Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЙТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ МНОГОКРАТНОГО РЕЗОНАНСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Куницын А. Л., Пережогин А. А.

Исследуется устойчивость установившихся движений многопараметрических систем в критическом случае N пар чисто мнимых корней при взаимодействии нескольких внутренних резонансов четвертого порядка. Ранее (см. обзор [1]) исследовалось лишь взаимодействие резонансов нечетного порядка. В общем случае задача устойчивости при резонансах четного порядка является более сложной: даже для простейшего однократного резонанса четвертого порядка отсутствует алгебраический критерий устойчивости [2].

1. Рассмотрим систему $2N$-го порядка в критическом случае N пар чисто мнимых различных корней $\pm\lambda_j$ ($\lambda_j^2 < 0; j = 1, \ldots, N$), которую можно представить в виде [1]

$$u^{\cdot} = \lambda u + \sum_{l=2}^{\infty} U^{(l)}(u, v), \qquad v^{\cdot} = -\lambda v + \sum_{l=2}^{\infty} V^{(l)}(u, v) \tag{1.1}$$

$$\lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$$

где $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $v = (v_1, \ldots, v_N)$ — комплексно-сопряженные переменные, $U^{(l)}$, $V^{(l)}$ — комплексно-сопряженные вектор-формы l-го порядка.

Пусть первые $n \leqslant N$ собственных значений системы (1.1) связаны $\varkappa$ резонансными соотношениями четвертого порядка

$$\langle P_\nu, \Lambda \rangle = 0, \ \nu = 1, \ldots, \varkappa \tag{1.2}$$

Здесь $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — вектор собственных значений, а $P_\nu = (p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n})$ — целочисленный вектор со взаимно простыми компонентами, часть из которых может быть нулевой, причем $|P_\nu| \equiv |p_{\nu 1}| + \ldots + |p_{\nu n}| = 4$. Предположим также, что из (1.2) не вытекает других резонансов того же порядка и нет резонансов ниже четвертого порядка.

В соответствии с общепринятой схемой исследования устойчивости как в резонансных, так и нерезонансных случаях посредством ряда известных замен переменных [1] система (1.1) приводится к нормальной форме с точностью до членов третьего порядка включительно. В полярных координатах r_j, φ_j она будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{2} r_s^{\cdot} = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} R_\nu Q_{\nu s}(\psi_\nu) + r_s \sum_{j=1}^{N} c_{sj} r_j + \ldots \tag{1.3}$$

$$\psi_\nu^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} |p_{\nu k}| \left(\sum_{l=1}^{\varkappa} \frac{R_l}{r_k} \frac{dQ_{lk}}{d\psi_l} + \sum_{j=1}^{N} d_{kj} r_j \right) + \ldots$$

$$s = 1, \ldots, n; \qquad \nu = 1, \ldots, \varkappa$$

$$r_\alpha^{\cdot} = 2 r_\alpha \sum_{j=1}^{N} c_{\alpha j} r_j + \ldots \qquad \alpha = n + 1, \ldots, N$$

$$r_\alpha \varphi_\alpha^{\cdot} = -i\lambda_\alpha r_\alpha + r_\alpha \sum_{j=1}^{N} d_{\alpha j} r_j + \ldots$$

$$R_\nu^2 = \prod_{s=1}^{n} r_s^{|p_{\nu s}|}, \qquad \psi_\nu = \sum_{s=1}^{n} p_{\nu s}\varphi_s, \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$Q_{\nu s}(\psi_\nu) = a_{\nu s}\cos\psi_\nu + b_{\nu s}\sin\psi_\nu$$

$$(Q_{\nu s}(\psi_\nu) \equiv 0, \text{ если } p_{\nu s} = 0)$$

Систему, получаемую из (1.3) отбрасыванием невыписанных членов, называют модельной [1].

2. Рассмотрим взаимодействие резонансов четвертого порядка по двум схемам.

Первая схема взаимодействия

(2.1) $$\langle P_\nu^*, \Lambda^*\rangle + \langle P_\nu, \Lambda\rangle = 0, \ \nu = 1, \ldots, \varkappa$$

характеризуется наличием общей для всех резонансных соотношений векторной компоненты собственных значений $\Lambda^* = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_0})$. Следовательно, целочисленный вектор $P_\nu^* = (p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n_0})$ имеет все существенно ненулевые взаимно простые компоненты, а целочисленный вектор $P_\nu = (p_{\nu n_0+1}, \ldots, p_{\nu n})$ имеет лишь часть составляющих, отличных от нуля, так, что призведения $\langle P_\nu, \Lambda\rangle$ не содержат общих собственных значений, являющихся компонентами вектора $\Lambda = (\lambda_{n_0+1}, \ldots, \lambda_n)$.

Другая схема взаимодействия — взаимодействие по типу «цепочка»:

(2.2) $$\langle P_{\nu-1}^*, \Lambda_{\nu-1}^*\rangle + \langle P_\nu, \Lambda_\nu\rangle = 0, \ \nu = 1, \ldots, \varkappa$$

$$\Lambda_\nu = (\lambda_{l_\nu}, \ldots, \lambda_{n_\nu}), \ P_\nu = (p_{\nu l_\nu}, \ldots, p_{\nu n_\nu})$$

$$\Lambda_\nu^* = (\lambda_{n_\nu - k_\nu}, \ldots, \lambda_{n_\nu}), \quad P_\nu^* = (p_{\nu n_\nu - k_\nu}, \ldots, p_{\nu n_\nu})$$

$$|P_{\nu-1}^*| + |P_\nu| = 4, \ 0 \leqslant k_\nu \leqslant n_\nu - l_\nu, \ l_0 = 1, \ n_\varkappa = n$$

Каждая пара резонансных соотношений содержит k_ν общих собственных значений (l_ν, n_ν, k_ν принимают значения из набора $1, \ldots, n$). Заметим, что собственные значения $\lambda_{l_\nu}, \ldots, \lambda_{n_\nu - k_\nu}$ входят только в ν-е резонансное соотношение ($\nu = 1, \ldots, \varkappa$). Это относится также к собственным значениям $\lambda_{n_0-k_0}, \ldots, \lambda_{n_0}$ при $\nu = 1$ и $\lambda_{n_\varkappa - k_\varkappa + 1}, \ldots, \lambda_{n_\varkappa}$ при $\nu = \varkappa$. Можно показать, что в связи с указанным выше условием отсутствия других резонансов четвертого порядка, а также резонансов меньшего порядка n_0 в (2.1) может принимать только значения 1 или 2, а в (2.2) должно быть $k_\nu = 1$. При дальнейшем рассмотрении взаимодействия по схеме (2.1) ограничимся наиболее важным для приложений случаем $n_0 = 1$.

Для получения достаточных условий неустойчивости и асимптотической устойчивости в каждом из рассматриваемых случаев можно использовать функцию Ляпунова в виде [3]

(2.3) $$2W = \gamma_1 r_1 + \ldots + \gamma_n r_n + r_{n+1} + \ldots + r_N$$

где первая сумма — интеграл резонансной части модельной системы (т. е. системы, получаемой из (1.3) при $c_{kj} = d_{kj} = 0$; $k, j = 1, \ldots, N$). Это означает, что постоянные γ_s подчинены уравнениям

(2.4) $$\sum_{s=1}^{n} a_{\nu s}\gamma_s = 0, \qquad \sum_{s=1}^{n} b_{\nu s}\gamma_s = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, \varkappa$$

Дифференцирование (2.3) в силу (1.3) с учетом (2.4) дает

(2.5) $$W^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s r_s \sum_{j=1}^{N} c_{sj} r_j + \sum_{\alpha=n+1}^{N} r_\alpha \sum_{j=1}^{N} c_{\alpha j} r_j + \ldots$$

где невыписанные члены имеют не ниже, чем третий порядок малости.

При резонансах (1.2), не имеющих общих частот, модельная система распадается на $\varkappa$ независимых подсистем, а система (2.4) — на $\varkappa$ пар независимых уравнений. В случае, когда в каждое резонансное соотношение входит не менее трех собственных значений, а ранг матрицы коэффициентов $a_{\nu s}$, $b_{\nu s}$ для каждой пары независимых уравнений, составленных из (2.4), равен двум, вопрос об устойчивости может быть решен при помощи следующей леммы, доказанной [3] при рассмотрении одного резонанса нечетного порядка.

Лемма. Чтобы система уравнений (2.4) имела строго положительное (отрицательное) решение относительно γ_s, необходимо и достаточно существование для каждого $\nu = 1, \ldots, \varkappa$ хотя бы одной пары векторов

$$a_\nu = (a_{\nu j}, a_{\nu k}, a_{\nu l}),\ b_\nu = (b_{\nu j}, b_{\nu k}, b_{\nu l})$$
$$j, k, l = 1, \ldots, n;\ j \neq k \neq l,\ n \geqslant 3$$

для которой в ряду чисел $D_{kl}{}^\nu$, $D_{lj}{}^\nu$, $D_{jk}{}^\nu$, являющихся ковариантными компонентами векторного произведения $a_\nu \times b_\nu$, отсутствует перемена знака.

Как показано в [4], условия леммы остаются справедливыми и при взаимодействии резонансов по одному из указанных выше типов. При этом максимальный ранг матрицы системы (2.4) равен $2\varkappa$, и следовательно, $n - 2\varkappa$ постоянных γ_s могут быть выбраны произвольно.

Используя лемму и функцию (2.3), на основании теорем Ляпунова о неустойчивости и асимптотической устойчивости легко получить достаточные условия неустойчивости и асимптотической устойчивости.

Теорема 1. Пусть система (1.3) описывает один из следующих типов многократного резонанса: 1) независимые, 2) взаимодействующие по схеме (2.1) при $n_0 = 1$, 3) взаимодействующие по схеме (2.2) при $k_\nu = 1$ и пусть для резонансных коэффициентов нормальной формы $a_{\nu s}$, $b_{\nu s}$ выполняются условия леммы. Тогда, если $n - 2\varkappa$ $(n > 2\varkappa)$ положительными постоянными из числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, удовлетворяющих уравнениям (2.4), можно распорядиться так, чтобы квадратичная форма, входящая в (2.5), была определенно-отрицательной, то тривиальное решение системы (1.3) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Тривиальное решение системы (1.3) при наличии резонансных соотношений четвертого порядка одного из указанных видов будет неустойчивым, если выполняется одно из условий:

а) для резонансных коэффициентов не выполняется условие леммы, а постоянные $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, удовлетворяющие уравнениям (2.4), можно выбрать так, чтобы квадратичная форма, входящая в (2.5), была знакоопределенной;

б) для резонансных коэффициентов выполняется условие леммы и вышеупомянутая квадратичная форма выбором $n - 2\varkappa$ отрицательных постоянных из совокупности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, удовлетворяющей уравнениям (2.4), может быть сделана знакоопределенной;

в) для резонансных коэффициентов выполняется условие леммы и вышеупомянутая квадратичная форма выбором $n - 2\varkappa$ положительных постоянных из совокупности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, удовлетворяющей уравнениям (2.4), может быть сделана определенно-положительной.

Замечание. При $a_{\nu s} = b_{\nu s} = 0$ $(\nu = 1, \ldots, \varkappa;\ s = 1, \ldots, n)$ имеет место нерезонансный случай, который в основном рассмотрен [5, 6], а при $c_{kj} = d_{kj} = 0$ $(k,\ j =$

$= 1, \ldots; N$) задача будет решаться так же, как и в случае многократного резонанса нечетного порядка.

3. Для выяснения конструктивности предложенного метода рассмотрим частный случай системы (1.3) $n = N = 3$ при взаимодействии резонансов

(3.1) $$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \quad 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

Несмотря на то что условия леммы здесь теряют смысл, можно убедиться, что в этом случае необходимые и достаточные условия существования строго положительного (отрицательного) решения уравнений (2.4) имеют вид

(3.2) $$a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} = 0, \quad a_{21}b_{23} - a_{23}b_{21} = 0$$
$$b_{11}b_{12} < 0, \quad b_{21}b_{23} < 0$$

а постоянные γ_1, γ_2 выражаются через произвольную постоянную γ_3

(3.3) $$\gamma_1 = -\frac{b_{23}}{b_{21}}\gamma_3, \qquad \gamma_2 = \frac{b_{23}}{b_{21}}\frac{b_{11}}{b_{12}}\gamma_3$$

Заметим, что равенства, входящие в (3.2), всегда реализуются в гамильтоновых системах, а неравенства в этом случае являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости резонансной части модельной системы.

Матрицу M квадратичной формы, с которой начинается разложение (2.5) в рассматриваемом случае, можно записать в виде

(3.4) $$M = \| M_{\alpha\beta} \|, \quad M_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha c_{\alpha\beta} + \gamma_\beta c_{\beta\alpha}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

При помощи критерия Сильвестра получим следующие условия определенной отрицательности матрицы M:

(3.5) $$c_{11} < 0, \quad F \equiv -(4b_{11}b_{12}c_{11}c_{12} + \delta_1^2) > 0$$
$$G \equiv \frac{b_{23}}{b_{12}b_{21}^2}\left(\frac{b_{23}}{b_{12}}c_{33}F + \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{b_{12}b_{21}} - \frac{b_{11}}{b_{21}}c_{22}\delta_2^2 + \frac{c_{11}}{b_{12}b_{21}}\delta_3^2\right) < 0$$
$$\delta_1 = b_{11}c_{21} - b_{12}c_{12}, \quad \delta_2 = b_{21}c_{31} - b_{23}c_{13}$$
$$\delta_3 = b_{11}b_{23}c_{23} + b_{12}b_{21}c_{32}$$

На основании теоремы 1 заключаем, что неравенства (3.5) вместе с условием (3.2) и $\gamma_3 > 0$ дают достаточные условия асимптотической устойчивости. Вид полученных неравенств позволяет сделать вывод об их совместности. Причем в рассматриваемом случае условия асимптотической устойчивости удается получить не прибегая к подбору значения произвольной постоянной γ_3.

При изменении знаков первого и последнего неравенств (3.5) на противоположные тривиальное решение системы (1.3) будет неустойчиво согласно теореме 2 (случай в). Видно, что тривиальное решение будет также неустойчиво вне зависимости от выполнения условий (3.2), если только удовлетворяются неравенства $F > 0$, $c_{11}G < 0$, так как при этом справедливы случаи а) и б) теоремы 2.

4. Рассмотрим другой возможный подход к выявлению неустойчивости системы (1.3) при взаимодействии резонансов по схемам (2.1) и (2.2).

Теорема 3. Пусть для одного из резонансов, взаимодействующих по схеме (2.1) или (2.2), при $\nu = \beta$ неустойчивость обнаруживается по наличию инвариантного луча укороченной модельной системы уравнений. В этой системе, отвечающей (1.3), $c_{sj} = d_{sj} = 0$ для $s = 1, \ldots, n$; $j = n + 1, \ldots, N$, а также для тех $s, j = 1, \ldots, n$, для которых $p_{\beta j} =$

$= p_{\beta-1j} = 0$. Тогда, если для остальных резонансных соотношений при взаимодействии (2.1) выполняется условие

$$(4.1)\qquad |P_\nu| > 1, \quad \nu \neq \beta$$

а при взаимодействии (2.2) не выполняется ни одно из условий

$$(4.2)\qquad |P^*_{\beta-2}| \leqslant 1, \quad k_{\beta-1} = n_{\beta-1} - l_{\beta-1}, \quad |P_{\beta+1}| \leqslant 1$$

то тривиальное решение неустойчиво.

Справедливость этого утверждения следует из наличия растущего частного решения модельной системы, отвечающей (1.3): переменные, соответствующие одному из резонансов, возрастают по типу инвариантного луча, а остальные сохраняют нулевые значения. Это, в свою очередь, гарантирует неустойчивость [1] нулевого решения полной системы (1.3).

Теорема 3 применима для важного частного случая — канонических систем (указанные нормализующие преобразования переменных могут быть взяты в канонической форме и проводятся в соответствии с алгоритмами, описанными в [1]). Он отвечает следующему выбору параметров в (1.3):

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &a_{\nu s} = 0, \quad b_{\nu s} = p_{\nu s} b_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, \varkappa; \; s = 1, \ldots, n) \\ &c_{lj} = 0, \quad d_{lj} = d_{jl} \quad (l, j = 1, \ldots, N) \end{aligned}$$

Пусть, например, один из резонансов (2.1) при $\nu = \beta$ в отсутствие других является сильным. Это означает, согласно [1], что выполняется следующее условие наличия частного решения в виде инвариантного луча:

$$|b_\beta p_{\beta 1}^{p_{\beta 1}/2} \ldots p_{\beta n_0}^{p_{\beta n_0}/2} p_{\beta n_0+1}^{p_{\beta n_0+1}/2} \ldots p_{\beta n}^{p_{\beta n}/2}| >$$
$$> \Big| \sum_{k=1}^{n_0} \Big(\sum_{l=1}^{n_0} d_{kl} p_{\beta k} p_{\beta l} + \sum_{l=n_0+1}^{n} d_{kl} p_{\beta k} p_{\beta l} \Big) + \sum_{k=n_0+1}^{n} \sum_{l=n_0+1}^{n} d_{kl} p_{\beta k} p_{\beta l} \Big|$$

Часть компонент $p_{\beta l}$ $(l = n_0 + 1, \ldots, n)$ резонансного вектора P_ν, которые соответствуют частотам, не входящим в выбранное резонансное соотношение, обращается в нуль. Поэтому соответствующие им коэффициенты d_{kl} $(k = 1, \ldots, n)$ не будут оказывать влияния на величину правой части неравенства, как если бы эти коэффициенты совсем отсутствовали. Таким образом, очевидна возможность применения в рассмотренном случае первого утверждения теоремы 3.

Аналогично показывается конструктивность второго утверждения этой теоремы.

Пример. Рассмотрим фотогравитационную ограниченную круговую задачу трех тел, отличающуюся от классического случая тем, что пассивно гравитирующая точка испытывает еще и световое давление со стороны одного из основных тел [7]. Задача допускает семь положений относительного равновесия, пять из которых аналогичны известным точкам либрации [8]. В области устойчивости в первом приближении шестой и седьмой точек либрации обнаружено взаимодействие двух сильных резонансов [9]: $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ и $3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Выбирая за основной резонанс второе из приведенных резонансных соотношений ($\nu = \beta = 2$), будем иметь $|P_1| = 3 > 1$. Но это означает, что обнаруженный случай взаимодействия удовлетворяет всем условиям теоремы 3 и, следовательно, указанные точки либрации неустойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1979, с. 58—139.
2. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Условия устойчивости равновесия при резонансе 1 : 3.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 229—237.

[1] См. *Медведев С. В.* Одно доказательство леммы о неустойчивости. М., 1982.— 9 с. Деп. в ВИНИТИ 12.03.82; № 1088-82.

3. *Куницын А. Л.* Об асимптотической устойчивости резонансных систем.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1033—1038.
4. *Куницын А. Л., Медведев С. В., Тхай В. Н.* Разработка алгоритма и составление программы для решения на ЭВМ некоторых резонансных задач устойчивости динамических систем.— В кн.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, 1979, с. 56—63.
5. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения.— Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1, с. 24—27.
6. *Веретенников В. Г.* Об устойчивости движения в случае трех пар чисто мнимых корней.— Тр. Ун-та Дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Сер. теор. механ., 1966, т. 15, вып. 3, с. 166—179.
7. *Радзиевский В. В.* Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления.— Астрон. ж., 1950, т. 27, № 4, с. 250—256.
8. *Радзиевский В. В.* Пространственный случай ограниченной задачи трех излучающих и гравитирующих тел.— Астрон. ж., 1953, т. 30, № 3, 265—273.
9. *Пережогин А. А.* Об устойчивости точек либрации в ограниченной фотогравитационной круговой задаче трех тел.— Космич. исследования, 1982, т. 20, № 2, с. 196—205.

Москва

Поступила в редакцию
20.VIII.1983