Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 539.36:534.1

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Попов В. В.

Рассматриваются задачи о поперечных колебаниях движущихся нитей, шлангов с текущей жидкостью, а также тел, которые можно представить в виде совокупности взаимодействующих нитей, движущихся с различными скоростями. Предполагается, что касательные напряжения между нитями отсутствуют. Колебания описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка, коэффициенты которого получаются суммированием соответствующих параметров отдельных нитей. Отличительной чертой такого рода систем является различие скоростей распространения волн в прямом и обратном направлениях.

Приводится преобразование, позволяющее свести задачу о колебательных процессах в движущемся теле с условиями, задаваемыми на фиксированных границах, к краевой задаче для неподвижной струны. Рассмотрены вопросы о критических скоростях, об энергии свободных колебаний движущегося тела и о форме диссипативного члена. Даны аналитические решения задач о свободных колебаниях и об установившемся режиме вынужденных колебаний под действием гармонически меняющейся во времени силы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в линейном приближении поперечные колебания тела (или системы тел), движущегося в основном состоянии равномерно и прямолинейно вдоль оси x. В простейшем случае уравнение натянутой движущейся со скоростью v нити (струны) получается из уравнения покоящейся струны

$$\rho u_{tt} - T u_{xx} = F \tag{1.1}$$

(обозначения стандартные) заменой частной производной по времени $\partial/\partial t$ на субстанциональную $\partial/\partial t + v\partial/\partial x$

$$\rho u_{tt} + 2\rho v u_{tx} + (\rho v^2 - T) u_{xx} = F \tag{1.2}$$

или

$$u_{tt} + 2v u_{tx} + (v^2 - c_0^2) u_{xx} = f, \quad c_0^2 = T/\rho, \ f = F/\rho \tag{1.3}$$

На той же математической основе рассматриваются задачи о колебаниях тел, составленных из двух нитей: струны с движущейся распределенной инерционной нагрузкой и шланга — натянутой гибкой трубки с протекающей идеальной жидкостью [1, 2]. При этом жидкость считается либо инерционной нагрузкой, либо учитывается также перепад давления, что эквивалентно появлению отрицательного натяжения. Предполагается, что касательные напряжения между нитями отсутствуют.

Уравнения совместных колебаний такой системы можно получить следующим образом. Обозначим силу, действующую на первую нить со стороны второй, через F_{12}, аналогично введем F_{21}, снабдим также переменные в уравнении (1.2) индексами 1 и 2. Принимая $u_1 = u_2 = u$ и пользуясь равенством $F_{12} = -F_{21}$, получим

$$(\rho_1 + \rho_2) u_{tt} + 2(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) u_{tx} + (\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2 - T_1 - T_2) u_{xx} = 0 \tag{1.4}$$

Если считать оболочку шланга неподвижной, $v_2 = 0$ и обозначить перепад давления (на конечном интервале) через П, то получим обычно применяемое на практике уравнение

$$(\rho_1 + \rho_2)\, u_{tt} + 2\rho_1 v_1 u_{tx} + (\rho_1 v_1^2 - T_1 + \Pi)\, u_{xx} = 0 \tag{1.5}$$

Аналогично для n нитей при условиях $F_{jk} = -F_{kj}$ имеем

$$Ru_{tt} + 2Pu_{tx} + (K - \theta)\, u_{xx} = 0 \tag{1.6}$$

$$R = \sum_{k=1}^{n} \rho_k, \quad P = \sum_{k=1}^{n} \rho_k v_k, \quad K = \sum_{k=1}^{n} \rho_k v_k^2, \quad \theta = \sum_{k=1}^{n} T_k$$

Формально можно рассматривать бесконечные множества нитей и заменить суммы на интегралы по отрезку или двумерной области

$$R = \int \rho(\alpha)\, d\alpha, \quad P = \int \rho(\alpha)\, v(\alpha)\, d\alpha, \quad K = \int \rho(\alpha)\, v^2(\alpha)\, d\alpha$$
$$\theta = \int T(\alpha)\, d\alpha$$

В частности, для шланга с учетом разброса скоростей в текущей жидкости получим уравнение ($\langle \ldots \rangle$ — среднее значение)

$$(\rho_1 + \rho_2)\, u_{tt} + 2\rho_1 \langle v \rangle\, u_{tx} + (\rho_1 \langle v^2 \rangle - T_1)\, u_{xx} = 0$$

Фактически в этих моделях речь идет о приближенном описании колебаний двумерного или трехмерного тела, поперечные размеры которого малы по сравнению с продольными, а также по сравнению с длиной волны. Тело представляется как совокупность нитей, причем параметры отдельных нитей входят в соответствующие параметры тела — коэффициенты уравнения (1.6) — аддитивно.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется слой $-h \leqslant y \leqslant h$ идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ, текущей со скоростью v в направлении оси x. Слой ограничен двумя мембранами. При $y = h$ расположена мембрана плотности ρ_1 с натяжением T_1, движущаяся со скоростью v_1, параметры второй мембраны при $y = -h$ будут соответственно ρ_2, T_2, v_2. Будем рассматривать задачу о малых колебаниях системы в плоскости xy. В данном случае можно говорить также о колебаниях двух струн, взаимодействующих с бесконечным множеством жидких нитей. В отсутствие внешних сил течение жидкости будет потенциальным и задачу можно решать методами, изложенными в [3]. Потенциал φ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$.

Обозначив отклонения мембран через u_1 и u_2, будем иметь кинематические условия на линиях $y = \pm h$ (на границах жидкости и мембран имеется проскальзывание)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg|_{y=h}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} + v\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg|_{y=-h} \tag{1.7}$$

Давление в жидкости выражается через потенциал по формуле

$$p = -\rho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

Динамические условия на границах — баланс давления и сил, действующих со стороны мембран,— имеют вид

$$-\rho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\bigg|_{y=h} + T_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \rho_1\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u_1 = 0 \tag{1.8}$$
$$\rho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\bigg|_{y=-h} + T_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \rho_2\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_2\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u_2 = 0$$

Будем искать решение задачи в виде

$$u_n = b_n e^{i(\omega t + \varkappa x)}, \; n = 1, 2; \; \varphi = (A \operatorname{sh} \varkappa y + B \operatorname{ch} \varkappa y) e^{i(\omega t + \varkappa x)} \tag{1.9}$$

где ω — частота, $\varkappa$ — волновое число. Тогда из (1.7) и (1.8) получим уравнения для амплитуд

$$(1.10)\qquad \begin{aligned} &ib_1(\omega+\varkappa v)=\varkappa(A\operatorname{ch}\varkappa h+B\operatorname{sh}\varkappa h)\\ &ib_2(\omega+\varkappa v)=\varkappa(A\operatorname{ch}\varkappa h-B\operatorname{sh}\varkappa h)\\ &-i\rho(\omega+\varkappa v)(A\operatorname{sh}\varkappa h+B\operatorname{ch}\varkappa h)-\varkappa^2T_1b_1+\rho_1(\omega+\\ &+\varkappa v_1)^2b_1=0\\ &i\rho(\omega+\varkappa v)(-A\operatorname{sh}\varkappa h+B\operatorname{ch}\varkappa h)-\varkappa^2T_2b_2+\rho_2(\omega+\\ &+\varkappa v_2)^2b_2=0\end{aligned}$$

Условие существования ненулевого решения системы — дисперсионное уравнение — имеет вид

$$(1.11)\qquad \begin{aligned} &[\rho(\omega+\varkappa v)^2\operatorname{th}\varkappa h+\varkappa\rho_1(\omega+\varkappa v_1)^2-T_1\varkappa^3][\rho(\omega+\varkappa v)^2+\\ &+\varkappa\rho_2(\omega+\varkappa v_2)^2\operatorname{th}\varkappa h-T_2\varkappa^3\operatorname{th}\varkappa h]+[\rho(\omega+\varkappa v)^2\operatorname{th}xh+\\ &+\varkappa\rho_2(\omega+\varkappa v_2)^2-T_2\varkappa^3][\rho(\omega+\varkappa v)^2+\varkappa\rho_1(\omega+\varkappa v_1)^2\operatorname{th}\varkappa h-\\ &-T_1\varkappa^3\operatorname{th}\varkappa h]=0\end{aligned}$$

При малых $\varkappa$ уравнение (1.11) можно упростить. Поскольку фазовая скорость волны $c=\omega/\varkappa$ — величина конечная, удобно приписать ω первый порядок малости по $\varkappa$. Используя соотношение $\operatorname{th}\varkappa h\approx\varkappa h$, а также учитывая, что вторые и третьи слагаемые во второй и четвертой квадратных скобках имеют более высокий порядок малости, чем первые, получим приближенно

$$\begin{aligned}&\varkappa h\rho(\omega+\varkappa v)^2[2\varkappa\rho h(\omega+\varkappa v)^2+\varkappa\rho_1(\omega+\varkappa v_1)^2+\\ &+\varkappa\rho_2(\omega+\varkappa v_2)^2-T_1\varkappa^3-T_2\varkappa^3]=0\end{aligned}$$

Приравнивая нулю выражение в квадратных скобках, получим

$$(1.12)\qquad \begin{aligned}&(2\rho h+\rho_1+\rho_2)\,\omega^2+2\,(2\rho hv+\rho_1v_1+\rho_1v_1+\rho_2v_2)\,\varkappa\omega+\\ &+(2\rho hv^2+\rho_1v_1{}^2+\rho_2v_2{}^2-T_1-T_2)\,\varkappa^2=0\end{aligned}$$

что при учете (1.9) эквивалентно уравнению (1.6) для данной конкретной системы.

Поскольку в этом приближении скорость волны не зависит от ее длины, систему можно описать одномерным уравнением второго порядка. Видно, что теми же свойствами обладает система n мембран, разделенных $n-1$ слоями жидкостей. Продольные движения частей такой системы приводят в первом приближении лишь к различным скоростям распространения волны «вперед» и «назад».

Вид следующего приближения удобно изучить на несколько более простом примере: одна мембрана и слой жидкости ($\rho_2=T_2=0$). Тогда вместо (1.11) будем иметь

$$\rho(\omega+\varkappa v)^2\operatorname{th}2\varkappa h+\varkappa\rho_1(\omega+\varkappa v_1)^2-T_1\varkappa^3=0$$

Разлагая $\operatorname{th}2\varkappa h$ в ряд, получим следующее после (1.12) приближение, включающее члены четвертого порядка. Ему соответствует одномерное дифференциальное уравнение того же порядка, описывающее эффекты дисперсии. Можно рассматривать и более высокие приближения.

Характерным свойством рассматриваемых колебательных систем, описываемых уравнением (1.6), является их асимметрия, выражающаяся в различии скоростей волн в прямом и обратном направлениях. Если взять решение уравнения (1.6) в виде

$$(1.13)\qquad u=f_1(x-c_1t)+f_2(x+c_2t)$$

то для c_1 и c_2 получим выражения

$$c_{1,2}=(\pm P+\sqrt{P^2-R(K-\theta)})/R$$

Предполагается $P^2 - R(K - \theta) > 0$, т. е. гиперболичность уравнения (1.6). Для движущейся струны $c_{1,2} = c_0 \pm v$, причем уравнение (1.3) остается гиперболическим при всех v.

Для модели шланга (1.5) (положим $\Pi = 0$) принято говорить о двух критических скоростях течения жидкости. При первой критической скорости $v_* = \sqrt{T_1/\rho_1}$ коэффициент при u_{xx} обращается в нуль и появляется бесконечное множество равновесных форм $u = \varphi(x)$, где φ — произвольная функция. При $v > v_*$ говорят о закритических движениях. Второе критическое значение $v_{**} = (1 + \rho_1/\rho_2)\sqrt{T_1/\rho_1}$ соответствует переходу от гиперболического к эллиптическому уравнению. Терминологию можно сохранить для общего случая. Всегда можно считать $c_1 > 0$, $c_1 > c_2$. Первому критическому значению соответствует $c_2 = 0$. В закритическом случае, при $c_2 < 0$, волны движутся только в одном направлении. Второму критическому значению соответствует равенство $c_2 = -c_1$.

Волновое уравнение, имеющее общее решение (1.13), может быть записано в виде

$$u_{tt} + (c_1 - c_2)\,u_{tx} - c_1c_2u_{xx} = 0 \tag{1.14}$$

Для него будем рассматривать в основном первую краевую задачу с условиями на фиксированных границах

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0 \tag{1.15}$$

Имея в виду задачи о вынужденных колебаниях, введем также неоднородное уравнение

$$u_{tt} + (c_1 - c_2)\,u_{tx} - c_1c_2u_{xx} = f(t, x) \tag{1.16}$$

2. Свободные колебания. Для решения краевой задачи удобно преобразовать уравнение (1.16) в волновое уравнение вида (1.1), сохранив отрезок $[0, l]$ неподвижным. Это можно сделать, выбрав при $c_2 \neq 0$ новые переменные в виде

$$\xi = x,\ \tau = t + \gamma x,\ \gamma = (c_1 - c_2)/2c_1c_2 \tag{2.1}$$

Уравнение (1.16) переходит в

$$u_{\tau\tau} - a^2u_{\xi\xi} = f_1, \qquad f_1 = \frac{4c_1c_2}{(c_1 + c_2)^2}\, f(\tau - \gamma\xi, \xi) \tag{2.2}$$

В этом случае скорости волн будут равны $\pm a$, где $a = 2c_1c_2/(c_1 + c_2)$. Для движущейся струны [4] $\gamma = v/(c_0^2 - v^2)$ и $a = c_0(1 - v^2/c_0^2)$.

Можно построить решение задачи Коши для уравнения (1.14) при условиях

$$u(0, x) = \varphi(x),\ u_t(0, x) = \psi(x) \tag{2.3}$$

применив метод Даламбера непосредственно к этому уравнению

$$u(t, x) = \frac{1}{c_1 + c_2}\left[c_1\varphi(x + c_2t) + c_2\varphi(x - c_1t) + \int\limits_{x-c_1t}^{x+c_2t} \psi(y)\,dy\right]$$

Рассматривая задачу о свободных колебаниях на конечном интервале с условиями (1.15), удобно исходить из решения соответствующей задачи для уравнения (2.2)

$$u(\tau, \xi) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \varkappa_k\xi e^{i\omega_k\tau}, \qquad \varkappa_k = \frac{k\pi}{l}, \qquad \omega_k = a\varkappa_k \tag{2.4}$$

где Re — знак вещественной части, $D_k = D_k' - iD_k''$ — произвольные постоянные, ω_k — собственные частоты. Применяя к (2.4) преобразование

(2.1), получим

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [D_k' \cos \omega_k (t + \gamma x) + D_k'' \sin \omega_k (t + \gamma x)] \sin \varkappa_k x \tag{2.5}$$

$$\omega_k = \frac{2c_1 c_2}{c_1 + c_2} \varkappa_k$$

При подходе к первому критическому значению $\omega_k \to 0$, ко второму — $\omega_k \to -\infty$. Для движущейся струны $\omega_k = (1 - v^2/c_0^2) c_0 \varkappa_k$.

Укажем, что в основе отмечаемого в литературе сходства колебаний движущихся тел с колебаниями неподвижной струны: вещественности собственных частот, наличия собственных колебаний — «динамических мод», представимых в виде суммы двух бегущих волн и переходящих в пределе $v \to 0$ $(c_2 \to c_1)$ в собственные колебания неподвижной струны, лежат свойства преобразования (2.1), переводящего элементарные решения волнового уравнения $\sin \varkappa_k \xi e^{iw_k \tau}$ в решения уравнений (1.3), (1.5) с сохранением значений ω_k.

Если задавать начальные условия при $t = -\gamma x$, то коэффициенты D_k определятся из системы

$$\varphi_1(x) = u(-\gamma x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k' \sin \varkappa_k x$$

$$\psi_1(x) = u_t(-\gamma x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k D_k'' \sin \varkappa_k x$$

по обычным формулам

$$D_k' = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(y) \sin \varkappa_k y \, dy, \qquad D_k'' = \frac{2}{\omega_k l} \int_0^l \psi_1(y) \sin \varkappa_k y \, dy$$

Если задать условия при $t = 0$, то D_k нужно определять, используя разложение по неортогональной системе функций

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [D_k' \cos \omega_k \gamma x + D_k'' \sin \omega_k \gamma x] \sin \varkappa_k x$$

$$\psi(x) = u_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k [-D_k' \sin \omega_k \gamma x + D_k'' \cos \omega_k \gamma x] \sin \varkappa_k x$$

Рассмотрим вопрос об энергии свободных колебаний. Уравнение колебаний движущейся струны (1.2) при $F = 0$ и условиях (1.15) можно получить варьируя функционал $J = \int L dt$ с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l [\rho (u_t + v u_x)^2 - T u_x^2] \, dx$$

Естественно энергию колебаний определить по формуле $E = u_t \partial L / \partial u_t - L$, что дает

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_0^l [u_t^2 + (c_0^2 - v^2) u_x^2] \, dx$$

Аналогично для уравнения (1.14) в расчете на единицу плотности

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l [u_t^2 + (c_1 - c_2) u_t u_x - c_1 c_2 u_x^2] \, dx$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2 + c_1 c_2 u_x^2) \, dx$$

При докритических скоростях энергия положительно определена. Нетрудно проверить, что плотность энергии $(u_t^2 + c_1 c_2 u_x^2)/2$ и ее поток, даваемый выражением $(c_1 - c_2)\, u_t^2/2 - c_1 c_2 u_t u_x$, удовлетворяют уравнению неразрывности. При условиях (1.15) поток энергии на границах участка равен нулю, система замкнута, и ее энергия сохраняется.

3. Вынужденные колебания. При рассмотрении вынужденных колебаний большую роль играют задачи об установившемся режиме. Для неподвижной струны он получается как предельный при $t \to \infty$ для решения уравнения с диссипативным членом νu_t, $\nu > 0$

$$u_{tt} + \nu u_t - c_0^2 u_{xx} = f \tag{3.1}$$

причем в полученном решении ν устремляется к нулю. Уравнение колебаний движущейся струны получим из (3.1) той же заменой частной производной по времени на субстанциональную, при помощи которой из уравнения (1.1) получено уравнение (1.2)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u + \nu\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) u - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \tag{3.2}$$

В виде произведения положительной постоянной на субстанциональную производную введен диссипативный член также в работе [5], где исследованы колебания цепной передачи под действием возмущений, идущих с границы. Полученное в [5] решение уравнения (3.2) дает уменьшение амплитуды резонансных колебаний с увеличением скорости цепи, что согласуется с экспериментом, тогда как для уравнения с членом νu_t теория предсказывает увеличение амплитуды. Преобразуя (3.2) к переменным τ, ξ, получим

$$u_{\tau\tau} + \nu\,[u_\tau + v\,(1 - v^2/c_0^2)\, u_\xi] - a^2 u_{\xi\xi} = (1 - v^2/c_0^2)\, f$$

Для уравнения (1.16) диссипативный член можно взять в виде $\nu\,(u_t + (c_1 - c_2)\, u_x/2)$, и преобразованное уравнение будет

$$u_{\tau\tau} + \nu\left[u_\tau + a\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} u_\xi\right] - a^2 u_{\xi\xi} = f_1$$

Начальные возмущения на конечном отрезке в случае $f = f_1 = 0$ при указанном выборе диссипативного члена затухают при всех, в том числе и закритических, режимах движения.

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях движущегося тела под действием гармонически меняющейся во времени силы, взяв в качестве исходной ту же задачу для неподвижной струны [6]

$$u_{\tau\tau} - a^2 u_{\xi\xi} = f_0(\xi)\, e^{i\omega\tau}, \quad u(\tau, 0) = u(\tau, l) = 0 \tag{3.3}$$

В нерезонансном случае решение имеет вид $u = U(\xi)\, e^{i\omega\tau}$, где

$$U = \frac{\sin \varkappa\xi}{\varkappa \sin \varkappa l} \int_0^l f_0(y) \sin \varkappa(\xi - y)\, dy - \frac{1}{\varkappa} \int_0^\xi f_0(y) \sin \varkappa(\xi - y)\, dy$$

Если в уравнении (1.16) взять силу $f = f_*(x)\, e^{i\omega t}$, то после перехода к переменным τ, ξ будем иметь

$$f_0(\xi) = 4c_1 c_2 (c_1 + c_2)^{-2} f_*(\xi) e^{-i\omega\gamma\xi} \tag{3.4}$$

С учетом (3.4) решение задачи запишем в виде

$$u = \frac{4c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \left\{\frac{\sin \varkappa x}{\varkappa \sin \varkappa l} \int_0^l f_*(y)\, e^{-i\omega\gamma y} \sin \varkappa(x - y)\, dy - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varkappa} \int_0^x f_*(y)\, e^{-i\omega\gamma y} \sin \varkappa(x - y)\, dy\right\} e^{i\omega(t + \gamma x)}$$

Из этого выражения можно заключить, что вблизи первого критического значения скорости амплитуда вынужденных колебаний убывает, $u \to 0$ при $c_2 \to 0$. Однако при этом $\varkappa \to \infty$ и применимость одномерного подхода вызывает сомнение (влияние малой жесткости на колебание струны при $v = c_0$ изучено в [7]). При подходе ко второму критическому значению ($c_2 \to -c_1$) амплитуда стремится к бесконечности.

Теперь рассмотрим резонансный случай $\omega = \omega_n = n\pi a/l$. Если $f_0(\xi)$ ортогональна n-й собственной функции, т. е.

$$\int_0^l f_0(y) \sin \varkappa_n y dy = 0$$

то решение задачи (3.3) будет

$$u = -\frac{e^{i\omega_n \tau}}{\varkappa_n} \int_0^\xi f_0(y) \sin \varkappa_n (\xi - y)\, dy$$

Решение задачи (1.15), (1.16) получится после подстановки в эту формулу выражений (2.1) и (3.4). Из условия ортогональности следует, что в этом случае $f_*(x)$ представима в виде

$$f_*(x) = e^{i\omega_n \gamma x} \sum_{k \neq n} C_k \sin \varkappa_k x$$

C_k — комплексные постоянные. В частности, для точечной силы справедливо выражение $f_* = f\delta(x - x_0)$, где x_0 — нуль функции, $\sin n\pi x/l$ — тот же результат, что и для неподвижной струны.

При отсутствии ортогональности решение задачи (приведем только возрастающий член) получается из решения уравнения

$$u_{\tau\tau} - a^2 u_{\xi\xi} = A_n \sin \varkappa_n \xi e^{i\omega_n \tau}, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_0(y) \sin \varkappa_n y\, dy$$

и имеет вид

$$u(t, x) = -\frac{iA_n}{\omega_n}(t + \gamma x) \sin \varkappa_n x e^{i\omega_n (t + \gamma x)}$$

В заключение отметим, что основные результаты работы формально переносятся на закритический случай. В то же время дать физическую интерпретацию решений краевых задач при отсутствии отраженных от границ волн затруднительно. Неясно также, в какой степени вообще можно пользоваться одномерными моделями при описании закритических колебаний. В связи с этим следует указать на недостаточную экспериментальную изученность колебаний тел, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью распространения волны, и тем более — превышающими эту скорость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971. 224 с.
2. *Светлицкий В. А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. *Sack R. A.* Transverse oscillations in travelling strings.— Brit. J. Appl. Phys., 1954, v. 5, No. 6, p. 224—226.
5. *Mahalingam S.* Transverse vibrations of power transmission chains.— Brit. J. Appl. Phys., 1957, v. 8, No. 4, p. 145—148.
6. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 687 с.
7. *Кожешник Я.* Поперечное колебание напряженных гибких звеньев передач.— В кн.: Теория машин и механизмов. М.: Наука, 1976, с. 170—176.

Ленинград

Поступила в редакцию
12.VII.1983