Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 531.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПУАНКАРЕ И ПУАНКАРЕ — ЧЕТАЕВА

Мархашов Л. М.

Теория уравнений Пуанкаре в групповых переменных [1] развита в работах Четаева [2], его учеников и в ряде других исследований. Описаны некоторые простые наблюдения, связанные с уравнениями Пуанкаре и Пуанкаре — Четаева, которые представляются полезными для приложений и дальнейшего изучения этих уравнений.

Уравнения движения консервативной голономной механической системы с независимыми координатами $x_1, \ldots, x_s$ в форме, предложенной Пуанкаре, имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i^j(x)\eta_j, \quad i, j, \alpha = 1, \ldots, s \tag{0.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\right) = c_{\alpha i}^{j}\eta_\alpha \frac{\partial L^*}{\partial \eta_j} + X_i L^* \tag{0.2}$$

Здесь $L^*(x, \eta)$ — функция Лагранжа, $\eta_1, \ldots, \eta_s$ — параметры Пуанкаре; повторяющиеся индексы означают суммирование. Операторы

$$X_i = \xi_j^i(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{0.3}$$

образуют базис некоторой s-мерной алгебры Ли — алгебры A

$$[X_i, X_k] = c_{ik}^\alpha X_\alpha, \quad i, k, \alpha = 1, \ldots, s \tag{0.4}$$

Структурные постоянные кососимметричны $(c_{ik}^\alpha = -c_{ki}^\alpha)$ и удовлетворяют условиям Якоби

$$c_{ik}^\alpha c_{\alpha j}^\beta + c_{kj}^\alpha c_{\alpha i}^\beta + c_{ji}^\alpha c_{\alpha k}^\beta = 0 \tag{0.5}$$

Предполагается, что соответствующая алгебре A локальная группа преобразований пространства конфигураций $\{x_1, \ldots, x_s\}$ транзитивна, т. е. в точках общего положения выполнено условие

$$\det(\xi_i^j(x)) \neq 0 \tag{0.6}$$

В остальном операторы (0.3) произвольны, так что для одной и той же механической системы число способов выбора этих операторов (с точностью до изоморфизма и до произвола в их координатной реализации) совпадает с числом различных алгебр Ли размерности s. Таких алгебр очень много (например, уже для $s = 3$ их множество имеет мощность одномерного континуума). Указанный произвол, с одной стороны, создает трудность адекватного механической задаче выбора алгебры, с другой — новые возможности, если такой выбор удалось сделать.

Ниже изложены некоторые простые свойства уравнений Пуанкаре, которые могут послужить расширению области их эффективного применения.

1. Учет неконсервативных сил. Свойства правых частей уравнений Пуанкаре. Уравнения Пуанкаре, в отличие от многих других форм уравнений движения, используются для описания консервативных систем. Наличие неконсервативных сил легко учесть и в этих уравнениях, если принять во внимание, что уравнения (0.2) могут быть получены из уравнения Лагранжа путем перехода к квазискоростям $\eta_1, \ldots, \eta_s$, выбранным согласно уравнениям (0.1).

Пусть на лагранжеву систему с s степенями свободы кроме потенциальных сил действуют неконсервативные обобщенные силы $Q_1, \ldots, Q_s$. Выбрав алгебру A и обозначив через $L^*(t, x, \eta)$ результат подставки (0.1) в функцию Лагранжа $L(t, x, x^\cdot) : L^*(t, x, \eta) = L(t, x, \xi^j\eta_j)$, получим

$$\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i} = \xi_j^{\,i} \frac{\partial L}{\partial x_j^\cdot}, \qquad \frac{\partial L^*}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial x_j} + \eta_\beta \frac{\partial \xi_\alpha^{\,\beta}}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^\cdot}$$
$$i, j, \alpha, \beta = 1, \ldots, s$$

С учетом уравнений Лагранжа и коммутационных соотношений (0.4) получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\right) = X_i L^* + c_{\alpha i}^{j} \eta_\alpha \frac{\partial L^*}{\partial \eta_j} + \xi_j^{\,i} Q_j$$

Эти уравнения, совпадающие при $Q_1 = \ldots = Q_s = 0$ с уравнениями (0.2), можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\right) = X_i' L^* + \xi_j^{\,i} Q_j, \qquad j, i = 1, \ldots, s \tag{1.1}$$

$$X_i' = X_i + c_{\alpha i}^{j} \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_j}, \qquad \alpha, i, j = 1, \ldots, s \tag{1.2}$$

Написанные уравнения Пуанкаре можно получить также из уравнений Больцмана — Гамеля в квазикоординатах ([3], с. 124).

Отметим некоторые из свойств операторов (1.2).

а) Операторы $X_1', \ldots, X_s'$ сами образуют базис алгебры Ли — A', изоморфной алгебре A. Действительно

$$[X_i', X_k'] = (X_i'\xi_j^{\,k} - X_k'\xi_j^{\,i}) \frac{\partial}{\partial x_j} + (c_{\alpha k}^{j} X_i'\eta_\alpha - c_{\alpha i}^{j} X_k'\eta_\alpha) \frac{\partial}{\partial \eta_j} =$$
$$= c_{ik}^{\alpha} \xi_j^{\,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} - (c_{k\beta}^{j} c_{\alpha i}^{\beta} + c_{\beta i}^{j} c_{\alpha k}^{\beta})\, \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_j}$$

Использовав тождества (0.5), получим

$$[X_i', X_k'] = c_{ik}^{\alpha} \xi_j^{\,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} + c_{\alpha\beta}^{j} c_{ik}^{\beta} \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_j} =$$
$$= c_{ik}^{\alpha}\left(\xi_j^{\,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} + c_{\beta\alpha}^{j} \eta_\beta \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right) = c_{ik}^{\alpha} X_\alpha'$$

б) Локальная группа преобразований, соответствующая алгебре A', является группой симметрии уравнений (0.1). В самом деле, учитывая, что преобразованиям лагранжевых переменных отвечают операторы $X_i + (\xi_j^{\,i})^\cdot \partial/\partial x_i^\cdot$, получим

$$\frac{d\xi_j^{\,\beta}}{dt} - \eta_\gamma \xi_i^{\,\beta} \frac{\partial \xi_j^{\,\gamma}}{\partial x_i} - \xi_j^{\alpha} \eta_\gamma c_{\gamma\beta}^{\alpha} = \eta_\gamma \left(\xi_i^{\,\gamma} \frac{\partial \xi_j^{\,\beta}}{\partial x_i} - \xi_i^{\,\beta} \frac{\partial \xi_j^{\,\gamma}}{\partial x_i} - c_{\gamma\beta}^{k} \xi_j^{\,k}\right) = 0$$

в) Произвольно выбранная система s операторов, действующих в s-мерном пространстве, для которой выполнено лишь условие (0.6), алгебры Ли не образует, но является замкнутой, т. е.

$$[X_i, X_k] = a_{ik}^{\alpha}(x)\, X_\alpha$$

Процедура получения уравнений Пуанкаре из уравнений Лагранжа не требует, чтобы величины C_{ik}^{α} были постоянными. Для замкнутой системы операторов уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\right) = a_{\alpha i}^{j}(x)\, \eta_\alpha \frac{\partial L^*}{\partial \eta_j} + X_i L^* + \xi_j^{\,i} Q_j \tag{1.3}$$

Дополнительным произволом операторов можно воспользоваться для приведения (неединственным образом) кинетической энергии склерономной системы к сумме квадратов $T = {}^1/_2\Sigma\eta_k^2$. Уравнения (1.3) примут вид

$$\eta_i^{\boldsymbol\cdot} = a_{\alpha i}^j(x)\,\eta_\alpha\eta_j + \xi_j^i\left(-\frac{\partial U}{\partial x_j} + Q_j\right), \quad L^* = T - U \tag{1.4}$$

$$i, j, \alpha = 1, \dots, s$$

В ряде механических задач соответствующее преобразование возникает естественным образом и порождает непосредственно алгебру Ли. Так, кинематические уравнения Эйлера (обращение формул (0.1))

$$\eta_1 = p = \psi^{\boldsymbol\cdot}\sin\theta\sin\varphi + \theta^{\boldsymbol\cdot}\cos\varphi,\ \eta_2 = q = \psi^{\boldsymbol\cdot}\sin\theta\cos\varphi -$$
$$-\theta^{\boldsymbol\cdot}\sin\varphi\quad \eta_3 = r = \psi^{\boldsymbol\cdot}\cos\theta + \varphi^{\boldsymbol\cdot}$$

приводят к уравнениям Пуанкаре движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, тождественным с уравнениями Эйлера для этой задачи [1]. Соответствующие операторы (0.3)

$$X_1 = -\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$X_2 = -\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

определяют алгебру группы вращений

$$[X_1, X_2] = X_3,\quad [X_2, X_3] = X_1,\quad [X_3, X_1] = X_2$$

Более простые примеры — механические системы с евклидовым пространством конфигураций. Соответствующие алгебры коммутативны.

2. Уравнения Пуанкаре — Четаева. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты механической системы с $n - s$ кинематическими связями, которые параметризованы переменными Пуанкаре $\eta_1, \dots, \eta_s$

$$x_i^{\boldsymbol\cdot} = \xi_i^j(x)\eta_j,\quad j = 1, \dots, s,\quad i = 1, \dots, n \tag{2.1}$$

Предположим, что параметризация (2.1) порождает s-мерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = \xi_i^1(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \dots,\quad X_s = \xi_i^s(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad i = 1, \dots, n\quad (s < n) \tag{2.2}$$

Возможные перемещения системы определяются независимыми параметрами $\omega_1, \dots, \omega_s$

$$\delta x_i = \xi_i^j(x)\,\omega_j,\quad i = 1, \dots, n,\quad j = 1, \dots, s$$

Из общего уравнения динамики получим

$$\xi_i^j(x)\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i^{\boldsymbol\cdot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - Q_i\right] = 0 \tag{2.3}$$

Перейдя к функции Лагранжа L^* и немного видоизменив выкладки из п. 1, найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial\eta_j}\right) - X_j'L^* - \xi_i^j(x)\,Q_i = \xi_i^j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i^{\boldsymbol\cdot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - Q_i\right] \tag{2.4}$$

Из условий (2.3) следует уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial\eta_j}\right) = X_j'L^* + \xi_i^jQ_i,\quad i = 1, \dots, n,\quad j = 1, \dots, s$$

впервые полученные Четаевым ([2], с. 199) в предположении об отсутствии неконсервативных сил. Это уравнение в избыточных координатах.

Как и в уравнениях Пуанкаре, операторы

$$X_j' = X_j + c_{\alpha j}^{k}\eta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_k}, \quad j, k, \alpha = 1, \ldots, s$$

образуют базис алгебры Ли $[X_i', X_k'] = c_{ik}{}^{\alpha}X_\alpha'$. Некоторые хорошо известные уравнения динамики являются уравнениями Пуанкаре — Четаева. Например, уравнения Эйлера — Пуассона при

$$x_1 = \gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad x_2 = \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad x_3 = \gamma_3 = \\ = \cos\theta, \quad \eta_1 = p, \quad \eta_2 = q, \quad \eta_3 = r$$

3. Уравнения Пуанкаре для неголономних систем частного типа. Вывод уравнений Пуанкаре — Четаева в п. 2 напоминает вывод уравнений движения неголономных систем [3]. Уравнения Пуанкаре — Четаева формально отличает от уравнений неголономной механики лишь требование, чтобы операторы (2.2) порождали s-мерную алгебру Ли. Однако это требование сразу приводит к факту интегрируемости кинематических связей и, следовательно, к выводу о непригодности уравнений Пуанкаре— Четаева для неголономных систем.

Уравнения Пуанкаре написаны почти одновременно с основными формами уравнений движения неголономных систем. Несмотря на большое сходство обе теории долгое время развивались независимо. Обобщенные уравнения Пуанкаре — Четаева, пригодные как для голономных, так и неголономных систем, получены в работе [4]. Отмеченное выше сходство процедур позволяет выделить один тип механических систем, для описания которых уравнения Пуанкаре — Четаева не требуют модификации независимо от того, интегрируемы или неинтегрируемы кинематические связи.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты системы, стесненные $n - s$ идеальными, стационарными кинематическими связями вида $a_{ki}x_i^{\cdot} = 0$ и только ими (они могут быть как голономными, так и неголономными); L — функция Лагранжа; $Q_1, \ldots, Q_n$ — действующие на систему активные неконсервативные силы. Предположим, что параметризацию (2.1) связей можно осуществить таким образом, что соответствующие s операторов (2.2) порождают алгебру Ли размерности n, для которой выполнено условие (0.6). Освободим систему от связей, заменив их действие реакциями связей $R_1, \ldots, R_n$. Заменив в функции Лагранжа скорости $x_i^{\cdot}$ параметрами η_i по формулам

$$x_i^{\cdot} = \xi_i^1(x)\,\eta_1 + \ldots + \xi_i^s(x)\eta_s + \xi_i^{s+1}(x)\eta_{s+1} + \ldots + \\ + \xi_i^n(x)\eta_n \tag{3.1}$$

запишем n уравний движения освобожденной системы в форме уравнений Пуанкаре (1.1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\right) = X_i'L^* + \xi_j^i(Q_j + R_j), \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{3.2}$$

Положив

$$\eta_{s+1} = 0, \ldots, \eta_n = 0 \tag{3.3}$$

удовлетворим уравнениям связей. Тогда уравнения (3.2) и равенства (3.3) будут описывать движение исходной системы и совместно с условиями идеальности связей определять возникающие реакции связей. Благодаря однородности уравнений связей возможные перемещения совпадают с действительными. Поэтому

$$\delta x_i = \xi_i^1(x)\,\omega_1 + \ldots + \xi_i^s(x)\,\omega_s \tag{3.4}$$

Тогда условие идеальности связей с учетом формул (3.4) дает

$$(3.5) \qquad \xi_i^1(x) R_i = 0, \ldots, \quad \xi_i^s(x) R_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Таким образом, движение рассматриваемой системы описывается первыми s уравнениями Пуанкаре (3.2) при условиях (3.3)

$$(3.6) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_k}\right) = X_k' L^* + \xi_j^k Q_j, \qquad \eta_{s+1} = 0, \ldots, \eta_n = 0$$

а s уравнений (3.5) совместно с остальными $n - s$ уравнениями (3.2.)

$$(3.7) \qquad \xi_j^\gamma R_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_\gamma}\right) - X_\gamma' L^* - \xi_j^\gamma Q_j, \qquad \gamma = s+1, \ldots, n$$

$$(\eta_{s+1} = \ldots = \eta_n = 0)$$

позволяют благодаря условию (0.6) вычислить реакции связей $R_1, \ldots, R_n$. Заметим, что первое и последнее слагаемые уравнений (3.6) и уравнений в квазикоординатах ([3], с. 128) совпадают.

Пример. Рассмотрим движение пластинки с лезвием по наклонной плоскости ([3], с. 111).

Здесь

$$s = 2, \qquad n = 3, \qquad L = \frac{1}{2}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + \frac{1}{2} k^2 \varphi^{\cdot 2} + gx \sin\alpha$$

$$y^{\cdot} = x^{\cdot} \operatorname{tg} \varphi$$

Параметризации уравнения связи соотношениями $x^{\cdot} = \eta_1 \cos\varphi$, $y^{\cdot} = \eta_1 \sin\varphi$, $\varphi^{\cdot} = \eta_2$ отвечают операторы $X_1 = \cos\varphi\partial/\partial x + \sin\varphi\partial/\partial y$, $X_2 = \partial/\partial\varphi$, которые порождают трехмерную алгебру Ли

$$[X_2, X_1] = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y} \equiv X_3, \qquad [X_1, X_3] = 0, \qquad [X_3 X_2] = X_1$$

Согласно (3.1)

$$(3.8) \qquad x^{\cdot} = \eta_1\cos\varphi - \eta_3\sin\varphi, \; y^{\cdot} = \eta_1\sin\varphi + \eta_3\cos\varphi, \; \varphi^{\cdot} = \eta_2$$

Далее получим

$$L^* = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_3^2) + \frac{1}{2} k^2\eta_2^2 + gx\sin\alpha$$

$$X_1' = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \eta_2\frac{\partial}{\partial \eta_3}, \qquad X_2' = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$X_3' = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y} - \eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}$$

Уравнения движения (3.6) $\eta_1^{\cdot} = g\sin\alpha\cos\varphi$, $\eta_2^{\cdot} = 0$, $\eta_3 = 0$ и (3.8) легко интегрируются

$$\eta_2 = \omega, \qquad \varphi = \omega t + \varphi_0, \qquad \eta_1 = C + \frac{g\sin\alpha}{\omega}\sin\varphi$$

$$x = x_0 + \frac{C}{\omega}(\sin\varphi - \sin\varphi_0) + \frac{g\sin\alpha}{4\omega^2}(\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi)$$

$$y = y_0 + \frac{C}{\omega}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) + \frac{g\sin\alpha}{4\omega^2}(\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi) + \frac{g\sin\alpha}{2\omega} t$$

Из уравнений (3.5), (3.7) в условиях данной задачи

$$R_1\cos\varphi + R_2\sin\varphi = 0, \quad R_3 = 0, \quad -R_1\sin\varphi + R_2\cos\varphi = g\sin\alpha\sin\varphi + \eta_1\eta_2$$

найдем реакции связей

$$R_1 = -(g\sin\alpha\sin\varphi + \eta_1\eta_2)\sin\varphi, \qquad R_2 = (g\sin\alpha\sin\varphi + \eta_1\eta_2)\cos\varphi$$

4. Уравнение Пуанкаре в избыточных параметрах. Рассмотрим снова голономную систему с s степенями свободы, функцией Лагранжа L и обобщенными силами $Q_1, \ldots, Q_s$. Предположим, что на основании некоторых соображений выбрано s операторов (0.3), удовлетворяющих условию (0.6), которые порождают алгебру Ли размерности $n > s$. Определив лагранжевы скорости по формулам

$$(4.1) \qquad x_i^{\cdot} = \xi_i^1(x)\,\eta_1 + \ldots + \xi_i^n(x)\,\eta_n, \quad i = 1, \ldots, s$$

можно, как и в п. 2, просто получить n тождеств (2.4), левые части которых в силу условия (0.6) связаны $n - s$ линейными зависимостями. Так как для рассматриваемой механической системы выполняются уравнения Лагранжа, переменные $x_1, \ldots, x_s$; $\eta_1, \ldots, \eta_n$ будут удовлетворять уравнениям (4.1) и n уравнениям

$$(4.2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_j}\right) = X_j' L^* + \xi_i^j Q_i, \quad i = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, n$$

из которых алгебраически независимы лишь s. Эти s независимых уравнений будут описывать поведение переменных $x_1, \ldots, x_s$; $\eta_1, \ldots, \eta_s$ при любых произвольно задаваемых функциях

$$(4.3) \qquad \eta_{s+1} = \eta_{s+1}(t, x), \ldots, \eta_n = \eta_n(t, x)$$

(в частности, в первых s уравнениях (4.2) можно положить $\eta_{s+1} = \ldots = \eta_n = 0$). Переход к избыточным параметрам оправдан лишь при возможности разумно распорядиться произволом функций (4.3).

5. Связь с теоремой Нётер. Линейные интегралы. Рассмотрим действие операторов (1.2), формирующих правые части уравнений движения (1.1), в пространстве исходных лагранжевых переменных x, $x^{\cdot}$

$$X_i' L^* = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\right) - \xi_j^{\prime} Q_j = \frac{d}{dt}\left(\xi_j^i \frac{\partial L}{\partial x_j^{\cdot}}\right) - \xi_j^i Q_j =$$

$$= \xi_j^i \frac{\partial L}{\partial x_j} + (\xi_j^i)^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial x_j^{\cdot}} \equiv X_i^{\circ} L$$

Таким образом, функция $X_i' L^*$ пропорциональна полной вариации функции Лагранжа L под действием локальной однопараметрической группы преобразований пространства $\{x, x^{\cdot}\}$

$$\frac{dx_j'}{d\tau} = \xi_j^i(x'), \quad \frac{dx_j'^{\cdot}}{d\tau} = (\xi_j^i(x'))^{\cdot}, \quad x_j'|_{\tau=0} = x_j, \quad x_j'^{\cdot}|_{\tau=0} = x_j^{\cdot}$$

Уравнения (1.1) можно теперь записать в виде

$$(5.1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\right) = X_i^{\circ} L + \xi_j^i Q_j$$

Если при некотором i, например $i = 1$

$$(5.2) \qquad X_1^{\circ} L + \xi_j^1 Q_j = 0$$

то уравнения движения допускают первый интеграл $\partial L^*/\partial \eta_1 = \text{const}$. При отсутствии неконсервативных сил — это частный случай теоремы Нётер. Если связи системы склерономны, то, обратно, из существования линейного интеграла $\omega = \mu_i x_i^{\cdot} = \text{const}$ следует существование локальной однопараметрической группы преобразований с оператором X_1^0, для которого будет выполнено равенство (5.2).

Действительно, в рассматриваемом случае $L = {}^1/_2\, a_{ij} x_i^{\cdot} x_j^{\cdot} - U(x)$ и функции $\xi_1^1, \ldots, \xi_s^1$ можно определить формулами $a_{ij}\xi_j^1 = \mu_i$. Доопределив операторы $X_2, \ldots, X_s$ таким образом, чтобы получить алгебру A, построим систему (5.1). Поскольку

$$\mu_i x_i^{\cdot} = a_{ij}\xi_j^1 x_i^{\cdot} = \xi_j^1 \frac{\partial L}{\partial x_j^{\cdot}} = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} = \text{const}$$

первое из уравнений (5.1) даст равенство (5.2).

Для поиска линейных интегралов традиционно используется понятие циклических перемещений, введенное Четаевым ([2], с. 205). Хотя наличие циклических перемещений налагает на уравнения более жесткие требования, чем теорема Нётер, оно часто приводит к успеху.

Раскроем условие (5.2) для случая реономной системы, движущейся под действием позиционных, гироскопических и диссипативных сил

$$L=\frac{1}{2}a_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}+a_ix_i^{\cdot}+a_0-U(x)$$

$$Q_i=Q_{jk}^{(i)}x_j^{\cdot}x_k^{\cdot}+Q_j^{(i)}x_j^{\cdot}+Q^{(i)}$$

Потребовав тождественного по $x_1^{\cdot},\ldots,x_s^{\cdot}$ выполнения равенства типа (5.2)

$$\xi_j\frac{\partial L}{\partial x_j}+(\xi_j)^{\cdot}\frac{\partial L}{\partial x_j^{\cdot}}+\xi_jQ_j=0$$

получим

(5.3)
$$\xi_k\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+a_{jk}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}+a_{ik}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}+2\xi_kQ_{ij}^{(k)}=0$$

$$\xi_k\frac{\partial a_i}{\partial x_k}+a_j\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}+\xi_jQ_i^{(j)}=0,\qquad \xi_k\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_k}+Q^{(k)}\right)=0$$

Для случая, когда $a_i=a_0=Q_{jk}^{(i)}=Q_j^{(i)}=0$, условия (5.3) получены тензорными методами в работе [5]. При этом первая подсистема уравнений (5.3) сводится к известным уравнениям Киллинга, определяющим локальную группу движений риманова пространства с метрикой $ds^2=a_{ij}dx_idx_j$.

Система уравнений (5.3) является переопределенной и в конкретных механических задачах, как правило, интегрируемой. Она может и не иметь решений.

Главная трудность в задаче о линейных интегралах состоит, однако, в получении эффективных условий их существования, выраженных через функцию Лагранжа и ее производные. Эта задача решена лишь при $s=2$ и $s=3$ [6]. Более общие формулировки теоремы Нётер позволяют находить интегралы и более общего вида [7].

6. Каноническая форма уравнений Пуанкаре. Эта форма уравнений Пуанкаре получена Четаевым ([2], с. 199). Процедура Четаева позволяет учесть также и неконсервативные силы. Рассмотрим уравнения (1.1) при тех же, что и в п. 1, предположениях о механической системе. Определим функцию $H^*(x,y)$ формулой

(6.1)
$$L^*(x,\eta)=\eta_iy_i-H^*(x,y)$$

считая, что новые параметры y_i определены соотношениями $y_i=\partial L^*/\partial\eta_i$. Варьируя уравнение (6.1), найдем $\partial L^*/\partial x_i=-\partial H^*/\partial x_i$, $\eta_i=\partial H^*/\partial y_i$, после чего уравнения (0.1) и (1.1) приобретут вид

(6.2)
$$x_i^{\cdot}=Y_i^*H^*,\quad y_i^{\cdot}=-X_i^*H^*+\xi_j^iQ_j,\quad i,j=1,\ldots,s$$

(6.3)
$$Y_i^*=\xi_i^j(x)\frac{\partial}{\partial y_j},\quad X_i^*=\xi_j^i(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c_{ij}^{\gamma}y_\gamma\frac{\partial}{\partial y_j},\quad \gamma=1,\ldots,s$$

В формуле (6.1) H^* — функция Гамильтона:

$$H^*(x,y)=\eta_iy_i-L^*(x,\eta)=\eta_i\frac{\partial L^*}{\partial\eta_i}-L^*(x,\eta)=$$

$$=\xi_j^i\eta_i\frac{\partial L}{\partial x_j^{\cdot}}-L=x_j^{\cdot}p_j-L=H(x,p)$$

Уравнения (6.2) можно также получить непосредственно из гамильтоновых уравнений. Для этого достаточно, выбрав какую-либо алгебру A (см. п. 1), сделать в уравнениях Гамильтона $x_i^{\cdot}=\partial H/\partial p_i$, $p_i^{\cdot}=-\partial H/\partial x_i+Q_i$ линейную замену импульсов по формулам $y_k=\xi_i^k(x)p_i$.

При этом необходимо положить $H^* = H(x, \alpha_k y_k)$, $\alpha_k^l \xi_i^k = \delta_i^l$ (δ_i^l — символ Кронекера).

Операторы Y_i^* образуют базис коммутативной алгебры Ли

(6.4) $$[Y_i^*, Y_k^*] = 0$$

что следует из тождеств $\partial \xi^j_k / \partial y_i \equiv 0$. Операторы X_i^* порождают алгебру Ли, изоморфную алгебре A. Действительно

$$[X_i^*, X_k^*] = (X_i^* \xi_j^* - X_k^* \xi_j^i) \frac{\partial}{\partial x_j} + (c_{kj}^\gamma X_i^* y_\gamma - c_{ij}^\gamma X_k^* y_\gamma) \frac{\partial}{\partial y_j} =$$
$$= c_{ik}^\alpha \xi_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} - (c_{jk}^\alpha c_{i\alpha}^\gamma + c_{ij}^\alpha c_{k\alpha}^\gamma) y_\gamma \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Используя условия Якоби (0.5), получим

(6.5) $$[X_i^*, X_k^*] = c_{ik}^\alpha \xi_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} + c_{ik}^\alpha c_{\alpha j}^\gamma y_\gamma \frac{\partial}{\partial y_j} = c_{ik}^\alpha X_\alpha^*$$
$$i, k, \alpha = 1, \ldots, s$$

Система $2s$ операторов $Y_1^*, \ldots, Y_s$; $X_1^*, \ldots, X_s^*$, действующих в $2s$-мерном фазовом пространстве, замкнута и имеет простую таблицу умножения, определяемую коммутационными соотношениями (6.4), (6.5) и

(6.6) $$[X_i^*, Y_k^*] = \frac{\partial \xi_k^i}{\partial x_j} Y_j^*$$

Последние легко проверяются

$$[X_i^*, Y_k^*] = (X_i \xi_k^j - Y_k^* c_{ij}^\gamma y_\gamma) \frac{\partial}{\partial y_j} = \left(\xi_\gamma^i \frac{\partial \xi_k^j}{\partial x_\gamma} + c_{ji}^\gamma \xi_k^\gamma\right) \frac{\partial}{\partial y_j} =$$
$$= \xi_\gamma^j \frac{\partial \xi_k^i}{\partial x_\gamma} \frac{\partial}{\partial y_j} = \xi_j^\gamma \frac{\partial \xi_k^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} = \frac{\partial \xi_k^i}{\partial x_j} Y_j^*$$

Матрица операторов (6.3) (штрих означает транспонирование)

(6.7) $$M = \begin{Vmatrix} 0 & \tau \\ -\tau' & \sigma \end{Vmatrix}, \quad \tau = (\xi_j^i), \quad \sigma = (\zeta_j^i), \quad \zeta_j^i = -c_{ji}^\gamma y_\gamma$$

Матрица σ кососимметрична ($\zeta_j^i = -c_{ij}^\gamma y_\gamma = c_{ji}^\gamma y_\gamma = -\zeta_i^j$), так что при s нечетном $\det \sigma = 0$. Вместе с σ кососимметричны и все главные диагональные миноры матрицы M. Те из них, которые имеют нечетный порядок, вырождены. В силу условия (0.6) $\det M = (\det \tau)^2 \neq 0$.

Для обычной гамильтоновой системы $\xi_j^i = \delta_j^i$, $c_{ij}^\gamma = 0$, $y_i = p_i$, $X_i^* = \partial/\partial x_i$, $Y_i^* = \partial/\partial p_i$ матрица (6.7) приобретает вид

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}$$

и операторы (6.3) определяют $2s$-мерную коммутативную алгебру Ли.

7. Оператор сдвига вдоль траекторий движения. Под оператором сдвига вдоль траекторий движения автономной системы уравнений $z_i^\cdot = f_i(z)$ будем понимать оператор дифференцирования по времени функций, определенных в фазовом пространстве $\{z\}$:

$$S = \frac{d}{dt} = f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Рассмотрим консервативную механическую систему со стационарными связями, описываемую уравнениями (6.2). Оператор сдвига такой системы

$$S = Y_i^* H^* \frac{\partial}{\partial x_i} - X_i^* H^* \frac{\partial}{\partial y_i}$$

допускает представление

$$(7.1)\qquad S=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i}Y_i^*+\frac{\partial H^*}{\partial y_i}X_i^*$$

Действительно, использовав обозначения (6.3), получим

$$S=\xi_i{}^j\frac{\partial H^*}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_i}-\left(\xi_j{}^i\frac{\partial H^*}{\partial x_j}+c_{ij}{}^\gamma y_\gamma\frac{\partial H^*}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i}\xi_i{}^j\frac{\partial}{\partial y_j}+$$
$$+\frac{\partial H^*}{\partial y_i}\left(\xi_j{}^i\frac{\partial}{\partial x_j}+c_{ij}{}^\gamma y_\gamma\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i}Y_i^*+\frac{\partial H^*}{\partial y_i}X_i^*$$

Таким образом, оператор сдвига S принадлежит линейной оболочке, натянутой на операторы Y_i^*, X_i^*. Если алгебра A выбрана таким образом, что

$$(7.2)\qquad \frac{\partial\xi_j{}^i}{\partial x_1}=\ldots=\frac{\partial\xi_j{}^i}{\partial x_l}=0,\quad i=1,\ldots,s;\quad j=l+1,\ldots,s$$

и при этом

$$(7.3)\qquad \frac{\partial H^*}{\partial x_1}=\ldots=\frac{\partial H^*}{\partial x_l}=0$$

то

$$(7.4)\qquad S=-\frac{\partial H^*}{\partial x_{l+1}}Y_{l+1}^*-\ldots-\frac{\partial H^*}{\partial x_s}Y_s^*+\frac{\partial H^*}{\partial y_i}X_i^*$$

Система уравнений

$$Y_{l+1}^*\omega=\ldots=Y_s^*\omega=X_1^*\omega=\ldots=X_s^*\omega=0$$

совместна, каждое ее решение — первый интеграл уравнений движения (6.2). (Это следует из формул (7.4), (6.4) — 6.6)). Такая ситуация будет иметь место, в частности, в том случае если $x_1,\ldots,x_l$ — явные циклические координаты.

Свойства оператора сдвига S могут иметь различные применения. Простейшие из них рассмотрены в пп. 8 и 9.

8. Нелинейные первые интегралы механических систем, движущихся по инерции. Пусть механическая система движется по инерции и ее кинетическая энергия зависит лишь от параметров $y_1,\ldots,y_s$. Тогда

$$H^*=T(y),\quad S=\frac{\partial H^*}{\partial y_i}X_i^*$$

Система уравнений

$$(8.1)\qquad X_1^*\omega=\ldots=X_s^*\omega=0$$

совместна и по условию (0.6) допускает точно s функционально независимых решений. Это — первые интегралы уравнений движения и одновремено инварианты соответствующей локальной группы преобразований. Ограничимся случаем $s=3$. Будем искать первые интегралы, зависящие лишь от параметров y_1, y_2, y_3. Уравнения (8.1) примут вид

$$(8.2)\qquad c_{12}^j y_j\frac{\partial\omega}{\partial y_2}+c_{13}^j y_j\frac{\partial\omega}{\partial y_3}=0,\quad c_{21}^j y_j\frac{\partial\omega}{\partial y_1}+c_{23}^j y_j\frac{\partial\omega}{\partial y_3}=0$$
$$c_{31}^j y_j\frac{\partial\omega}{\partial y_1}+c_{32}^j y_j\frac{\partial\omega}{\partial y_2}=0$$

Так как $\det\sigma=0$, по крайней мере один интеграл системы существует. Если алгебра A некоммутативна, это будет единственный интеграл вида $\omega=\omega(y)$ в каждом из рассмотренных ниже случаев.

Воспользуемся результатами работы [8], в которой все пространство структурных констант $c_{ij}{}^\gamma$ трехмерных алгебр Ли расслоено явными алгебраическими условиями на части, отвечающие неизоморфным между собой алгебрам. Трехмерные алгебры распадаются на две серии: дискретную и непрерывную. В дискретной содержится пять алгебр (не считая коммутативной), в непрерывной число алгебр несчетно.

Алгебры дискретной серии выделяются условием

$$(c_{12}{}^2 + c_{13}{}^3)^2 + (c_{13}{}^1 + c_{23}{}^2)^2 + (c_{12}{}^1 - c_{23}{}^3)^2 = 0$$

Проинтегрировав уравнения (8.2), получим семейство первых интегралов

$$\omega = c_{32}{}^1 y_1{}^2 + c_{13}{}^2 y_2{}^2 + c_{21}{}^3 y_3{}^2 + 2c_{32}{}^2 y_1 y_2 + \\ + 2c_{32}{}^3 y_1 y_3 + 2c_{13}{}^3 y_2 y_3 \tag{8.3}$$

Локальные группы, отвечающие алгебрам конечной серии, могут быть реализованы как следующие группы преобразований: группа вращений, группы движений плоскости Лобачевского и евклидовой плоскости, группы преобразований Лоренца и Галилея двумерного пространства — времени. Соответственно этому квадратичные формы (8.3) различаются своей сигнатурой (линейной невырожденной заменой переменных y_i могут быть приведены соответственно к каноническим формам: $y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2$, $y_1{}^2 + y_2{}^2 - y_3{}^2$, $y_1{}^2 + y_2{}^2$, $y_1{}^2 - y_2{}^2$, $y_1{}^2$).

Алгебры непрерывной серии выделяются условием

$$(c_{12}{}^2 + c_{13}{}^3)^2 + (c_{13}{}^1 + c_{23}{}^2)^2 + (c_{12}{}^1 - c_{23}{}^3)^2 > 0$$

причем без нарушения общности можно считать, например, $c_{13}{}^1 + c_{23}{}^2 \neq 0$.

По структурным константам явно вычисляется характеристический параметр c_0, который может принимать все вещественные значения. Двум различным значениям параметра c_0 отвечают неизоморфные алгебры. Обозначим

$$u_1 = y_1 - \mu_0 y_3, \quad u_2 = y_2 - \nu_0 y_3$$

$$\mu_0 = \frac{c_{13}^2 c_{23}^3 - c_{13}^3 c_{23}^2}{c_{13}^1 c_{23}^2 - c_{13}^2 c_{23}^1}, \quad \nu_0 = \frac{c_{13}^3 c_{23}^1 - c_{13}^1 c_{23}^3}{c_{13}^1 c_{23}^2 - c_{13}^2 c_{23}^1}$$

(если $c_{13}{}^1 + c_{23}{}^2 \neq 0$, параметры μ_0, ν_0 имеют конечные значения).

При $c_0 = \alpha^2$ $(\alpha > 0)$ получим первые интегралы

$$\omega = [2c_{13}^2 u_2 + (c_{13}^1 - c_{23}^2 - \alpha(c_{13}^1 + c_{23}^2))\,u_1]^{\alpha+1} \times \\ \times [2c_{13}^2 u_2 + (c_{13}^1 - c_{23}^2 + \alpha(c_{13}^1 + c_{23}^2))\,u_1]^{\alpha-1}$$

При $c_0 = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ — интегралы вида

$$\omega = [c_{13}^2 u_2{}^2 + (c_{13}^1 - c_{23}^2)\,u_1 u_2 - c_{23}^1 u_1{}^2] \times \\ \times \exp\left\{\frac{2}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{2c_{13}^2 u_2 + (c_{13}^1 - c_{23}^2)\,u_1}{\alpha(c_{13}^1 + c_{23}^2)\,u_1}\right\}$$

Алгебра, для которой $c_0 = 0$ и $(c_{23}{}^1)^2 + (c_{13}{}^2)^2 + (c_{12}{}^3)^2 > 0$, выделена в особую (без нарушения общности можно считать, например, $c_{13}{}^2 \neq 0$). Соответствующий ей первый интеграл может быть записан в форме

$$\omega = \left(u_2 + \frac{c_{13}^1 - c_{23}^2}{2c_{13}^2}\,u_1\right) \exp\left[-\frac{c_{13}^1 + c_{23}^2}{2c_{13}^2}\,\frac{u_1}{u_2 + (c_{13}^1 - c_{23}^2)\,u_1/(2c_{13}^2)}\right]$$

Предельному случаю $c_0 = 0$, $(c_{23}{}^1)^2 + (c_{13}{}^2)^2 + (c_{12}{}^3)^2 = 0$ также отвечает особая алгебра непрерывной серии и первый интеграл

$$\omega = \frac{c_{13}^1 y_1 + c_{13}^3 y_3}{c_{13}^1 y_2 + c_{23}^3 y_3} \quad (c_{13}^1 \neq 0)$$

Характерно, что в переменных Четаева y_1, y_2, y_3 все полученные интегралы зависят только от структуры алгебры A.

Подробные сведения о структуре трехмерных алгебр Ли помогли решить некоторую механическую задачу— вычислить дополнительные первые интегралы. По-видимому, возможно обращение этой задачи: интегрированием уравнений (8.1) получить структурные характеристик алгебр Ли размерности $s > 3$.

9. Частные решения уравнений движения, порождаемые нециклическими первыми интегралами. Линейной оболочке операторов (6.3) наряду с оператором сдвига S принадлежат коммутаторы $[S, X_i^*]$, $[S, Y_i^*]$. Действительно, воспользовавшись формулой (7.1), найдем

$$(9.1) \qquad [S,\ X_i^*] = \mu_i{}^j Y_j^* + \nu_i{}^j X_j^*,\quad [S,\ Y_i^*] = \pi_i{}^j Y_j^* + \rho_i{}^j X_j^*$$

$$\mu_i{}^j = X_i^* \frac{\partial H^*}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_k{}^i}{\partial x_j} \frac{\partial H^*}{\partial x_k}, \qquad \nu_i{}^j = -X_i^* \frac{\partial H^*}{\partial y_j} + c_{ki}^j \frac{\partial H^*}{\partial y_k}$$

$$\pi_i{}^j = Y_i^* \frac{\partial H^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_i{}^k}{\partial x_j} \frac{\partial H^*}{\partial x_k}, \qquad \rho_i{}^j = -Y_i^* \frac{\partial H^*}{\partial y_j}$$

Пусть ω — первый интеграл системы (6.2) при $Q_1 = \ldots = Q_s = 0$: $S\omega = 0$. Обозначим

$$(9.2) \qquad X_i^*\ \omega = a_i,\ Y_i^*\omega = b_i$$

Если интеграл ω не отвечает какой-либо явной циклической координате, то не все функции a_i, b_i — тождественные нули. Предположим, что система уравнений

$$(9.3) \qquad a_i = b_i = 0,\ i = 1, \ldots, s$$

совместна. Тогда она определяет некоторый частный интеграл уравнений (6.2). Это следует непосредственно из соотношений (9.1):

$$Sa_i = \mu_i{}^j b_j + \nu_i{}^j a_j,\ Sb_i = \pi_i{}^j b_j + \rho_i{}^j a_j$$

Необходимо отметить, что данное утверждение о частных интегралах можно рассматривать как модификацию теоремы о стационарных движениях, доставляющих экстремум одному из интегралов на поверхностях уровня остальных интегралов [9]. Возможность получения частных решений может оказаться полезной даже для вполне интегрируемых задач.

Вопрос о размерности многообразия (9.3) требует отдельного обсуждения. Здесь заметим лишь, что во многих механических задачах эта размерность не меньше единицы. Это объясняется тем, что свойства порождающих интегралов ω и матрицы (6.7) позволяют реализовать тождественные линейные зависимости между функциями (9.2). Поскольку $S\omega = 0$, то одна такая связь всегда есть

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_i} a_i - \frac{\partial H^*}{\partial x_i} b_i = 0$$

В качестве примера рассмотрим уравнения Эйлера — Пуассона задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Это уравнения Пуанкаре — Четаева (п. 2), одновременно совпадающие со своей канонической формой (если в последней вернуться к переменным p, q, r). Из-за наличия циклической координаты оператор сдвига S — линейная комбинация лишь пяти операторов (см. (7.4)). Определенный интерес представляет и несколько иная запись этого оператора, получаемая непосредственно из представления (7.1)

$$S = pX_1^* + qX_2^* + rX_3^* + Px_c\, Y_1 + Py_c\, Y_2 + Pz_c\, Y_3$$

Здесь

$$(9.4) \qquad X_1^* = \frac{C}{B} r \frac{\partial}{\partial q} - \frac{B}{C} q \frac{\partial}{\partial r} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_3}, \qquad Y_1 = \frac{\gamma_3}{B} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\gamma_2}{C} \frac{\partial}{\partial r}$$

((123), (pqr), (ABC))

Операторы (9.4) порождают шестимерную алгебру Ли. Соответствующая ей группа может быть реализована как группа движений трехмерного евклидового пространства.

Имеют место два тождества различного происхождения

$$\gamma_1 Y_1 + \gamma_2 Y_2 + \gamma_3 Y_3 = 0, \ ApY_1 + BqY_2 + CrY_3 + \gamma_1 X_1^* + \gamma_2 X_2^* + \gamma_3 Y_3^* = 0$$

Существование первого объясняется избыточностью переменных γ_1, γ_2, γ_3, второго — наличием циклической координаты. Других линейных связей нет. Поскольку операторы (9.4) действуют в шестимерном пространстве, система уравнений

$$Y_i \omega = X_i^* \omega = 0, \ i = 1, \ 2, \ 3$$

совместна и допускает точно два решения. Это интегралы момента количеств движения относительно вертикали и геометрический. Указанные интегралы, следовательно, не могут порождать частных решений. В случае Эйлера ($x_c = y_c = z_c = 0$) $S = pX_1^* + qX_2^* + rX_3^*$ и система уравнений $X_1^* \omega = X_2^* \omega = X_3^* \omega = 0$ дает еще один интеграл — интеграл Эйлера. (Это первый из семейства интегралов (8.3), отвечающий группе вращений.)

Перечислим некоторые частные решения, порождаемые нециклическими первыми интегралами

Интеграл энергии

$$H = {}^1/_2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P\,(x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3)$$

приводит к семейству перманентных вращений.

В случае Эйлера интеграл Эйлера порождает частный интеграл ([10], с. 143)

$$Ap/\gamma_1 = Bq/\gamma_2 = Cr/\gamma_3$$

В случае Лагранжа ($x_c = y_c = 0$, $A = B$) интеграл $\omega = r$ дает перманентные вращения частного вида:

$$p = q = 0, \ r = r_0, \ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = \pm 1$$

Возьмем порождающий первый интеграл в виде комбинации интеграла Лагранжа и интеграла энергии

$$\omega = {}^1/_2\, A\,(p^2 + q^2) + Pz_c\gamma_3 + \alpha r^2 + \beta r$$

где α, β — постоянные коэффициенты. Система (9.3) сводится к четырем уравнениям

$$p/\gamma_1 = q/\gamma_2 = \lambda, \quad \beta = C\lambda\gamma_3 - 2\alpha r, \quad (2\alpha A - C^2)\,r\lambda + \beta A\lambda + Pz_c C = 0$$

Подстановка этого частного интеграла в уравнения движения дает семейство регулярных прецессий ([10], с. 185)

$$p = \lambda\gamma_1, \ \ q = \lambda\gamma_2, \ \ \gamma_1^{\cdot} = \Omega\gamma_2, \ \ \gamma_2^{\cdot} = -\Omega\gamma_1, \ \ \Omega = (A - C)/r_0A + Pz_c/\lambda A$$

$$\lambda = \mathrm{const}, \ \ r = r_0, \ \ \gamma_3 = \gamma_3^0 = \mathrm{const}, \ \ A\gamma_3^0\lambda^2 - Cr_0\lambda + Pz_c = 0$$

В случае Ковалевской ($y_c = z_c = 0$, $A = B = 2C$) рассмотрим комбинацию из интеграла Ковалевской и интеграла энергии

$$\omega = (p^2 - q^2 - a\gamma_1)^2 + (2pq - \alpha\gamma_2)^2 + \alpha\ (p^2 + q^2 + {}^1/_2\, r^2 + \alpha\gamma_1)$$

$$a = Px_c/C$$

При $\alpha = 0$ получаем следующие решения:

частный интеграл случая Делоне ([10], с. 211)

$$p^2 - q^2 - \alpha\gamma_1 = 0, \ 2pq - \alpha\gamma_2 = 0$$

частный вид перманентных вращений

$$q = r = \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \ p = p_0 = \mathrm{const}, \ \gamma_1 = \pm 1$$

маятниковые движения [11]

$$p = q = \gamma_3 = 0, \ r^{\cdot} = -\alpha\gamma_2, \ \gamma_1^{\cdot} = r\gamma_2, \ \gamma_2^{\cdot} = -r\gamma_1$$

перманентные вращения

$$p = p_0 = \mathrm{const}, \qquad q = 0, \qquad \gamma_1 = \frac{p_0^2}{a}, \qquad \gamma_2 = 0, \qquad = \frac{a\gamma_3^0}{p_0}$$

$$\gamma_3^{02} + \left(\frac{p_0^2}{a}\right)^2 = 1$$

маятниковые движения

$$p = r = \gamma_2 = 0, \ q^{\cdot} = {}^1/_2\, \alpha\gamma_3, \ \gamma_1^{\cdot} = -q\gamma_3, \ \gamma_3^{\cdot} = q\gamma_1, \ q^2 + a\gamma_1^2 = 0$$

При $\alpha = -2\,(aC/l)^2$, $l = 2Cp\gamma_1 + 2Cq\gamma_2 + Cr\gamma_3$ получается семейство частных решений, отвечающее пересечению случаев Ковалевской и Бобылева — Стеклова ([10], с. 217)

$$p = p_0 = a\frac{C}{l}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{l}{C}\gamma_3, \qquad \gamma_1 = \frac{l^2}{2aC^2}(1 - \gamma_3^2)$$

$$\gamma_1^{\cdot} = \frac{l}{C}\gamma_2\gamma_3, \qquad \gamma_3^{\cdot} = -\frac{aC\gamma_2}{l_2}$$

В углах Эйлера

$$\psi^{\cdot} = \nu, \qquad \varphi^{\cdot} = \nu\cos\theta, \qquad \theta^{\cdot} = \frac{a}{2\nu}\cos\varphi, \qquad \sin\varphi = 2\frac{\nu^2}{a}\sin\theta$$

$$\nu = \frac{l}{2C} = \mathrm{const}$$

уравнения движения можно представить в форме

$$\varphi^{\cdot 2} + \left(\frac{a}{2\nu}\right)^2\sin^2\varphi = \nu^2, \qquad \theta^{\cdot 2} + \nu^2\sin^2\theta = \left(\frac{a}{2\nu}\right)^2$$

Видно, что если $(a/2\nu)^2 < \nu^2$, то координата θ колеблется, а изменение φ отвечает вращательному движению; при $(a/2\nu)^2 > \nu^2$ колеблется φ и «вращается» θ; при $(a/2\nu)^2 = \nu^2$ оба движения, сохраняя синхронность, асимптотически стремятся к одному из парманентных вращений тела с центром масс, лежащим на вертикали.

В случае Горячева — Чаплыгина ($y_c = z_c = 0$, $A = B = 4C$; $l = 4Cp\gamma_1 + 4Cq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = 0$) порождающий интеграл возьмем в виде комбинации интеграла Горячева — Чаплыгина и интеграла энергии

$$\omega = r\,(p^2 + q^2) - ap\gamma_3 + \alpha\,(4p^2 + 4q^2 + r^2 + 2a\gamma_1), \quad a = Px_c/C$$

Получим семейство частных решений ([12], с. 123)]

$$p = 2\alpha\gamma_3\,({}^3/_2 - b\gamma_3^2), \; q = 2\alpha\gamma_2/\gamma_3, \; r = 8\alpha\,(b\gamma_3^2 - {}^1/_2)$$

$$\gamma_1 = -b\gamma_3^4 + {}^3/_2\,\gamma_3^2 - 1, \; b = a/32\alpha^2 \;\; (\alpha \neq 0)$$

Величина γ_3 вычисляется обращением квадратуры, получающейся из уравнения

$$\gamma_3\gamma_3^{\cdot} = \pm 2\alpha\,[1 - \gamma_3^2 - (b\gamma_3^4 - {}^3/_2\gamma_3^2 + 1)^2]^{1/2}$$

В заключение этого пункта заметим следующее. Хорошо известен восходящий к Леви-Чивита способ получения стационарных решений из системы уравнений $\partial\omega/\partial z_i = 0$, где ω — связка известных первых интегралов, а z_i — фазовые переменные. Использование для той же цели операторов X_i^*, Y_i^* имеет два отличия: 1) в связку не нужно включать циклические интегралы и интегралы, происходящие от избыточности переменных; 2) можно получать частные решения от интегралов, возникающих на вырожденных уровнях циклических интегралов (таких, например, как интеграл Горячева — Чаплыгина).

Автор благодарит В. В. Румянцева за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur one forme nouvelle des équations de la mecanique.— C. r. Acad. sci., 1901, v. 132, p. 369—371.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. *Фам Гуен.* Об одной форме уравнений движения механических систем.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 397—402.
5. *Илиев И.* О линейных интегралах голономной механической системы.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 751—755.
6. *Сумбатов А. С.* О циклических координатах консервативных натуральных систем с тремя степенями свободы.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 787—799.
7. *Hussain M.* Conservatiom Laws for a Dynamical System in Group Variables.— Z. angew. Math. und Mech., 1982, B. 62, H. 9, S. 441—446.
8. *Мархашов Л. М.* Трехпараметрические группы Ли, примыкающие к группам Галилея и Евклида.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2, с. 278—289.
9. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954, с. 276—319.
10. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
11. *Старжинский В. М.* Один из исключительных случаев движения волчка Ковалевской.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 166—168.
12. *Чаплыгин С. А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. Собр. соч. Т. 1. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 118—124.

Москва

Поступила в редакцию
6.II.1984