neq 0$, так что замыкающее условие запишется в виде

$$(1.16) \quad F = \mu_* Q \operatorname{sign} \nu_2$$

Однако, как будет показано ниже, этим не исчерпываются все возможности. Оказывается, что при определенных значениях параметров задачи величины σ_{r2} , ε_{r2} , найденные с использованием замыкающего условия

(1.16), становятся отрицательными, что неприемлемо по физическим соображениям, ибо гибкие нить или мембрана не могут сопротивляться сжатию.

Для построения имеющего физический смысл решения в этих условиях необходима схематизация, учитывающая нулевую сопротивляемость конструкции сжатию. Условием, ограничивающим множество значений параметров задачи, для которых пригодно замыкание (1.16), очевидно, будет

$$(1.17) \quad \sigma_{r_2} = 0$$

В качестве такой схематизации принимаем требование выполнения соотношения (1.17) для множества значений параметров задачи, при которых решение с условием (1.16) дает $\sigma_{r_2} < 0$. При этом соотношения упругости (1.3) уже неприменимы и кроме (1.17) соблюдается условие (1.16).

Таким образом, множество всех возможных значений параметров задачи состоит из трех частей, для которых замыкающим соотношением соответственно являются (1.14), (1.16) и (1.17), с которым одновременно выполняется и (1.16). Ниже будет показано, что в пределах каждого из этих подмножеств решение единственно и непрерывно на их границах.

Рассмотрим сначала замыкающее условие (1.14). Подставив его в (1.8), (1.9), (1.12) получаем

$$(1.18) \quad \varepsilon_{r_2} = 1/\cos \gamma - 1, \quad F = \rho V^2 \cos \gamma - \rho a^2 (1/\cos \gamma - 1) \\ (\rho V^2 \cos \gamma - \rho a^2 (1/\cos \gamma - 1) < \mu_* \rho V^2 \operatorname{ctg} \gamma \cos \gamma)$$

Интересно отметить, что деформация ε_{r_2} и напряжения σ_{r_2} , σ_{θ_2} (см. (1.12)) в рассматриваемом режиме не зависят от скорости удара V , а зависят только от γ .

Граница множества значений параметров задачи, для которых применимо решение (1.18), определяется превращением неравенства в скобках в (1.18) в равенство]

$$(1.19) \quad \frac{\operatorname{ctg} \gamma \cos^2 \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*)}{1 - \cos \gamma} = \frac{1}{M^2}; \quad M = \frac{V}{a}, \quad \operatorname{tg} \gamma_* = \mu_*$$

На фиг. 2 показана зависимость (1.19) в переменных γ , M . Там же показана кривая

$$(1.20) \quad M = \operatorname{tg} \gamma$$

ограничивающая снизу значения M , соответствующие «сверхзвуковому» удару.

Итак, в области выше (1.20) и левее (1.19) решение дается формулами (1.18). Правее линии (1.19) решение должно быть построено с использованием замыкающего условия (1.16), что дает

$$(1.21) \quad \varepsilon_{r_2} = [M^2/(M^2 - \operatorname{tg}^2 \gamma)] [1/\cos \gamma - 1 - \sin \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*)] \\ v_2 = V \operatorname{ctg} \gamma (1/\cos \gamma - 1 - \varepsilon_{r_2})$$

Можно проверить, что на линии (1.19) ε_{r_2} и v_2 , определяемые формулами (1.18) и (1.21), совпадают, т. е. при переходе от одного режима к другому решение остается непрерывным. В области правее границы (1.19) должно быть $v_2 > 0$, $\varepsilon_{r_2} > 0$, что и имеет место на самом деле.

Переход к третьему возможному режиму совершается на линии, определяемой условием $\varepsilon_{r_2} = 0$, где ε_{r_2} берется по первой формуле (1.21). Это дает

$$(1.22) \quad \gamma = 2\gamma_*$$

т. е. границей перехода к третьему режиму служит прямая (1.22) на плоскости γ, M . Можно проверить, что эта прямая, граница (1.19) и линия (1.20) пересекаются в одной точке.

В области выше линии (1.20) и правее (1.22) решение определяется третьим режимом, характеризуемым условием (1.17). Этот режим соответствует процессу соударения, при котором за точкой соударения элемент нити (мембраны) сморщивается в радиальном направлении, собирается в «гармошку» так, что его первоначальная длина «сокращается», т. е. $\varepsilon_{r2} < < 0$, но это происходит при нулевых напряжениях. При этих условиях, как отмечалось, уже нельзя пользоваться связью между σ_{r2} и ε_{r2} , даваемой соотношениями упругости (1.3), а наряду с (1.17) нужно использовать (1.16). Решение для этого режима с учетом сказанного дается формулами

$$(1.23) \quad \varepsilon_{r2} = 1/\cos \gamma - 1 - \sin \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*)$$

$$v_2 = V \cos \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*)$$

Можно убедиться, что по этим формулам при $\gamma > 2\gamma_*$ получается $v_2 > > 0$, $\varepsilon_{r2} < 0$, т. е., действительно, происходит сморщивание. Сравнивая (1.23) и (1.21), можно установить непрерывность изменения ε_{r2} , v_2 при переходе через границу (1.22).

Таким образом построено полное решение задачи в окрестности точки соударения гибкой нити или мембраны с поверхностью твердого тела при сверхзвуковом режиме соударения. Решение это единственно, однозначно и меняется непрерывно при переходе через границы областей изменения входных параметров задачи, характеризующихся разными замыкающими условиями.

2. Для описания процесса разрушения гибкой деформируемой конструкции при ударе полезны схематизации процесса. В случае удара твердым телом по нити критерий отсутствия разрушения, очевидно, можно взять просто в виде

$$(2.1) \quad \max \sigma_x < \sigma_*$$

где σ_* — прочность на разрыв материала нити. Если при некоторой комбинации параметров в какой-то точке нити достигается условие

$$(2.2) \quad \max \sigma_x = \sigma_*$$

то для множества параметров задачи вне границы (2.2) решение строится с введением обрыва нити, т. е. условия $\sigma_x = 0$, в месте и в момент времени, где и когда, по решению задачи без разрушения, достигается условие (2.2).

Сложнее обстоит дело со схематизацией процесса разрушения мембраны. Понятно, что ограничивающее условие по-прежнему будет иметь вид (2.1), где только под σ_x надо подразумевать σ_n , т. е. любое нормальное напряжение. Можно, конечно, сформулировать и более сложное предельное условие, содержащее иные инварианты тензора напряжений. Главная трудность, однако, состоит в принятии правильной схемы разрушения, которое в случае мембраны уже не всегда будет представлять собой локальный обрыв, как в случае нити, а может оказаться процессом распространения разрывов по мембране.

В статических условиях обычно разрушение мембраны происходит путем распространения одного разрыва. В условиях высокоскоростного удара твердым телом по мембране схема разрушения будет иной — в месте,

где впервые будет достигнуто предельное условие типа (2.2), зародятся и начнут распространяться несколько разрывов, и их число, вообще говоря, будет расти со скоростью удара.

Это предположение основано на том, что при большой скорости процесса эффекты разгрузки элементов мембраны, примыкающих к кончику распространяющегося разрыва, не будут успевать распространиться на заметные расстояния и разгрузить зоны, приближающиеся к предельному напряженному состоянию, поэтому материал в таких зонах будет нагружаться «независимо», достигать предельного состояния и разрываться, что и будет проявляться в виде множественного зарождения и распространения разрывов. Подобный процесс наблюдается при динамическом разрушении трехмерных твердых хрупких тел, подверженных интенсивному динамическому воздействию, например при действии в них взрыва. Здесь процесс разрушения представляет собой распространение фронта разрушения, на котором непрерывно возникает большое число трещин скола или нормального отрыва, и математическая модель с таким фронтом хорошо согласуется с реальным процессом разрушения [3]. Эти соображения позволяют процесс динамического разрушения мембраны при ударе по ней телом также схематизировать введением в задачу распространяющегося фронта разрушения, на передней стороне которого (в неразрушенной части) достигается предельное условие типа (2.2), а на задней его стороне (в разрушенной части) соответствующее напряжение (разрывавшее) обращается в нуль. Опыт показывает, что такая схема разрушения, действительно, наблюдается, причем число разрывов растет со скоростью удара по мембране [4].

Ниже займемся построением решения простейшей задачи об ударе с постоянной скоростью клином по упругой нити с учетом возможности разрушения. Поскольку в условии (2.2) параметр σ_* — постоянная величина размерности напряжения, рассматриваемая задача будет автомодельной, уравнение (1.4), приводящееся к виду

$$(2.3) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \rho c^2 = E$$

имеет решением

$$(2.4) \quad u = ctF(\xi), \quad \xi = x/(ct)$$

причем

$$(2.5) \quad F = A\xi + B; \quad A, B = \text{const}$$

и задача состоит в построении решения исходной задачи об ударе с использованием (2.4), (2.5), условий достижения предельного состояния и разрушения, а также результатов анализа событий в точке встречи элемента нити с поверхностью клина, рассмотренных в п. 1.

Будем заниматься только сверхзвуковым режимом соударения.

Начнем со случая, когда решение за точкой излома дается формулами (1.18). В этом случае согласно (2.4), (2.5), $\epsilon_x = A - 1$, $v = 0$, так что соотношения

$$(2.6) \quad A = 1/\cos \gamma, \quad B = 0, \quad 0 \leq x < V t \operatorname{ctg} \gamma$$

дают полное решение задачи с условием в вершине клина

$$(2.7) \quad u|_{x=0} = 0$$

Для этого случая предельное условие имеет вид

$$(2.8) \quad \rho c^2 (1/\cos \gamma_p - 1) = \sigma_*$$

что представляет собой уравнение относительно γ_p с решением

$$(2.9) \quad \gamma_p = \gamma_p(\sigma_*/(\rho c^2))$$

так что при $\gamma < \gamma_p$ разрушения (обрыва) нити не будет, а при всех $\gamma > \gamma_p$ нить будет разрушена.

Интересно, что предельное условие не содержит скорости удара, и будет разрушение или нет зависит только от геометрии соударения (от значений γ).

Решение с разрушением будет отличаться от решения без разрушения лишь в области $0 \leq x < ct$. В силу условия $\sigma_x = 0$ при $x = 0$, выражающего обрыв, будем иметь для F из (2.5) в этой области $A = 1$, а условие непрерывности смещений при $x = ct$ дает $B = 1/\cos \gamma - 1$. В этой области нить свободна от напряжений и движется с постоянной скоростью $B \cdot c$.

Построение решения в случае, когда состояние за точкой излома определяется формулами (1.21), несколько сложнее, ибо в отличие от предыдущего эти формулы не могут описывать решения вплоть до вершины клина, поскольку там должно быть $v = 0$, а по (1.21) $v \neq 0$. Эти формулы верны лишь в сверхзвуковой области $ct < x < Vt \operatorname{ctg} \gamma$. В области же $0 \leq x < ct$ должна быть использована формула (2.5) при $B = 0$, а величина A должна быть найдена из условия непрерывности u при $x = ct$, что дает

$$(2.10) \quad A = 1 + \varepsilon_{r_2} + v_2/c$$

где ε_{r_2} , v_2 даются формулами (1.21).

Таким образом, часть нити в области $0 \leq x < ct$ заторможена, а напряжение в ней больше на $\rho v_2 c$, чем в области за точкой излома. Понятно поэтому, что в предельное условие должно быть подставлено в качестве σ_x именно это напряжение, и это условие примет вид

$$(2.11) \quad \varepsilon_{r_2} + v_2/c = \sigma_*/(\rho c^2)$$

Это соотношение уже содержит, кроме γ , также и M , т. е. предельное условие на плоскости γ , M будет представлять собой некоторую кривую, расположенную правее (1.19) и левее (1.22). В области ниже этой кривой движение не будет сопровождаться разрушением, выше нее будет происходить разрушение.

Решение с разрушением будет отличаться от решения без разрушения лишь в области $0 \leq x < ct$. В силу граничного условия $\sigma_x = 0$ при $x = 0$, выражающего факт возникновения обрыва нити в точке ее контакта с вершиной клина (именно там впервые возникает $\max \sigma_x$), получаем для (2.5) $A = 1$, а B находится из условия непрерывности смещений при $x = ct$

$$(2.12) \quad B = \varepsilon_{r_2} + v_2/c$$

где ε_{r_2} , v_2 даются формулами (1.21)

Таким образом, при разрушении нити ее часть $0 \leq x < ct$ разгружается от напряжений и движется как целое со скоростью

$$(2.13) \quad v_p = v_2 + c\varepsilon_{r_2}$$

Обратимся, наконец, к построению решения задачи для значений $\gamma > 2\gamma_*$, т. е. в режиме, когда за точкой излома возникает сморщивание. В этом случае граница раздела области со сморщиванием и области, прилегающей к вершине клина, в которой $\sigma_x > 0$, т. е. там, где нить вновь растянута, уже не будет описываться уравнением «звукового» фронта $x = ct$, а будет определяться в силу автомодельности уравнением

$$(2.14) \quad x = wt$$

где w — неизвестная величина, подлежащая определению в ходе решения задачи. На этом фронте расправления сморщенной нити должны выполняться обычные условия на скачке, связывающие решения (2.5) и (1.23).

Из этих условий определяются A и w (в (2.5) $B = 0$ в силу условия (2.7))

$$(2.15) \quad A = 1 + mM \cos \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*), \quad w/c = m = \sqrt{1 + \xi^2} - \xi$$

$$\xi = \frac{\sin \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*) + 1 - 1/\cos \gamma}{2M \cos \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*)} > 0$$

В области распрямления $0 \leq x < wt$ имеем

$$(2.16) \quad v = 0, \quad \sigma_x = \rho c^2 (A - 1) > 0$$

Предельное условие

$$(2.17) \quad A(\gamma, M, \gamma_*) - 1 = \sigma_*/(\rho c^2)$$

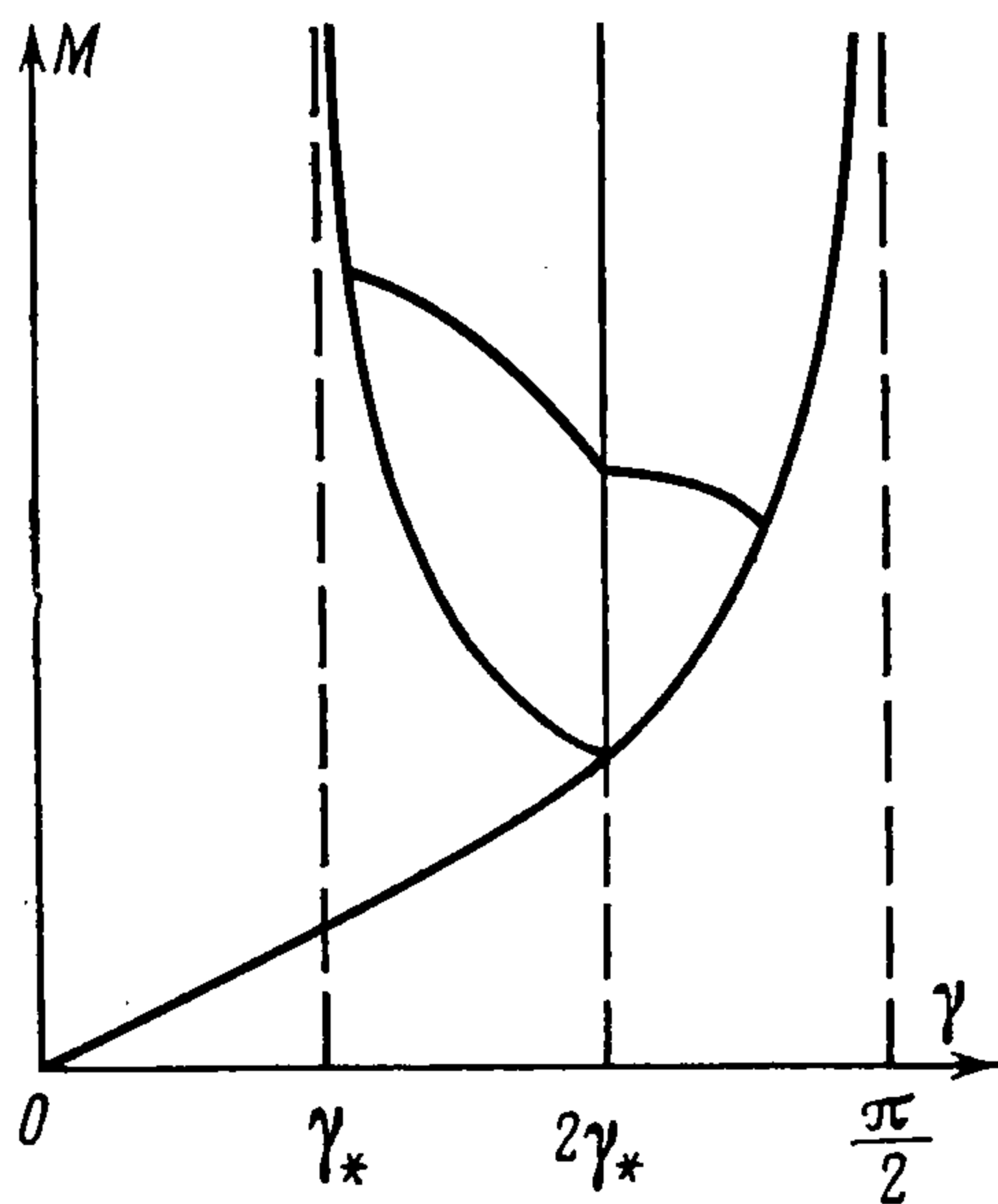
определяет в области $\gamma > 2\gamma_*$ кривую, ниже которой движение не будет сопровождаться разрушением, а выше — будет. Можно показать, что эта кривая непрерывно смыкается с аналогичной кривой (2.11) в области $\gamma < 2\gamma_*$ и выходит на «звуковую» границу (1.20) при конечном M , т. е. при некотором $\gamma < \pi/2$.

Решение с разрушением для данного режима очень простое — оно везде совпадает с решением в области гармошки за точкой излома нити, т. е.

формулы (1.23) в этом случае верны всюду в области $0 \leq x < Vt \operatorname{ctg} \gamma$.

Построенные выше решения с разрушением одновременно являются решениями задачи о «сверхзвуковом» соударении с постоянной скоростью полубесконечной свободной нити с плоской стенкой, наклоненной к нити под углом γ .

На фиг. 2 показаны области с различными режимами движения и линия предельных состояний (2.11), (2.17). Отметим, что, если эта линия расположена так, как показано на фиг. 2, то в области левее линии (1.19) разрушение невозможно. Последнее связано с тем, что на линии (1.19) напряжения за точкой



Фиг. 2

излома меняются непрерывно. Но в решении задачи об ударе клином левее линии (1.19) напряжение постоянно всюду, т. е. равно напряжению за точкой излома, тогда как в решении задачи об ударе клином для области правее линии (1.19) напряжение в области, примыкающей к вершине клина, больше, чем за точкой излома. А это означает, что $\max \sigma_x$ левее (1.19) меньше, чем $\max \sigma_x$ правее (1.19). Однако, согласно фиг. 2, правее (1.19) соблюдается неравенство $\max \sigma_x < \sigma_*$, значит, и по-прежнему оно соблюдается левее (1.19). Из этого же следует, что разрушение левее (1.19) возникает лишь при условиях, когда кривая (2.11), (2.17) опустится и стянется в «тройную» точку $\gamma = 2\gamma_*$, $M = \operatorname{tg} 2\gamma_*$. Границей, разделяющей решение с разрушением от решений без разрушений, будет прямая (2.9), которая с уменьшением σ_* будет смещаться влево.

Итак, при очень больших значениях σ_* разрушение возможно лишь во втором и третьем режимах при больших скоростях удара, кривая предельных состояний располагается в области больших значений M . С уменьшением σ_* эта кривая монотонно опускается и при некотором σ_* стягивается в тройную точку. При дальнейшем уменьшении σ_* она превращается в отрезок прямой (2.9), которая стремится к оси M при $\sigma_* \rightarrow 0$.

С использованием особенностей решения в точке излома конструкции

и принятой схематизации процесса разрушения можно вполне аналогичными методами построить решение соответствующих задач об ударе конусом по мембране.

Полученные здесь результаты могут быть использованы в общем случае неавтономных задач с криволинейными очертаниями поверхности ударяющего тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* Об ударе по гибкой нити.— ПММ, 1947, т. 11, № 3, с. 379—382.
2. *Рябис А. А.* Поперечный удар притупленным телом по гибкой связи при наличии трения.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1966, № 6, с. 71—79.
3. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород.— ПММ, 1967, т. 31, № 4, с. 643—669.
4. *Керимов К. А., Грацкова Н. С., Панахов Ф. С.* Исследование поведения мембран в процессе удара.— Тр. Ин-та матем. и механ. АН АзССР, 1975, вып. 2, с. 15—20.

Москва

Поступила в редакцию
13.VI.1983