

УДК 531.3

## ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

Фуфаев Н. А.

Предлагается математическая модель для описания движения системы с качением: как без скольжения, так и со скольжением. Указываются условия перехода от одного режима движения к другому. Приводятся примеры.

Качение без скольжения эквивалентно наложению кинематической связи, в общем случае реономной [1], описываемой дифференциальными уравнениями, линейными относительно обобщенных скоростей. Эти уравнения обычно не сводятся к конечным соотношениям между обобщенными координатами, поэтому качение без скольжения — это движение с неголономной связью. Исследование движения системы с качением при учете скольжения сводится к изучению динамики системы с освобождающими кинематическими связями. При этом возникают две задачи.

1°. Описание дифференциальными уравнениями движения системы с качением в общем случае.

2°. Установление условий перехода от одного режима качения к другому.

В классической механике неголономных систем, где обычно рассматривается качение без скольжения, вторая задача отпадает, а первая решена в работах Чаплыгина, Воронца, Больцмана, Гамеля и др. При качении без скольжения колеса с упругой деформируемой шиной возникают кинематические связи, существенно отличающиеся от классических неголономных связей качения твердого тела. Общие уравнения движения колесного экипажа при его малых отклонениях от равномерного прямолинейного движения указаны в работе [2], где использована теория Келдыша качения колеса с эластичной шиной. Эти уравнения были обобщены [3] на случай криволинейного движения колесного экипажа по траектории достаточно малой кривизны.

В общем случае уравнения движения системы с качением имеют наиболее простой вид в сопровождающей системе координат [4, 5] и должны записываться в форме уравнений в квазикоординатах. Как известно, в такой форме записываются также уравнения движения неголономной системы [6], поэтому для описания движения системы с качением как при отсутствии, так и при наличии скольжения уравнения в квазикоординатах наиболее удобны. Однако при этом необходимо обобщить известные уравнения Больцмана — Гамеля на случай системы с реономными кинематическими связями. Получаемые таким образом уравнения в квазикоординатах решают первую из упомянутых задач и могут быть положены в основу общей теории движения систем с качением.

Исследование особенностей структуры фазового пространства системы с качением позволяет решить и вторую задачу. При этом выясняется, что уравнения кинематических связей, описывающие качение без скольжения, можно рассматривать как уравнения некоторой гиперповерхности  $\Pi$  в фазовом пространстве. Режиму качения без скольжения соответствует движение фазовой точки по поверхности  $\Pi$  в той ее области, которая устойчива относительно отклонений от поверхности  $\Pi$ . Отыскание границ этой области решает вопрос об условиях перехода от качения без скольжения к качению со скольжением, а также позволяет указать условия обратного перехода.

**1. Общие уравнения динамики системы с качением.** Пусть положение системы с качением определяется  $n$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , а качение без скольжения описывается  $n - m$  уравнениями вида

$$(1.1) \quad a_{ls}(q, t) \dot{q}_s + a_l(q, t) = 0 \\ (l = m + 1, m + 2, \dots, n)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до  $n$ .

Запишем уравнение Даламбера — Лагранжа

$$(1.2) \quad \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0$$

( $T = T(q, \dot{q}, t)$  — кинетическая энергия системы,  $Q_s(q, \dot{q}, t)$  — заданные обобщенные силы). Введем квазиординаты  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ , производные которых по времени связаны с обобщенными координатами при помощи независимых соотношений

$$(1.3) \quad \dot{\pi}_j = a_{js}(q, t) \dot{q}_s + a_j(q, t)$$

так, что правые части последних  $n - m$  соотношений совпадают с левыми частями уравнений (1.1). Разрешая систему уравнений (1.3) относительно  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ , получим

$$(1.4) \quad \dot{q}_s = b_{si}(q, t) \dot{\pi}_i + b_s(q, t)$$

Можно проверить, что коэффициенты в уравнениях (1.3) и (1.4) связаны соотношениями

$$(1.5) \quad a_{js} b_{si} = \delta_{ij}, \quad a_j = -a_{js} b_s, \quad b_{si} a_{ir} = \delta_{sr}$$

в которых  $\delta_{ij}$  и  $\delta_{sr}$  — символы Кронекера. Согласно уравнениям (1.4), вариации истинных координат  $\delta q_s$  и квазиординат  $\delta \pi_i$  связаны соотношениями  $\delta q_s = b_{si}(q, t) \delta \pi_i$ . Подставляя это в (1.2), получим сумму, которая вследствие независимости вариаций  $\delta \pi_i$  распадается на  $n$  уравнений вида

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) b_{si} - \frac{\partial T}{\partial q_s} b_{si} = Q_s b_{si}$$

Величина  $\Pi_i = Q_s b_{si}$  представляет обобщенную силу, которая производит работу на перемещении  $\delta \pi_i$  при условии, что все остальные  $\delta \pi$  равны нулю. Введем функцию  $T^* = T^*(q, \pi, t)$ , которая получается из выражения кинетической энергии  $T(q, \dot{q}, t)$  после исключения всех  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  при помощи соотношений (1.4). Если в полученной функции  $T^*(q, \pi, t)$  проделать обратную операцию, используя соотношения (1.3), тогда, очевидно, вновь получим  $T(q, \dot{q}, t)$ , т. е.

$$(1.7) \quad T^*(q, a_{jr} \dot{q}_r + a_j, t) = T(q, \dot{q}, t)$$

Дифференцируя это соотношение по  $\dot{q}_s$ , имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} a_{js}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \right) a_{js} + A_s, \quad A_s = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left[ \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} (b_{rk} \dot{\pi}_k + b_r) + \frac{\partial a_{js}}{\partial t} \right]$$

Используя (1.5), приходим к следующему соотношению:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) b_{si} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i} + A_s b_{si}$$

Дифференцируя затем соотношение (1.7) по  $q_s$ , получим

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial T^*}{\partial q_s} + B_s, \quad B_s = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left[ \frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} (b_{rk} \dot{\pi}_k + b_r) + \frac{\partial a_j}{\partial q_s} \right]$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} b_{si} = \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + B_s b_{si}$$

где частная производная по квазиординате  $\pi_i$  означает оператор  $\partial T^* / \partial \pi_i = (\partial T^* / \partial q_s) b_{si}$ . Подставим найденные выражения в (1.6) и

получим искомые уравнения движения

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} (\gamma_{ijk} \dot{\pi}_k + \gamma_{ij}) = \Pi_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\gamma_{ijk} = b_{si} b_{rk} \left( \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} \right)$$

$$\gamma_{ij} = b_{si} \left[ b_r \left( \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} \right) + \frac{\partial a_{js}}{\partial t} - \frac{\partial a_j}{\partial q_s} \right]$$

Выражения коэффициентов  $\gamma_{ijk}$  и  $\gamma_{ij}$  в этих уравнениях удобнее всего находить при помощи так называемых перестановочных соотношений [6], которые в данном случае имеют вид

$$(1.9) \quad d\delta\pi_j - \delta d\pi_j = \gamma_{ijk} d\pi_k \delta\pi_i + \gamma_{ij} dt \delta\pi_i$$

и составляются на основании выражений (1.3) и (1.4).

Уравнения в квазикоординатах (1.8) отличаются от уравнений Больцмана — Гамеля дополнительными членами  $\gamma_{ij} (\partial T^* / \partial \pi_j)$ , которые обращаются в нуль лишь в том случае, если система (1.3) однородна и ее коэффициенты не зависят явно от времени.

Уравнения (1.8) описывают динамику системы с качением как без скольжения, так и со скольжением. В самом деле, если осуществляется качение со скольжением, то уравнения (1.1) отсутствуют и величины  $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_n$ , называемые характеристиками, могут принимать любые значения. Для их определения как функций времени имеем систему (1.8), которая вместе с соотношениями (1.3) составляет замкнутую систему дифференциальных уравнений. Если же осуществляется качение без скольжения, то в силу выполнения уравнений (1.1) характеристики  $\dot{\pi}_{m+1} = \dot{\pi}_{m+2} = \dots = \dot{\pi}_n = 0$  и уравнения динамики (1.8) составляются лишь для первых  $m$  характеристик  $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_m$ .

Для системы с качением, являющейся колесной транспортной машиной, условия качения без скольжения могут выполняться не для всех колес, а для одного, двух и т. д. В этом случае последние  $n - m$  уравнений движения (1.8) целесообразно записать в виде

$$(1.10) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_l} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_l} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} (\gamma_{ljk} \dot{\pi}_k + \gamma_{lj}) = \Pi_l + R_l$$

$$(l = m + 1, m + 2, \dots, n)$$

выделив из обобщенных сил  $\Pi_l$  силы  $R_l$  взаимодействия колеса с дорогой.

Рассмотрим далее случай, когда колеса жесткие, а при их соприкосновении с опорной поверхностью действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона — Амонтона. В этом случае реакция

$$(1.11) \quad R_l = \begin{cases} -vN_l & (\dot{\pi}_l > 0) \\ -vN_l < R_l < vN_l & (\dot{\pi}_l = 0) \\ vN_l & (\dot{\pi}_l < 0) \end{cases}$$

если  $l$ -е колесо имеет лишь одну компоненту  $\dot{\pi}_l$  скорости скольжения;  $v$  — коэффициент трения скольжения,  $N_l$  — сила нормального давления на  $l$ -е колесо со стороны опорной плоскости.

При наличии двух компонент скорости скольжения ( $\dot{\pi}_l$  — продольная и  $\dot{\pi}_{l+1}$  — поперечная составляющие) реакции  $R_l$  и  $R_{l+1}$  выражаются соотношениями

$$(1.12) \quad R_l = -vN_l \dot{\pi}_l (\dot{\pi}_l^2 + \dot{\pi}_{l+1}^2)^{-1/2}, \quad R_{l+1} = -vN_l \dot{\pi}_{l+1} (\dot{\pi}_l^2 + \dot{\pi}_{l+1}^2)^{-1/2}$$

если  $\pi_l \dot{\neq} 0$  и (или)  $\pi_{l+1} \dot{\neq} 0$ , и принимают любое значение в области  $(R_l^2 + R_{l+1}^2)^{1/2} < \nu N_l (N_l > 0)$ , если  $\pi_l \dot{=} \pi_{l+1} \dot{=} 0$ .

Таким образом, при качении  $l$ -го колеса без скольжения величина  $R_l$  или соответственно  $R_l$  и  $R_{l+1}$  в уравнениях (1.10) оказываются такими же неизвестными функциями времени, как и фазовые переменные: они определяются в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Система уравнений (1.10) может быть разрешена относительно ускорений  $\pi_l \ddot{\phantom{\pi}}$  и после исключения остальных ускорений  $\pi_j \ddot{\phantom{\pi}}$ , содержащихся в этих уравнениях, при помощи уравнений динамики (1.8), составленных для первых  $m$  квазикоординат, записана в нормальной форме Коши

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \pi_l \ddot{\phantom{\pi}} &= f_l(q_1, \dots, q_n, \pi_1 \dot{\phantom{\pi}}, \dots, \pi_n \dot{\phantom{\pi}}, R_{m+1}, \dots, R_n) \\ (l &= m + 1, m + 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Полученные уравнения будут использованы в п. 2 для вывода условия перехода от качения колеса без скольжения к качению со скольжением, а также условий обратного перехода. Поскольку  $\pi_l \dot{\phantom{\pi}}$  — это компонента скорости скольжения, каждое из уравнений системы (1.13) выражает зависимость скорости изменения  $l$ -й компонентой от значений фазовых переменных, так как, согласно (1.11) и (1.12), величины  $R_l$  ( $l = m + 1, m + 2, \dots, n$ ) при любом режиме качения также являются функциями фазовых координат.

**2. Структура фазового пространства системы с качением. Условия перехода от одного режима движения к другому.** Движение системы с качением становится геометрически наглядным, если ввести в рассмотрение фазовое пространство и выяснить особенности его структуры. Из п. 1 следует, что в случае движения со скольжением состояние системы в каждый момент времени  $t$  определяется  $2n$  величинами:  $n$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и  $n$  характеристиками  $\pi_1 \dot{\phantom{\pi}}, \pi_2 \dot{\phantom{\pi}}, \dots, \pi_n \dot{\phantom{\pi}}$ . Следовательно, уравнения (1.3) и (1.8) описывают движение изображающей точки в расширенном фазовом пространстве  $\Phi(q, \pi \dot{\phantom{\pi}}, t)$  размерности  $2n + 1$ .

Уравнения (1.1), описывающие качение рассматриваемой системы без скольжения, можно рассматривать как уравнения некоторой гиперплоскости  $\Pi$  размерности  $n + m + 1$

$$(2.1) \quad \pi_{m+1} \dot{\phantom{\pi}} = 0, \pi_{m+2} \dot{\phantom{\pi}} = 0, \dots, \pi_n \dot{\phantom{\pi}} = 0$$

в фазовом пространстве  $\Phi$ . Отсюда следует, что при качении без скольжения изображающая точка перемещается в фазовом пространстве  $\Phi$  по гиперплоскости (2.1) согласно уравнениям движения (1.8), составленным лишь для первых характеристик  $\pi_1 \dot{\phantom{\pi}}, \pi_2 \dot{\phantom{\pi}}, \dots, \pi_m \dot{\phantom{\pi}}$ , и соотношениям (1.3). Во всех этих выражениях следует учесть соотношения (2.1).

Если системой с качением является колесная машина, тогда гиперплоскость представляет пересечение ветвей  $\Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^r$ , число  $r$  которых определяется числом и схемой расположения колес. Движение изображающей точки по одной из ветвей  $\Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^r$  соответствует качению без скольжения одного колеса (или нескольких колес), а движение по гиперплоскости  $\Pi$  — качению без скольжения всех колес одновременно.

Рассмотрим особенности структуры разбиения фазового пространства  $\Phi$  на траектории, связанные с наличием ветви  $\Pi^s$  ( $s = 1, 2, \dots, r$ ) в случае, когда колеса жесткие, а при их контакте с опорной поверхно-

стью действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона — Амонтона. Поскольку зависимость силы сухого трения от величины скорости скольжения  $v$  изображается кривой, имеющей при  $v = 0$  разрыв первого рода, дифференциальные уравнения, описывающие движение изображающей точки в различных областях фазового пространства  $\Phi$ , на которые оно разбивается гиперплоскостями  $\Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^r$ , будут различными. В эти уравнения будут входить величины  $N_s$  — силы нормального давления взаимодействующих тел, которые могут быть или постоянными (т. е. функциями физических параметров системы) или зависеть еще от фазовых переменных.

В обычном случае величины  $N_s$  конечны и положительны ( $N > 0$ , если взаимодействующие тела давят одно на другое). Обращение  $N_s$  в нуль свидетельствует лишь о прекращении контакта между соответствующими телами. Будем предполагать, что для конечных значений  $N_s$  во всех областях фазового пространства  $\Phi$  рассматриваемой системы с качением удовлетворяются обычные условия, которые обеспечивают существование и единственность решений дифференциальных уравнений при заданных начальных значениях переменных.

Может, однако, случиться, что при некотором соотношении параметров и фазовых переменных сила  $N_s$  нормального давления становится отрицательной, переходя от положительных значений к отрицательным не через нуль, а через бесконечность. (Такая ситуация возникает при обращении в нуль коэффициента при  $N_s$  или определителя системы уравнений, служащих для определения сил нормального давления.) В этом особом случае (парадокс Пэнлеве [7]) исходные гипотезы классической механики твердых тел оказываются недостаточными для определения движения рассматриваемой системы с качением. Физическая причина, приводящая к парадоксу Пэнлеве, бывает связана с эффектом заклинивания, что в рамках модели абсолютно твердого тела и приводит к возрастанию сил взаимодействия до бесконечности. Переход величины силы  $N_s$  от положительных значений к отрицательным через бесконечность выражается в том, что в фазовом пространстве имеется многообразие точек, на котором поле фазовых скоростей терпит разрыв второго рода. Такой характер нарушения регулярности векторного поля скоростей в фазовом пространстве может служить признаком наличия парадокса Пэнлеве.

Дальнейшие рассуждения относятся к системам с качением, в которых парадокс Пэнлеве не возникает.

Пусть ради определенности ветвь  $\Pi^s$  соответствует качению без скольжения  $s$ -го колеса. Если в силу наложенных на систему связей  $s$ -е колесо вынуждено катиться так, что боковое или продольное скольжение отсутствует, то вектор  $v_s$  скорости скольжения колеса будет иметь только одну компоненту, которую обозначим  $\pi_s^*$ . Гиперплоскость  $\Pi^s$  ( $\pi_s^* = 0$ ) разделит фазовое пространство  $\Phi$  на две области:

$$\Phi_+ (\pi_s^* > 0) \quad \text{и} \quad \Phi_- (\pi_s^* < 0)$$

Согласно закону Кулона — Амонтона, сила трения скольжения в области  $\Phi_+$  принимает некоторое значение, зависящее от нормального давления, а в области  $\Phi_-$  — такое же значение, но с обратным знаком. Следовательно, уравнения (1.8), описывающие движение изображающей точки в  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$ , будут в этих областях различными. Решения уравнений (1.8) при переходе из одной области в другую должны сшиваться по непрерывности фазовых координат.

Движение изображающей точки по гиперплоскости  $\Pi^s$  описывается уравнениями (1.8), составленными для квазиординат  $\pi_1, \dots, \pi_{s-1}, \pi_{s+1}, \dots, \pi_n$ , в которых принято во внимание равенство  $\pi_s^* = 0$ . Однако указанное движение реализуется лишь в области  $G^s$  гиперплоскости  $\Pi^s$ , устойчивой относительно отклонений от  $\Pi^s$ . Необходимым и достаточным

м устойчивости области  $G^s$  является такое расположение фазовых траекторий в малой окрестности гиперплоскости  $\Pi^s$ , при котором изображающая точка, двигаясь по этим траекториям, приходит на гиперплоскость как из области  $\Phi_+$ , так и из области  $\Phi_-$ . Будем называть такое расположение стыковкой фазовых траекторий. Таким образом, связная область стыковки фазовых траекторий и определяет область  $G^s$  на гиперплоскости  $\Pi^s$ .

Граница  $\Gamma^s$  области  $G^s$  будет состоять из  $\Gamma_+^s$  и  $\Gamma_-^s$ . Если, двигаясь в области  $G^s$ , изображающая точка достигает границы  $\Gamma_+^s$ , то она переходит в область  $\Phi_-$ , а после достижения границы  $\Gamma_-^s$  — в область  $\Phi_+$ . Из сказанного следует, что отыскание границ области  $G^s$  полностью решает задачу определения условий перехода качения колеса без скольжения к качению со скольжением, а также условия обратного перехода.

Математическое определение области  $G^s$  сводится к одновременному выполнению двух неравенств

$$(2.2) \quad \lim_{\pi_s^{\cdot} \rightarrow 0} \pi_s^{\cdot\cdot} \leq 0, \quad \lim_{\pi_s^{\cdot} \rightarrow 0} \pi_s^{\cdot\cdot} \geq 0$$

Пусть  $\pi_s^{\cdot\cdot} = f_s(\pi_1^{\cdot}, \dots, \pi_{s-1}^{\cdot}, \pi_s^{\cdot}, \pi_{s+1}^{\cdot}, \dots, \pi_n^{\cdot}, N_s)$  — уравнение системы (1.13), составленное для квазикоординаты  $\pi_s$ , где  $N_s$  — нормальная нагрузка на  $s$ -е колесо. Тогда неравенства (2.2) запишутся в виде

$$(2.3) \quad \begin{aligned} f_s(\pi_1^{\cdot}, \dots, \pi_{s-1}^{\cdot}, 0, \pi_{s+1}^{\cdot}, \dots, \pi_n^{\cdot}, N_s) &\leq 0 \\ f_s(\pi_1^{\cdot}, \dots, \pi_{s-1}^{\cdot}, 0, \pi_{s+1}^{\cdot}, \dots, \pi_n^{\cdot}, -N_s) &\geq 0 \end{aligned}$$

Обращение (2.3) в равенство дает уравнения границ  $\Gamma_+^s$  и  $\Gamma_-^s$  области  $G^s$ .

В рассматриваемом случае система с качением относится к хорошо изученному классу систем с разрывными правыми частями [8—10]. Полученные при этом результаты применимы и к системам с качением. Следует лишь иметь в виду, что в отличие от релейных систем автоматического регулирования уравнения движения систем с качением в областях  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  оказываются обычно нелинейными.

При качении жесткого колеса в общем случае вектор  $v_s$  скорости скольжения имеет две компоненты: поперечную  $\pi_s^{\cdot}$  и продольную  $\pi_{s+1}^{\cdot}$ . Рассмотрим трехмерное сечение  $\Phi_3$  фазового пространства  $\Phi$ , откладывая по оси абсцисс величину  $\pi_s^{\cdot}$ , по оси ординат — величину  $\pi_{s+1}^{\cdot}$ , а в качестве аппликаты взяв, например, угловую скорость  $\omega_s$  собственного вращения колеса. Гиперплоскостью  $\Pi^s$  в  $\Phi_3$  будет прямая  $\pi_s^{\cdot} = 0$ ,  $\pi_{s+1}^{\cdot} = 0$ , т. е. ось  $\omega_s$ .

Вводя цилиндрическую систему координат  $v_s, \vartheta_s, \omega_s$  посредством соотношений  $\pi_s^{\cdot} = v_s \cos \vartheta_s$ ,  $\pi_{s+1}^{\cdot} = v_s \sin \vartheta_s$  и записывая уравнения движения в новых фазовых переменных  $v_s, \vartheta_s, \omega_s$ , получим для  $v_s$  уравнение  $v_s^{\cdot} = F_s(v_s, \vartheta_s, \omega_s, \dots)$ . Из условия  $v_s^{\cdot} \leq 0$  при  $v_s \rightarrow 0$  следует, что область  $G^s$  на оси  $\omega_s$  выделяется неравенством

$$(2.4) \quad F_s(0, \vartheta_s, \omega_s, \dots) \leq 0$$

которое должно выполняться для всех значений  $\vartheta_s$  в интервале  $0 \leq \vartheta_s < 2\pi$ . Поскольку левая часть неравенства (2.4) содержит и все остальные фазовые переменные, которые при рассмотрении трехмерного сечения считались фиксированными, обращение (2.4) в равенство дает уравнение границы  $\Gamma^s$  области  $G^s$  на гиперплоскости  $\Pi^s$  в фазовом пространстве  $\Phi$ . Движение изображающей точки в области  $G^s$  на гиперплоскости  $\Pi^s$  в этом

случае описывается уравнениями (1.8), составленными для квазикоординат  $\pi_1, \dots, \pi_{s-1}, \pi_{s+2}, \dots, \pi_n$  с учетом равенств  $\pi_s \dot{=} 0, \pi_{s+1} \dot{=} 0$ .

Отличие рассматриваемого случая от релейной системы с двумя реле состоит в том, что для релейной системы имеет смысл область  $G$  на каждой гиперплоскости:  $\pi_s \dot{=} 0$  и  $\pi_{s+1} \dot{=} 0$ . Движение изображающей точки по одной из них отображает так называемый скользящий режим одного из реле, а движение по их пересечению — скользящий режим двух реле одновременно. Для колеса же имеет смысл лишь область  $G$  на пересечении этих гиперплоскостей, где отображается качение колеса без скольжения.

*Замечания.* 1°. Изучением скользящих режимов в разрывных системах занимались многие исследователи [9, 10]. Уже в работе [11] содержится интерпретация скользящего режима в фазовом пространстве. Однако аналогичный подход к изучению систем с качением при учете скольжения в предлагаемой статье применяется, по-видимому, впервые.

2°. Согласно (1.13), левые части неравенств (2.3) и (2.4) содержат реакции  $R_l$  ( $l = m + 1, m + 2, \dots, n$ ), т. е. зависят от режима качения других колес, например  $l$ -го колеса, поэтому здесь следует различать два случая: 1)  $l$ -е колесо катится со скольжением, 2)  $l$ -е колесо катится без скольжения.

В первом случае в неравенства (2.3) и (2.4) следует подставлять выражение (1.11), если скорость скольжения  $l$ -го колеса имеет лишь одну компоненту, и выражение (1.12) при наличии двух компонент. Во втором случае величина  $R_l$  и соответственно  $R_l$  и  $R_{l+1}$  должны быть выражены через фазовые переменные посредством следующей процедуры: при наличии лишь одной компоненты скорости скольжения  $l$ -го колеса нужно в уравнении (1.10), составленном для квазикоординаты  $\pi_l$ , положить  $\pi_l \dot{=} \pi_{l+1} \dot{=} 0$  и исключить остальные ускорения  $\pi_j \ddot{}$ , содержащиеся в этом уравнении, используя другие уравнения динамики (1.8). При наличии двух компонент скорости скольжения  $l$ -го колеса нужно в уравнениях (1.10), составленных для квазикоординат  $\pi_l$  и  $\pi_{l+1}$ , положить  $\pi_l \dot{=} \pi_l \ddot{=} \pi_{l+1} \dot{=} \pi_{l+1} \ddot{=} 0$  и исключить остальные ускорения  $\pi_j \ddot{}$ , содержащиеся в этих уравнениях, используя другие уравнения динамики (1.8). В результате описанной процедуры величины  $R_l$  и  $R_{l+1}$  оказываются функциями фазовых переменных, которые и следует подставить в неравенства (2.3) и (2.4) в случае качения  $l$ -го колеса без скольжения.

3°. Применение изложенной теории к качению колеса с деформируемой шиной даже в рамках феноменологической теории (например, теории Келдыша) возможно лишь при определенных условиях. Поскольку теперь вместо точечного соприкосновения имеется площадка контакта колеса с опорной поверхностью, может возникнуть частичное проскальзывание шины или момент силы трения скольжения вследствие вращения пятна контакта. В тех случаях, когда этими дополнительными факторами можно пренебречь и поле скоростей скольжения мало отличается от однородного, развитая теория применима и к колесу с деформируемой шиной.

*Пример 1.* Пусть абсолютно твердое колесо, плоскость которого вертикальна, катится по горизонтальной шероховатой прямой (фиг. 1). К колесу приложен постоянный вращающий момент  $M$  и действует сила вязкого трения с коэффициентом  $h$ . Тогда движение колеса описывается уравнениями

$$mx \ddot{=} + hx \dot{=} = R, \quad mk^2 \varphi \ddot{=} = M - rR$$

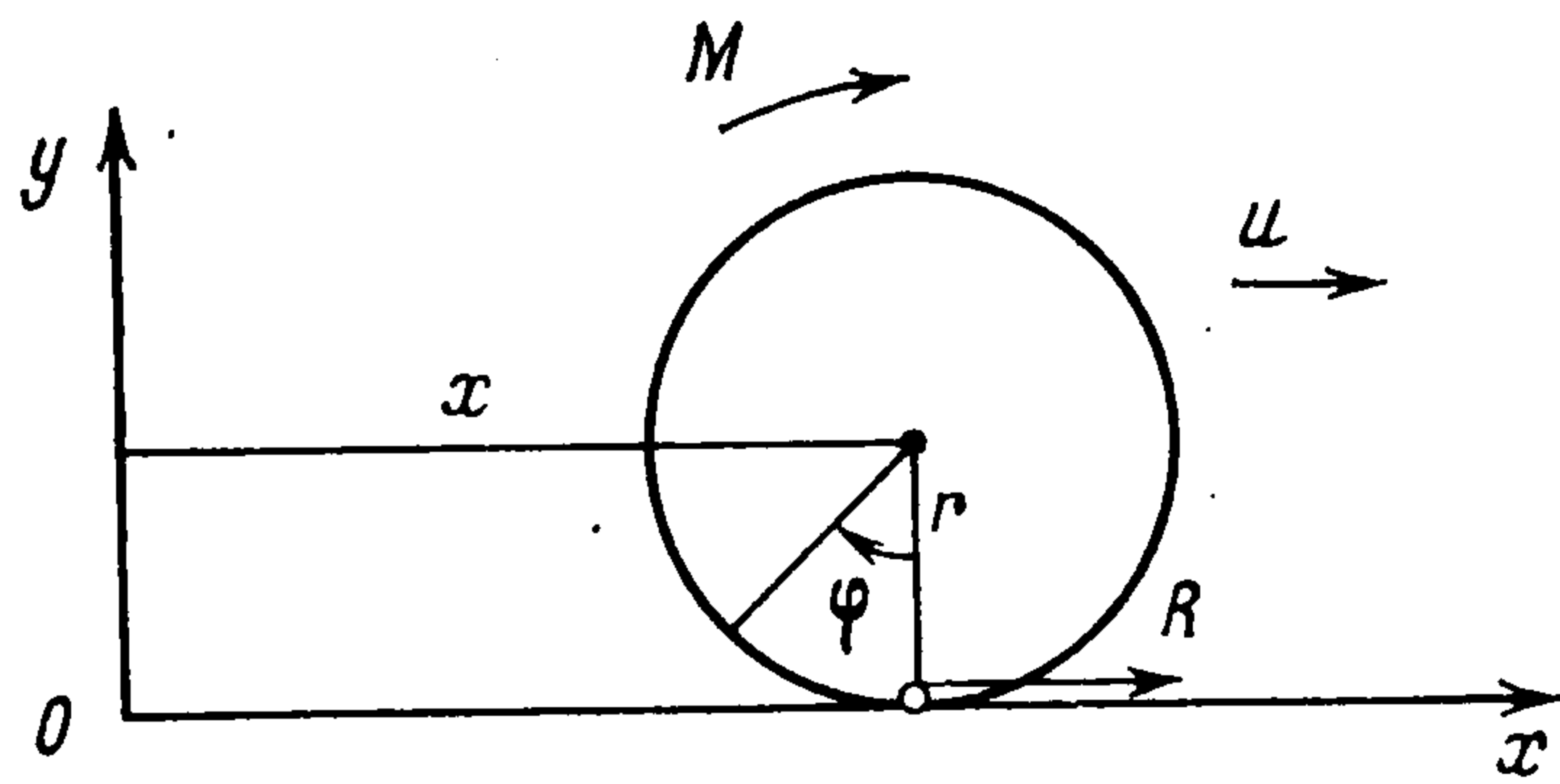
( $m$  — масса,  $r$  — радиус колеса,  $k$  — центральный радиус инерции,  $x$  — координата центра колеса,  $\varphi$  — угол поворота,  $R$  — горизонтальная составляющая сила взаимодействия колеса с опорной прямой). Если колесо катится без скольжения, то между введенными переменными имеет место соотношение

$$x \dot{=} - r\varphi \dot{=} = 0$$

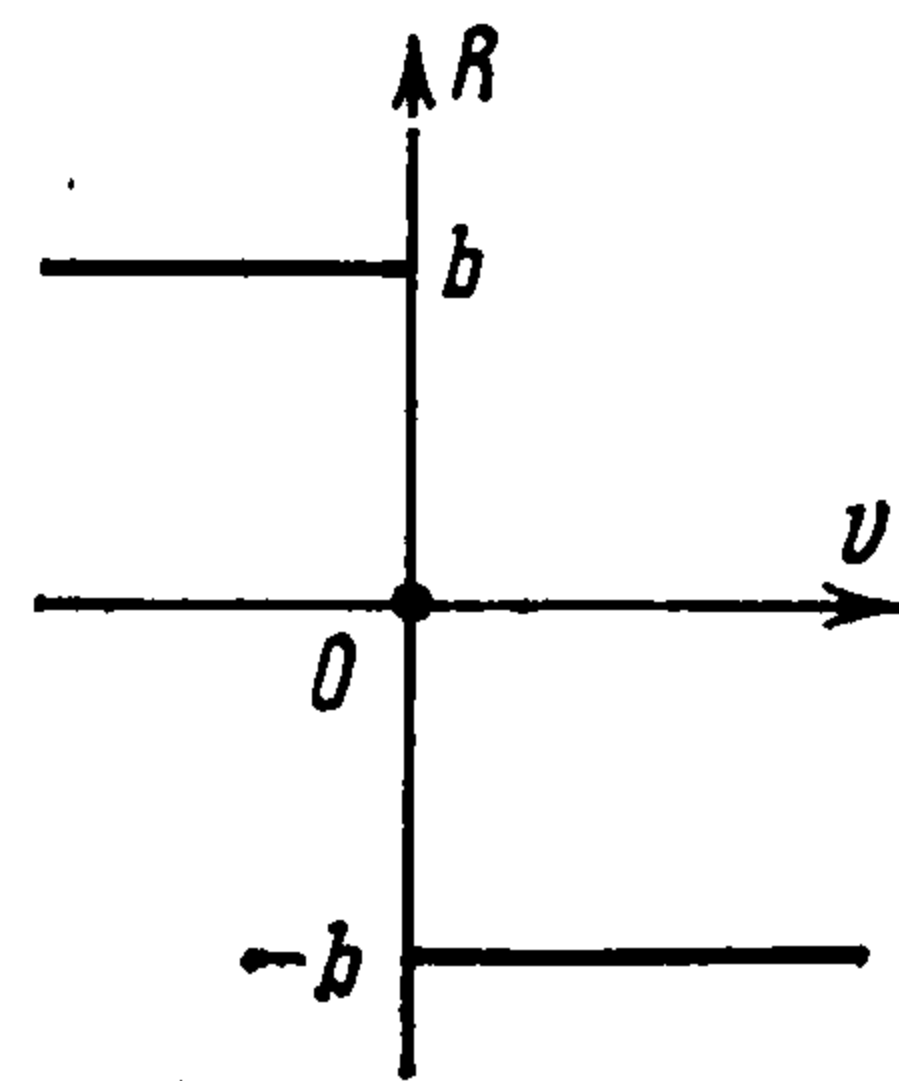
которое является уравнением кинематической связи.

Введем безразмерные величины

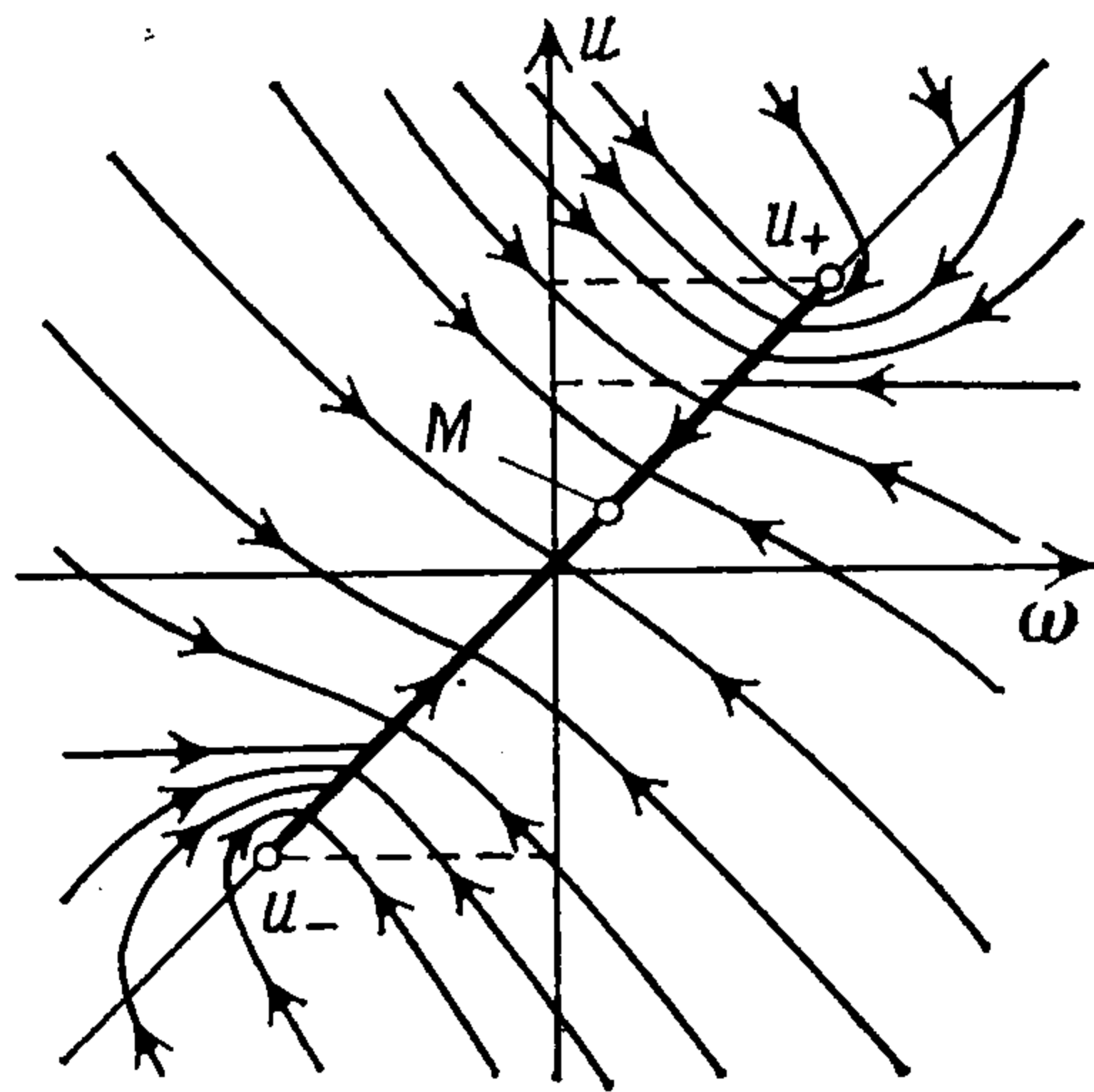
$$x_0 = xr^{-1}, \quad t_0 = m^{-1}ht, \quad R_0 = mr^{-1}h^{-2}R, \quad M_0 = mr^{-2}h^{-2}M \\ a = k^2r^{-2}$$



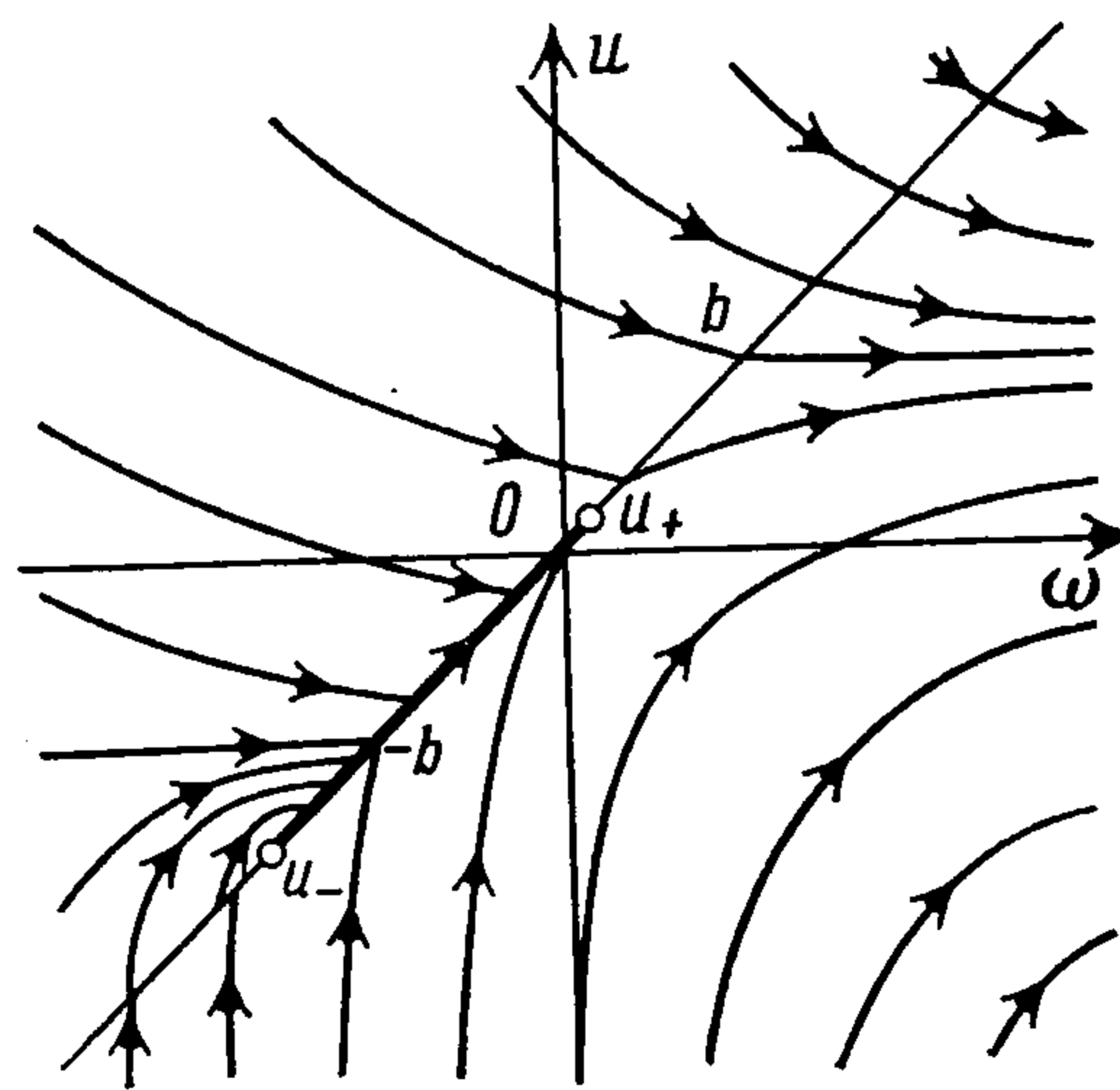
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

и обозначим  $u = \dot{x}_0$ ,  $\omega = \dot{\varphi}$ . В новых переменных уравнения динамики принимают вид

$$(2.5) \quad u' + u = R_0, \quad a\omega' = M_0 - R_0$$

а уравнения кинематической связи

$$(2.6) \quad v \equiv u - \omega = 0$$

Пусть  $R$  — сила сухого трения. Согласно закону Кулона — Амонтона, график зависимости  $R_0$  от скорости скольжения  $v$  имеет вид, изображенный на фиг. 2, где  $b$  — величина трения скольжения. Из уравнений (2.5), (2.6) и графика функции  $R_0 = R_0(v)$  следует, что качение колеса описывается движением изображающей точки на фазовой плоскости  $\Phi(\omega, u)$ , которая разбивается на две области:  $\Phi_+$ , в которой  $v > 0$ , и  $\Phi_-$ , в которой  $v < 0$ . Границей между ними служит прямая  $\Pi$ , на которой  $v = 0$ . Движение изображающей точки на фазовой плоскости  $\Phi$  описывается уравнениями

$$u' + u = -b, \quad a\omega' = M_0 + b \quad (\Phi_+)$$

$$(1 + a)\omega' + \omega = M_0 \quad (\Pi)$$

$$u' + u = b, \quad a\omega' = M_0 - b \quad (\Phi_-)$$

Разбиение фазовой плоскости  $\Phi$  на траектории в случае  $0 < M_0 < b$  показано на фиг. 3, где значения  $u_{\pm} = \pm[(1 + a)b \mp M_0]a^{-1}$  получаются из условия соприкосновения фазовых траекторий в области  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  с биссектрисой  $u = \omega$ . Режим качения колеса без скольжения отображается движением фазовой точки в области  $\Pi$  на отрезке  $u_- \leq u \leq u_+$ . На этом отрезке находится устойчивая особая точка  $u = \omega = M_0$ . Фазовый портрет на фиг. 3 говорит о том, что в рассматриваемом случае при любых начальных условиях колесо приходит к устойчивому стационарному движению, которое является качением без скольжения.

В случае  $M_0 > b$  получаем фазовый портрет, показанный на фиг. 4. Здесь при любых начальных условиях, изображающая точка на фазовой плоскости  $\Phi(\omega, u)$  с возрастанием времени асимптотически приближается к движению по прямой  $u = b$  со скоростью  $(M_0 - b)a^{-1} > 0$ . Величина  $\omega$  при этом возрастает до бесконечности. Такое движение изображающей точки соответствует качению колеса со скольжением так, что скорость центра колеса стремится к конечному значению  $u = b$ , а угловая скорость вращения увеличивается до бесконечности.

*Пример 2.* Рассмотрим задачу о движении мотоцикла с учетом бокового скольжения колес при следующих упрощающих предположениях: масса жестких колес пренеб-

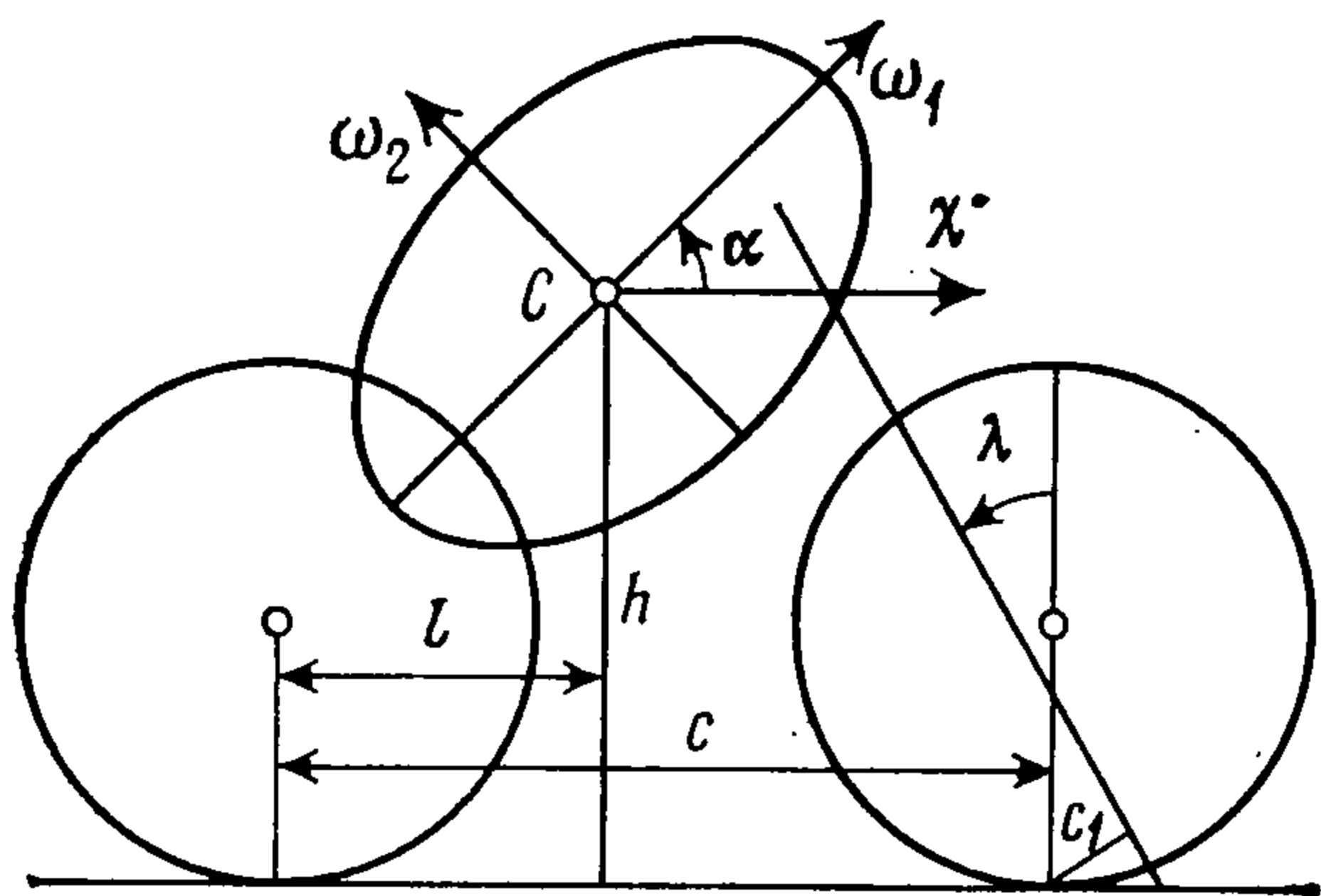
режимо мала по сравнению с массой седока и рамы, которые будем считать единым жестким телом с массой  $m$  и главными центральными моментами инерции  $A$  и  $B$ ; скорость  $V$  продольного движения мотоцикла и угол  $\psi$  поворота руля — заданные функции времени; величина  $\psi$ , а также угол наклона рамы  $\chi$ , скорость поперечного смещения центра масс  $u$ , проекции  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  мгновенной угловой скорости тела на главное направление центрального эллипсоида инерции — достаточно малые величины. Тогда при боковом скольжении обоих колес уравнения движения, линеаризованные относительно малых величин, имеют вид (см. фиг. 5)

$$(2.7) \quad \begin{aligned} mu' &= -mV(\omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha) + F_1 + F_2 \\ A\omega_1' &= H \cos \alpha + M_1 F_1 + K_1 F_2 \\ B\omega_2' &= -H \sin \alpha - M_2 F_1 - K_2 F_2 \\ \chi' &= \omega_1 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha; \quad H = mg(h\chi - c_1 l c^{-1} \psi) \end{aligned}$$

Здесь  $F_1$ ,  $F_2$  — боковые реакции дороги на заднее и, соответственно переднее колесо в точках контакта колес с дорогой. Считая их силами сухого трения, имеем

$$(2.8) \quad F_{1,2} = -\nu N_{1,2} \operatorname{sign} u_{1,2}, \text{ если } u_{1,2} \neq 0$$

и любое значение на интервале  $(-\nu N_{1,2} < F_{1,2} < \nu N_{1,2})$ , если  $u_{1,2} = 0$ ;  $\nu$  — коэффициент трения скольжения  $N_1 = mglc^{-1}$ ,  $N_2 = mg(c-l)c^{-1}$  — силы нормального



Фиг. 5

давления;  $u_1$ ,  $u_2$  — скорости бокового скольжения заднего и соответственно переднего колеса, определяемые выражениями

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u_1 &= u + M_1 \omega_1 - M_2 \omega_2 \\ u_2 &= u + K_1 \omega_1 - K_2 \omega_2 - \Psi, \\ \Psi &= c_1 \psi' - V \psi \cos \lambda \\ M_1 &= h \cos \alpha - l \sin \alpha, \\ K_1 &= h \cos \alpha + (c-l) \sin \alpha \\ M_2 &= h \sin \alpha + l \cos \alpha, \\ K_2 &= h \sin \alpha - (c-l) \cos \alpha \end{aligned}$$

Уравнения (2.7) описывают движение изображающей точки в четырехмерном фазовом пространстве  $\Phi(u, \omega_1, \omega_2, \chi)$ .

Рассмотрим возможные частные случаи движения мотоцикла.

*Скользит только заднее колесо.* В этом случае изображающая точка движется в фазовом пространстве  $\Phi$  на гиперплоскости  $u_2 = 0$  согласно уравнениям движения (2.7), из которых следует исключить неизвестную величину  $F_2$  и воспользоваться соотношением

$$u_2 \equiv u + K_1 \omega_1 - K_2 \omega_2 - \Psi = 0$$

Движение на гиперплоскости  $u_2 = 0$  реализуется в области  $G^2$ , определяемой неравенствами

$$\lim_{u_2 \rightarrow +0} u_2' \leq 0, \quad \lim_{u_2 \rightarrow -0} u_2' \geq 0$$

Согласно (2.9) и (2.7), имеет выражение для величины  $u_2'$  и получаем первое неравенство

$$(2.10) \quad \begin{aligned} H(A^{-1}K_1 \cos \alpha + B^{-1}K_2 \sin \alpha) + F_1(m^{-1} + A^{-1}M_1K_2 + \\ + B^{-1}M_2K_2) - \nu N_2(m^{-1} + A^{-1}K_1^2 + B^{-1}K_2^2) - \Psi' - \\ - V(\omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha) \leq 0 \end{aligned}$$

где  $F_1$  определяется выражением (2.8). Второе неравенство, выделяющее область  $G^2$ , получается из (2.10) заменой  $N_2$  на  $-N_2$  и знака  $\leq$  на знак  $\geq$ .

*Скользит только переднее колесо.* В этом случае изображающая точка движется на гиперплоскости  $u_1 = 0$  в области  $G^1$ , определяемой неравенствами

$$(2.11) \quad \begin{aligned} H(A^{-1}M_1 \cos \alpha + B^{-1}M_2 \sin \alpha) + F_2(m^{-1} + A^{-1}M_1K_1 + \\ + B^{-1}M_2K_2) - \nu N_1(m^{-1} + A^{-1}M_1^2 + B^{-1}M_2^2) - \\ - V(\omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha) \leq 0 \end{aligned}$$

где  $F_2$  определяется выражением (2.8). Второе неравенство получается из (2.11) заменой  $N_1$  на  $-N_1$  и знака  $\leq$  на знак  $\geq$ .

*Оба колеса катятся без скольжения.* В этом случае изображающая точка движется в области, являющейся пересечением гиперплоскости  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$ . Пользуясь

этими уравнениями и исключая  $F_1, F_2$  из (2.7), приходим к уравнению движения мотоцикла без скольжения.

$$(2.12) \quad \begin{aligned} cJ_1\chi'' - mgch\chi - c_1J_{12}\psi'' - (J_{12}\cos\lambda + mc_1h)V\psi' + \\ + (mgc_1l - mhV^2\cos\lambda - J_{12}V'\cos\lambda)\psi = 0 \\ J_1 = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + mh^2 \\ J_{12} = (B - A)\sin\alpha\cos\alpha + mhl \end{aligned}$$

которое при  $V = \text{const}$  совпадает с первым уравнением (1.5) работы [12], если в (1.5) пренебречь массой передней части велосипеда и моментами инерции колес.

Движение в области  $u_1 = 0, u_2 = 0$  реализуется при одновременном выполнении четырех неравенств (2.10) и (2.11), в которых

$$\begin{aligned} F_1 = c^{-2}h^{-1}J_1^{-1} \{ [J_{12}(BK_1\sin\alpha - AK_2\cos\alpha) - \\ - J_1(AK_2\sin\alpha + BK_1\cos\alpha)]\Psi' + mhV(BK_1\sin\alpha - \\ - AK_2\cos\alpha)\Psi - cH[J_1(c-l) + AK_2\cos\alpha - BK_1\sin\alpha] \} \\ F_2 = c^{-2}h^{-1}J_1^{-1} \{ [J_{12}(AM_2\cos\alpha - BM_1\sin\alpha) + \\ + J_1(AM_2\sin\alpha + BM_1\cos\alpha)]\Psi' + mhV(AM_2\cos\alpha - \\ - BM_1\sin\alpha)\Psi + cH(AM_2\cos\alpha - BM_1\sin\alpha - lJ_1) \} \end{aligned}$$

Автор благодарит Д. М. Климова, В. В. Румянцева, К. Ф. Фролова и их сотрудников за обсуждение статьи и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фуфаев Н. А. К теории качения колеса с упругой деформируемой шиной. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 134—142.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. К вопросу о путевой устойчивости экипажей на баллонных колесах. — Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 3, с. 533—536.
3. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость криволинейного движения экипажа на баллонных колесах. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 899—907.
4. Фуфаев Н. А. К теории движения колесных экипажей. — В кн.: Тез. докл. на 1-й Всес. конф. Науч.-техн. сотрудничество «Предприятие — ВУЗ». Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 34—35.
5. Мартынюк А. А., Лобас Л. Г., Никитина Н. В. Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин. Киев: Техніка, 1981. 223 с.
6. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
7. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
8. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с кусочно-непрерывной правой частью. — Успехи матем. наук, 1958, т. 13, вып. 4, с. 217—218.
9. Киняпин С. Д., Неймарк Ю. И. Об устойчивости состояний равновесия релейной системы. — Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 9, с. 1153—1162.
10. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Об устойчивости положения равновесия в разрывных системах. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 283—293.
11. Андронов А. А., Баутин Н. Н. Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей. — Докл. АН СССР, 1944, т. 43, № 5, с. 197—201.
12. Дикарев Е. Д., Дикарева С. Б., Фуфаев Н. А. Влияние наклона рулевой оси и выноса переднего колеса на устойчивость движения велосипеда. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 69—73.

Горький

Поступила в редакцию  
17.X.1983