Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 531.3

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Мощук Н. К.

Рассматривается движение произвольного тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости с вязким трением. Показано, что предельным множеством траекторий движения является множество движений этого тела на абсолютно гладкой плоскости без проскальзывания. Это множество представляет собой пересечение многообразий установившихся движений тела на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскостях и в зависимости от динамических и геометрических характеристик тела включает в себя положения равновесия, перманентные вращения вокруг вертикали, равномерные качения вдоль неподвижной прямой, регулярные прецессии. Разобраны примеры движения конкретных тел.

1. Пусть произвольное твердое тело движется по неподвижной горизонтальной плоскости, касаясь ее одной точкой P своей поверхности. Движение происходит в однородном поле тяжести. В неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ опорная плоскость задается уравнением $\zeta = 0$, а ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх. Введем в рассмотрение жестко связанную с телом правую систему координат $Gxyz$, оси которой направим по главным центральным осям инерции тела, а начало поместим в центр тяжести тела. Положение тела будем задавать координатами ξ, η, ζ его центра тяжести в неподвижной системе координат и углами Эйлера ψ, θ, φ, определяющими ориентацию тела относительно абсолютного пространства. Координата ζ будет известной функцией углов θ и φ, т. е. $\zeta = f(\theta, \varphi) > 0$. Предполагаем, что функция f — достаточно гладкая функция своих аргументов и такова, что тело может касаться опорной плоскости только одной точкой своей поверхности. Проекцию центра тяжести G на опорную плоскость обозначим через Q. В дальнейшем A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Gx, Gy, Gz, m — масса тела, g — ускорение свободного падения.

Для $\zeta^{\cdot}$ имеем следующее выражение:

$$\zeta^{\cdot} = \rho_\theta\theta^{\cdot} + \rho_\varphi\varphi^{\cdot}, \quad \rho_\theta = \partial f/\partial\theta, \quad \rho_\varphi = \partial f/\partial\varphi \tag{1.1}$$

Критические точки функции $f(\theta, \varphi)$ отвечают положениям равновесия тела на плоскости ($P = Q$, $\rho_\theta = \rho_\varphi = 0$). У произвольного тела существует не менее двух различных положений равновесия. Это следствие того, что функция на сфере имеет не менее двух критических точек.

Предположим, что на тело в точке касания P со стороны плоскости действует сила вязкого трения $\mathbf{F} = -mk\mathbf{V}_P$, где $\mathbf{V}_P$ — скорость точки P тела в неподвижной системе координат, $k > 0$ — коэффициент трения. Тогда для полной энергии тела $E > 0$ можно получить следующее уравнение:

$$dE/dt = -mkV_P^2 \tag{1.2}$$

Из (1.2) видно, что E не возрастает, а V_P с течением времени стремится к нулю, т. е. тело стремится избежать скольжения [1]. Следовательно

$$(1.3)\qquad \lim_{t\to\infty} E(t) = E^* \geqslant \nu > 0, \quad \nu = mg \min_{\theta,\varphi} f(\theta, \varphi)$$

Если функция $f(\theta, \varphi)$ аналитична, то и правые части дифференциальных уравнений, описывающих движение данной неконсервативной системы, аналитически зависят от фазовых координат. Поэтому и решение аналитически зависит от начальных значений и времени. Следовательно, скольжение никогда не исчезнет навсегда (хотя в нуль $V_P(t)$ может обращаться), так как в противном случае $V_P(t)$ была бы не аналитической функцией t.

Диссипативная функция Релея имеет вид $\Phi = {}^1/_2 mkV_P{}^2$. Поэтому уравнения движения тела (которые не приводятся в явном виде, так как они не понадобятся) обладают следующим свойством. Если в них положить $V_P = 0$, то члены уравнений, зависящие от k, обратятся в нуль. Заметим также, что координаты ξ и η явно не входят в уравнения движения.

Поскольку $E > 0$, а $E^\cdot \leqslant 0$, предельным множеством Ω решений уравнений движения тела по плоскости с вязким трением [2] будет максимальное инвариантное множество, содержащееся в ограниченной области $E \leqslant h$ фазового пространства, в точках которого $E^\cdot = 0$. Но $E^\cdot = 0$ тогда и только тогда, когда $V_P = 0$. Таким образом, максимальное инвариантное множество из области $E \leqslant h$, в точках которого $E^\cdot = 0$,— это множество Ω движений рассматриваемого тела на абсолютно гладкой плоскости без проскальзывания. Множество Ω асимптотически устойчиво для любых возмущений, возможных при движении тела по плоскости с вязким трением, и инвариантно относительно фазового потока, заданного уравнениями движения тела по плоскости с произвольной шероховатостью.

Для определения множества предельных движений тела по плоскости с вязким трением надо среди всех движений этого тела на абсолютно гладкой плоскости выделить те, у которых $V_{P\xi} = V_{P\eta} = 0$.

Приведем выражения для проекций $V_{P\xi}$, $V_{P\eta}$ скорости точки P тела на оси $O\xi$ и $O\eta$

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} &V_{P\xi} = \xi^\cdot + F_1 \cos\psi - F_2 \sin\psi, \quad V_{P\eta} = \eta^\cdot + F_1 \sin\psi + \\ &+ F_2 \cos\psi \\ &F_1 = f\varphi^\cdot \sin\theta + \rho_\theta (\psi^\cdot + \varphi^\cdot \cos\theta), \quad F_2 = f\theta^\cdot - \rho_\varphi (\psi^\cdot + \\ &+ \varphi^\cdot \cos\theta)/\sin\theta \end{aligned}$$

Условия отсутствия проскальзывания, используя (1.4), можно записать в виде

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} &F_1 = -\beta \sin(\alpha + \psi), \quad F_2 = -\beta \cos(\alpha + \psi) \\ &\beta = \sqrt{\xi^{\cdot 2} + \eta^{\cdot 2}}, \quad \sin\alpha = \xi^\cdot/\beta, \quad \cos\alpha = \eta^\cdot/\beta \end{aligned}$$

Для $f^\cdot$ с учетом (1.1) и (1.5) получаем выражение

$$(1.6)\qquad ff^\cdot = -\beta\, [\rho_\varphi \sin(\alpha + \psi)/\sin\theta + \rho_\theta \cos(\alpha + \psi)]$$

Из (1.5) следует, что

$$(1.7)\qquad F_1{}^2 + F_2{}^2 = \beta^2$$

Рассмотрим движение произвольного тела на абсолютно гладкой плоскости. Координаты ξ, η, ψ циклические, и задача сводится к исследованию гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Величины $\xi^\cdot$, $\eta^\cdot$ постоянные. Координата ψ циклическая, поэтому соотношения (1.5) и (1.6) могут выполняться только для таких движений, когда или $\psi^{\cdot} = 0$, или $\beta = 0$. Остальные предельные движения сводятся к этим, если переобозначить оси связанной системы координат так, чтобы они снова образовывали правую тройку, или, при наличии динамической симметрии, ввести связанную систему координат $Gxyz$ другим возможным способом. Дальнейший поиск предельных движений, используя условия (1.5) — (1.7), уравнения движения и первые интегралы, провести несложно. Возможны только следующие типы предельных движений.

а) Многообразие Ω_1 положений равновесия тела.

б) Если одна из главных центральных осей инерции тела ортогональна его поверхности, то существует многообразие Ω_2 перманентных вращений тела вокруг этой оси, направленной вертикально. Исчерпывающее исследование устойчивости таких движений содержится в [3].

в) Если в сечении поверхности тела, перпендикулярном одной из главных центральных осей инерции (например, Gz), лежит окружность, а радиус-вектор точки на этой окружности относительно центра тяжести G ортогонален поверхности тела, то существует многообразие Ω_3 качений тела этим сечением вдоль неподвижной прямой с постоянной скоростью. Центр тяжести при этом находится над точкой касания. Аналитически условия существования этих качений можно представить следующим образом:

$$\vartheta = \theta_0 \neq 0,\ \pi,\ \psi = \psi_0,\ \varphi^{\cdot} = \omega, \quad \rho_\varphi(\theta_0, \varphi) = \rho_\theta(\theta_0, \varphi) = 0$$

г) Если одна из главных центральных осей инерции тела (например, Gz) является осью динамической симметрии, а в сечении поверхности тела, перпендикулярном этой оси, лежит окружность и радиус-вектор точки на этой окружности относительно центра тяжести G не ортогонален поверхности тела, то существует многообразие Ω_4 регулярных прецессий. Аналитически условия существования регулярных прецессий выглядят так [3]:

$$A = B, \quad \theta = \theta_0, \quad \rho_\varphi(\theta_0, \varphi) = 0, \quad [Af_0 \cos\theta_0 + C(\rho_\theta \sin\theta_0 - f_0 \cos\theta_0)]\, \rho_\theta > 0$$

В предположении, что $\rho_\varphi \equiv 0$, в [3] исследована устойчивость таких движений.

Заметим, что во всех указанных движениях высота центра тяжести на опорной плоскости постоянна, т. е. $f = \mathrm{const}$.

Множество $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ предельных движений тела — это множество всех движений тела на плоскости с вязким трением без диссипации энергии. Из приведенной классификации следует [3], что Ω лежит на пересечении многообразий установившихся движений тела на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскостях. Поэтому все возможные установившиеся движения входят в Ω. Они достаточно подробно изучены [3].

В общем случае предельными движениями тела могут быть только положения равновесия. Их у тела не меньше двух. То положение равновесия, в котором функция высоты $f(\theta, \varphi)$ имеет строгий локальный минимум, очевидно, устойчиво по Ляпунову. Если же в положении равновесия функция $f(\theta, \varphi)$ не имеет локального минимума, то это равновесие неустойчиво [3].

Для каждого конкретного тела, учитывая его геометрические и динамические характеристики, можно определить структуру множества Ω, т. е.

представить Ω как объединение попарно непересекающихся многообразий $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Каждое многообразие Ω_i будет характеризоваться некоторым числом параметров. Однако из того, что данная траектория стремится к многообразию Ω_i, вообще говоря, не следует, что она стремится к определенной траектории из Ω_i. Тем не менее, из (1.3) следует, что величина полной энергии тела имеет предельное значение. Поэтому, если Ω_i представляет собой однопараметрическое многоообразие движений, то из того, что траектория стремится к Ω_i, будет следовать, что она стремится к определенной траектории из Ω_i. Например, для однородного трехосного эллипсоида предельным движением может быть только перманентное вращение с определенной угловой скоростью вокруг одной из своих осей, направленной вертикально (так как только в этом случае $f = \mathrm{const}$). Тенденция эллипсоида вращаться вокруг вертикально направленной наибольшей оси исследована в [4].

Если же многообразие Ω_i двухпараметрическое, то условие (1.3) позволяет определить, какой из параметров имеет предельное значение, а по какому возможно «блуждание». Например, для тела вращения, у которого ρ_θ на $(0, \pi)$ обращается хотя бы раз в нуль, существует двухпараметрическое многообразие Ω_3 качений тела вдоль неподвижной прямой. Параметрами удобно выбрать угол ψ_0 и угловую скорость вращения $\varphi^\cdot = \omega$. Из (1.3) следует, что величина угловой скорости тела стремится к ω при $t \to \infty$, а по ψ возможно блуждание, но скорость блуждания стремится к нулю.

Определение множества Ω_i, соответствующего данному набору начальных данных, представляет собой сложную в теоретическом плане задачу. Ее можно решать, например, на ЭВМ (в данной задаче расчет на достаточно большом промежутке времени позволяет определить, в окрестность какого инвариантного множества Ω_i вышла траектория) или асимптотическими методами.

Пусть трение мало, т. е. $0 < k\sqrt{\nu/(mg^2)} \ll 1$, а тело динамически и геометрически симметрично (тело вращения). Тогда $A = B$, $\rho_\varphi \equiv 0$. Уравнения движения удобно рассматривать в переменных $\xi^\cdot$, $\eta^\cdot$, E, u, v, θ, $\theta^\cdot$, ψ [5]

(1.8)
$$\xi^{\cdot\cdot} = -kV_{P\xi}, \quad \eta^{\cdot\cdot} = -kV_{P\eta}, \quad E^\cdot = -mkV_P^2$$
$$u^\cdot = -mk\,(f \sin\theta + \rho_\theta \cos\theta)\,(\xi^\cdot \cos\psi + \eta^\cdot \sin\psi + F_1)$$
$$v^\cdot = -mk\rho_\theta\,(\xi^\cdot \cos\psi + \eta^\cdot \sin\psi + F_1)$$
$$\theta^{\cdot\cdot} = \frac{(u - v\cos\theta)(u\cos\theta - v)}{A\,(A + m\rho_\theta^2)\sin^3\theta} - m\rho_\theta \frac{g + \rho_{\theta\theta}\theta^{\cdot 2}}{A + m\rho_\theta^2} -$$
$$-mkf\,\frac{-\xi^\cdot \sin\psi + \eta^\cdot \cos\psi + F_2}{A + m\rho_\theta^2}$$
$$\psi^\cdot = \frac{v - u\cos\theta}{A\sin^2\theta}$$

Здесь v, u — проекции вектора кинетического момента тела относительно его центра тяжести на вертикаль и ось симметрии тела, $\rho_{\theta\theta} = d^2f\,(\theta)\,/\,d\theta^2$. Невозмущенное движение ($k = 0$) — это движение тела вращения на гладкой плоскости. Оно достаточно подробно изучено [1, 6]. Если исключить положения равновесия и движения по сепаратрисе, то в невозмущенном движении функция $\theta\,(t)$ — периодическая, а $\psi\,(t)$ допускает представление

(1.9) $$\psi\,(t) = \lambda_\psi t + \psi_1\,(t)$$

где постоянная λ_ψ зависит от E, u, v, а функции $\theta(t)$ и $\psi_1(t)$ — периодические, с одинаковым периодом τ, причем среднее по времени функции $\psi_1(t)$ равно нулю.

Исследование возмущенного ($k \neq 0$) движения будем проводить методом усреднения [7].

В возмущенном движении переменные $E, u, v, \xi^\cdot, \eta^\cdot$ — медленные, а θ и ψ — быстрые. В нерезонансном случае, т. е. когда $\lambda_\psi \neq 2\pi n/\tau$ ($n = 0, 1 \ldots$), усреднение по времени можно заменить независимым усреднением по ψ и по θ, где θ — функция времени и медленных переменных E, u, v. Из (1.4) видно, что $\langle V_{P\xi}\rangle = \xi^\cdot$, $\langle V_{P\eta}\rangle = \eta^\cdot$ (угловые скобки означают усреднение). Система (1.8) после усреднения имеет вид

$$\begin{gathered}
\xi^{\cdot\cdot} = -k\xi^\cdot, \quad \eta^{\cdot\cdot} = -k\eta^\cdot, \quad E^\cdot = -mk(\xi^{\cdot 2} + \eta^{\cdot 2} + \langle F_1^2 + F_2^2\rangle) \\
v^\cdot = -mk\langle \rho_\theta F_1\rangle, \quad u^\cdot = -mk\langle (f\sin\theta + \rho_\theta\cos\theta)F_1\rangle
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Первые два уравнения (1.10) легко интегрируются, а последние три образуют замкнутую систему. Получаем, что скорость центра тяжести тела с течением времени стремится к нулю, т. е. для достаточно малых k в нерезонансном случае предельное множество траекторий движения — это движения из Ω с нулевой (или близкой к нулю) скоростью центра тяжести. Следовательно, чтобы финальным движением было движение из Ω_3, необходимо, чтобы между λ_φ и $2\pi/\tau$ выполнялись резонансные соотношения $\lambda_\psi = 2\pi n/\tau$ ($n = 0, 1 \ldots$).

Предельными движениями тела вращения будут движения, описанные в пп. а) — г). В этом можно убедиться приравняв выражения для $\theta^\cdot$, получаемые из (1.7) и из выражения для полной энергии (выписанного, например, в [1]). Получим соотношение, связывающее значения первых интегралов E, u, v и угол θ. Ясно, что в общем случае из этого соотношения следует, что $\theta = \text{const}$. Исключение составят только те тела, у которых $\rho_\theta(\theta) = 0$ в некотором диапазоне изменения угла θ. Для этих тел будут существовать также качения, при которых тело равномерно вращается вокруг оси Gx или Gy (см. следующий пример).

2. Рассмотрим движение тяжелого шара на плоскости с вязким трением. Предполагаем, что центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром, а $A > B > C$. Пусть G_1, G_2, G_3 — проекции вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ шара относительно его центра на оси ξ, η, ζ соответственно. Вектор кинетического момента шара относительно точки касания P сохраняется, поэтому

$$G_1 - mR\eta^\cdot = K_1, \quad G_2 + mR\xi^\cdot = K_2, \quad G_3 = K_3 \tag{2.1}$$

Здесь R — радиус шара, $K_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$). Будем использовать также переменную $\varkappa = 2T/G^2$, $1/A \leqslant \varkappa \leqslant 1/C$ (T — кинетическая энергия движения шара относительно центра тяжести).

Движение такого шара на абсолютно гладкой плоскости складывается из прямолинейного и равномерного движения центра тяжести шара и движения Эйлера — Пуансо относительно центра тяжести. Выделим такие движения, у которых $V_{P\xi} = V_{P\eta} = 0$, так как $V_{P\xi} = \xi^\cdot - \omega_\eta R$, $V_{P\eta} = \eta^\cdot + \omega_\xi R$ (ω_ξ, ω_η — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси $O\xi$ и $O\eta$). Тогда сразу получаем, что для таких движений ω_ξ и ω_η должны быть постоянными. Из геометрической интерпретации Пуансо видно, что искомыми движениями будут только вращения вокруг одной из главных центральных осей инерции. Эта ось ориентирована произвольно в абсолютном пространстве, а составляющие скорости точки P за счет вращения и движения центра тяжести компенсируют друг друга. Следовательно, предельным движением шара будет вращение вокруг одной из главных центральных осей инерции. Шар будет асимптотически стремиться к этому движению, не достигая его.

Направим Gz вдоль этой оси, I — момент инерции относительно Gz ($I = A, B, C$). Обозначим через $\theta_0, \psi_0, \xi_0^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_0^{\boldsymbol{\cdot}}, \varphi_0^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega$ параметры этого движения. Они связаны следующим образом с первыми интегралами K_i:

$$(2.2)\qquad I\omega \sin\theta_0 \sin\psi_0 - mR\eta_0^{\boldsymbol{\cdot}} = K_1, \quad -I\omega\sin\theta_0\cos\psi_0 + mR\xi_0^{\boldsymbol{\cdot}} = K_2, \quad I\omega\cos\theta_0 = K_3$$

Условия отсутствия проскальзывания запишутся в виде

$$(2.3)\qquad \xi_0^{\boldsymbol{\cdot}} + \omega R\sin\theta_0\cos\psi_0 = 0, \quad \eta_0^{\boldsymbol{\cdot}} + \omega R\sin\theta_0\sin\psi_0 = 0$$

Из (2.2), (2.3) следует, что параметры финального движения θ_0, ψ_0, ω, $\xi_0^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\eta_0^{\boldsymbol{\cdot}}$ однозначно можно выразить через первые интегралы K_i (исключение составляет простой случай $K_1 = K_2 = K_3 = 0$). Неизвестно только, вокруг какой из осей шара будет происходить вращение (т. е. к какой из трех возможных величин $1/A$, $1/B$, $1/C$ стремится $\varkappa$).

При малых k методом усреднения можно показать [8], что для любых начальных данных из области $1/A < \varkappa < 1/B$ и для большинства начальных данных из области $1/B < \varkappa < 1/C$ шар стремится к вращению вокруг оси наибольшего из моментов инерции, т. е. $I = A$, $\varkappa \to 1/A$ при $t \to \infty$.

Кроме того, получаем такое следствие. Качение шара, при котором он вращается вокруг оси наибольшего момента инерции на плоскости с малым вязким трением, устойчиво по отношению к переменным θ, $\theta^{\boldsymbol{\cdot}}$, ψ, $\psi^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\xi^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\eta^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\varkappa$, причем асимптотически по переменной $\varkappa$. Вращение же шара вокруг оси наименьшего и среднего момента инерции неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appell P.* Traité de Mécanique rationnelle. V. 2. P.: Gauthier-Villars, 1953. 575 p.— Рус. перев.: М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
3. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
4. *Маркеев А. П.* О движении эллипсоида на шероховатой плоскости при наличии скольжения.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 310—320.
5. *Самсонов В. А.* Качественный анализ задачи о движении волчка по плоскости с трением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 29—35.
6. *Маркеев А. П., Мощук Н. К.* Качественный анализ движения тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 37—42.
7. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
8. *Мощук Н. К.* О движении шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 916—921.

Москва

Поступила в редакцию
10.X.1983