

УДК 531.38

**К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ
ТОРМОЖЕНИЯ ВРАЩЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС**

Борщевский М. З., Иослович И. В.

Рассматривается задача о быстрейшем торможении твердого тела, имеющего осесимметричный эллипсоид инерции, с помощью трех пар реактивных двигателей, создающих управляемые моменты, направленные по главным осям эллипсоида инерции [1—4]. Проводится анализ структуры оптимальных траекторий. Доказывается, что четыре луча, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси динамической симметрии, являются не только фазовыми траекториями с особым управлением [3], но и играют роль магистралей, причем выход оптимальных траекторий на магистрали происходит после бесконечного числа переключений управления. Оптимальные траектории, выходящие на магистрали, заполняют в фазовом пространстве внешнюю область двух пересекающихся круговых конусов, окружающих ось динамической симметрии.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Задача о быстрейшем торможении вращения твердого тела, имеющего осесимметричный эллипсоид инерции, рассматривается в следующей постановке [1]. Имеется система уравнения Эйлера в нормальной форме

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= b_1 u_1, \quad \dot{y} = -Dxz + b_2 u_2, \quad \dot{z} = Dxy + b_3 u_3; \quad D = \\ &= (A - C) / B, \quad B = A \end{aligned}$$

с ограничениями

$$(1.2) \quad |u_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь x, y, z — проекции вектора мгновенной угловой скорости тела в подвижной системе координат, связанной с главными осями центрального эллипсоида инерции, u_i — управления, b_i — постоянные, A, B, C — моменты инерции. Требуется перевести произвольную фазовую точку системы (1.1), координаты которой в момент $t = 0$ обозначим (x_0, y_0, z_0) , в начало координат за минимальное время.

Введем новые переменные: расстояние $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$ от фазовой точки до оси динамической симметрии x и угол θ между осью y и проекцией радиуса-вектора фазовой точки на плоскость $x = 0$. Из (1.1) при $r > 0$ следует система

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= b_1 u_1, \quad \dot{r} = b_2 u_2 \cos \theta + b_3 u_3 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= Dx - b_2 \sin \theta u_2 r^{-1} + b_3 u_3 r^{-1} \cos \theta \end{aligned}$$

Из первого уравнения (1.3) получаем очевидную оценку для времени быстрейшего торможения

$$(1.4) \quad T^* \geq |x_0| b_1^{-1} = T_{H1}$$

Оптимальные фазовые траектории, для которых достигается оценка (1.4), не имеют переключений по u_1 и заполняют внутреннюю часть некоторой поверхности, условно названной «конусом» [1], которая проходит через начало координат и окружает ось x .

Внутри конуса имеется неединственность решения задачи по управлениям u_2, u_3 .

Вторую оценку для времени торможения получим из второго уравнения (1.3), максимизируя его правую часть по θ при условии (1.2), откуда следует, что $r \geq (b_2^2 + b_3^2)^{1/2}$ и

$$(1.5) \quad T^* \geq r_0 (b_2^2 + b_3^2)^{-1/2} = (y_0^2 + z_0^2)^{1/2} (b_2^2 + b_3^2)^{-1/2} = T_{H2}$$

Оценка (1.5) достигается на четырех лучах, лежащих в плоскости $x = 0$:

$$(1.6) \quad |y| / |z| = b_2 / b_3$$

при управлениях $u_1 = 0, u_2 = -\operatorname{sgn} y, u_3 = -\operatorname{sign} z$, которые являются особыми решениями задачи [3].

Будет показано, что лучи (1.6) являются магистралями и состоят из точек накопления переключений. Это позволяет качественно характеризовать общую картину синтеза, построить и оценить сходящиеся последовательности приближенных решений.

Теорема. Можно определить такие положительные постоянные a_1, a_2, a_3 и такую область Q в пространстве координат x, y, z , что оптимальная траектория задачи (1.1), (1.2), проходящая через любую точку $M(x, y, z) \in Q$ попадет на один из лучей (1.6) за время, не превышающее $a_1 |x| + a_2$, и идет далее в начало координат по этому лучу. Область Q содержит точки, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(1.7) \quad (y^2 + z^2)^{1/2} (b_2^2 + b_3^2)^{-1/2} - a_1 |x| - a_2 - a_3 \geq 0$$

2. Вспомогательные построения. На произвольной траектории, переводящей фазовую точку $M(x, y, z)$ в начало координат, определим функционал «потерь» I . Для этого рассмотрим величину $\delta = r + b$ ($b = \sqrt{b_2^2 + b_3^2}$).

Неотрицательная величина δ характеризует проигрыш в мгновенной скорости приближения к оси x по сравнению с максимально возможной скоростью. Функционал потерь вычисляется по траектории, переводящей некоторую точку (x, y, z) в начало координат за время T , как

$$(2.1) \quad I = \int_0^T \delta(t) dt = \int_0^T (r + b) dt = -\sqrt{y^2 + z^2} + bT$$

Если точку (x, y, z) соединяют с началом координат две траектории, то функционал потерь меньше на той траектории, которая быстрее приводит точку в начало координат, и наоборот, траектория с меньшим функционалом быстрее приводит точку в начало координат. Это непосредственно следует из (2.1). Таким образом, задача быстрогодействия адекватна задаче минимизации функционала потерь на траектории торможения.

Достаточно малые значения $\delta(t)$ можно получить только тогда, когда фазовая точка находится внутри одного из острых двугранных углов B_i ($i = 1, 2, 3, 4$), образованных плоскостями, проходящими через ось x , симметричными относительно одного из лучей (1.6) и образующими с ним достаточно малые углы $\pm\beta$. В этом случае при управлении

$$(2.2) \quad u_2 = -\operatorname{sgn} y, \quad u_3 = -\operatorname{sgn} z$$

имеем

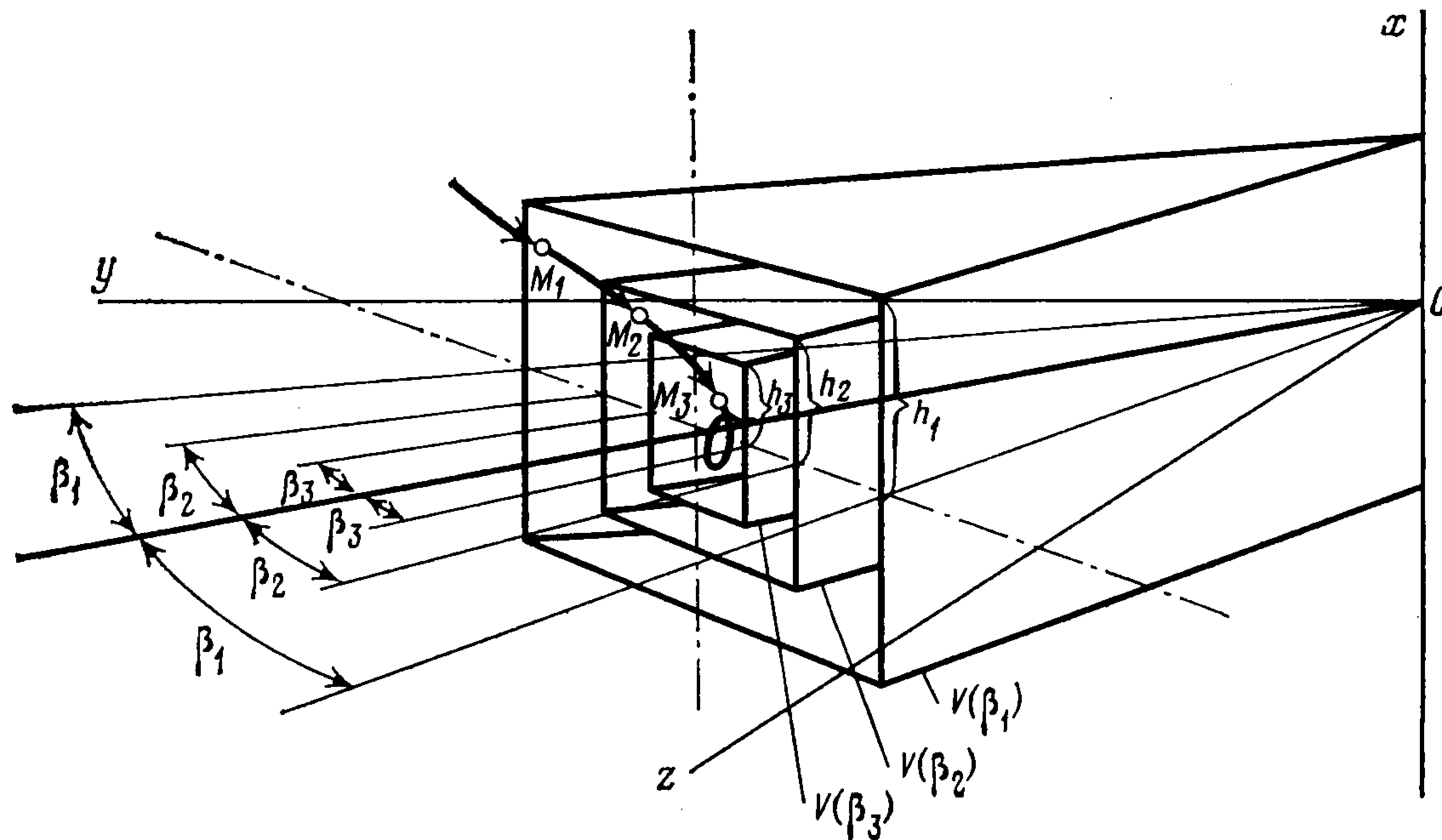
$$(2.3) \quad \delta \leq b(1 - \cos \beta)$$

Построим вокруг каждого из лучей (1.6) область $V_i(\beta)$ (фиг. 1), ограниченную соответствующим двугранным углом B_i и двумя плоскостями $x = h$ и $x = -h$. Величину h определим как

$$(2.4) \quad h = \sqrt{b_1 \beta} / D + b \sin \beta / (DR_0)$$

где R_0 — некоторая положительная величина.

Тогда для любого числа $R_0 > 0$ найдется такое достаточно малое $\beta_1 > 0$, что при $0 < \beta \leq \beta_1$ справедливо следующее утверждение: если на



Фиг. 1

некотором временном отрезке $[t_-, t_+]$ фазовая точка системы (1.1) не попадает в области $V_i(\beta)$, причем на нем расстояние от фазовой точки до оси x остается не меньше R_0 , то вычисленный на этом отрезке интеграл потерь удовлетворяет неравенству

$$(2.5) \quad \int_{t_-}^{t_+} \delta(t) dt > \frac{b}{2} (1 - \cos \beta_1) \left(t_+ - t_- - \frac{2\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{b_1 D}} \right)$$

Доказательство неравенства (2.5) дано в п. 4.

Введем специальные траектории L , функционал потерь на которых будет служить для оценки сверху функционала потерь на оптимальной траектории. Если (x^0, y^0, z_0) — некоторая фазовая точка, расположенная на достаточном расстоянии от оси x , то соответствующая специальная траектория выводит ее на один из лучей (1.6) и затем приводит по этому лучу в начало координат. На траектории L положим $u_2 = -\text{sgn } y$, $u_3 = -\text{sgn } z$. Управление u_1 определяется следующим образом: $u_1 = -\text{sgn } x^0$ на первом участке до достижения плоскости $x = 0$ в течение времени $\tau_1 = |x^0| / b_1$.

Пусть радиус-вектор точки, в которой траектория L достигла плоскости $x = 0$, образует с ближайшим лучом (1.6) острый угол γ . В зависимости от направления, в котором необходимо повернуть радиус-вектор на угол γ до совмещения с лучом, на втором участке траектории L управление u_1 принимает в течение некоторого времени τ_2 значение $+1$, а затем на третьем участке в течение такого же времени — значение -1 или наоборот, на втором участке $u_1 = -1$ и на третьем $u_1 = +1$.

Величина τ_2 выбирается с таким расчетом, чтобы фазовая точка в конце третьего участка траектории L попала на луч (1.6), а проекция ее ра-

диуса-вектора на плоскость $x = 0$ повернулась на угол γ . На четвертом участке траектория L идет по лучу до начала координат $u_1 = 0$.

3. Вывод основного результата. Для задачи (1.1), (1.2) было доказано [4] существование оптимальных управлений в классе интегрируемых функций. Пусть L^* и L_0 — исходящие из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ оптимальная и специальная траектории, I_0^* и I_0 — вычисленные на этих траекториях функционалы потерь.

Оценки, на которых базируются последующие рассуждения, получены в п. 4 при следующих предположениях:

1) рассмотренный участок оптимальной траектории и специальная траектория до выхода на один из лучей (1.6) подходят к оси x не ближе, чем на некоторое произвольное, но фиксированное расстояние R_0 ;

2) величина β_1 выбирается так, чтобы выполнялись неравенства

$$\beta_1 \leq D b_1 R_0^2 / (100 b^2), \quad \beta_1 \leq \mu / 14,4$$

где μ — наименьший угол между парой лучей (1.6).

Выберем некоторое R_0 и достаточно малый в соответствии с условием 2) угол β_1 . Положим $\beta_2 = \rho \beta_1, \dots, \beta_s = \rho^{s-1} \beta_1, \rho < 1$ и построим вокруг лучей (1.6) области $V_i(\beta_1), \dots, V_i(\beta_s)$. Если на отрезке $[0, t]$ траектория L^* проходит вне областей $V_i(\beta_1)$ и не приближается к оси x ближе чем на расстояние R_0 , то из оценки (2.5) имеем (d_1 — длина отрезка $[0, t]$)

$$(3.1) \quad I_0 > \frac{1}{2} b (1 - \cos \beta_1) (d_1 - 2 \sqrt{\beta_1} / \sqrt{bD})$$

Траектория L^* оптимальная, поэтому $I_0^* \leq I_0$. С учетом этого неравенства из (3.1) получаем

$$(3.2) \quad d_1 < \bar{d}_1 = 2 \sqrt{\beta_1} / \sqrt{b_1 D} + 2 \bar{I}_0 / [b (1 - \cos \beta_1)]$$

где \bar{d}_1 — верхняя оценка величины d_1 , \bar{I}_0 — верхняя оценка I_0 . Черта сверху и далее будет обозначать верхнюю оценку. В п. 4 построена оценка I_0 (4.4), величина которой зависит от начальной координаты x_0 и не зависит от r_0 .

Дальнейшее доказательство построено на оценках сверху отрезков времени d_{j+1} , за которые фазовая точка, двигаясь по оптимальной траектории, переходит из области $V_i(\beta_j)$ в область $V_i(\beta_{j+1})$. Доказывается, что длины отрезков d_j мажорируются геометрической прогрессией со знаменателем $\sqrt{\rho}$, где $\rho < 1$. Таким образом, ряд $\bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \dots$ сходится к величине, которая не зависит от начальной точки M_0 . Поэтому область начальных значений M_0 можно выбрать так, чтобы оптимальные траектории приходили на один из лучей (1.6) быстрее, чем за время T_{H_2} (1.5).

Вычислим для некоторого произвольного значения x_0^a оценки \bar{I}_0 по (4.4) и \bar{d}_1 по (3.2). Выберем начальную точку M_0 так, чтобы

$$(3.3) \quad x_0 = x_0^a, \quad r_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} \geq R_0 + \bar{d}_1 b$$

Оптимальная траектория L_0^* , проведенная из этой начальной точки, будет в течение времени \bar{d}_1 находиться от оси x на расстоянии, не меньше R_0 , так как b — максимально возможная скорость приближения фазовой точки к оси x . Из определения \bar{I}_0 (4.4) и условия (3.3) следует, что время выхода специальной траектории L_0 на один из лучей (1.6) меньше, чем \bar{d}_1 . Поэтому до выхода на луч траектория L_0 , используемая для сравнения, также удалена от оси x не менее, чем на R_0 . Таким образом, если начальная точка M_0 выбрана в соответствии с (3.3), то условия 1) выполнены. Следовательно, для выполнения неравенства (3.2) необходимо, чтобы в не-

который момент t_1 оптимальная траектория проходила через некоторую точку M_1 , принадлежащую $V_i(\beta_1)$, причем должно соблюдаться неравенство

$$(3.4) \quad t_1 \leq \bar{d}_1$$

Возьмем теперь некоторую точку M_j ($j = 1, \dots, s-1$), принадлежащую одной из областей $V_i(\beta_{j+1})$, и проведем из нее оптимальную траекторию L_j^* и специальную траекторию L_j . Аналогично предыдущему придем к неравенству

$$(3.5) \quad d_{j+1} < \bar{d}_{j+1} = 2\sqrt{\beta_{j+1}} / \sqrt{b_1 D} + 2\bar{I}_j / [b(1 - \cos \beta_{j+1})]$$

Здесь d_{j+1} — длина отрезка времени, в течение которого оптимальная траектория, выходящая из M_j , еще не попадает ни в одну из областей $V_i(\beta_{j+1})$; \bar{I}_j — верхняя оценка функционала потерь на специальной траектории L_j (4.11). Последняя величина не зависит от координат точки $M_j \in V_i(\beta_j)$.

Оценка \bar{I}_j построена в п. 4 таким образом, что

$$(3.6) \quad \bar{I}_j > b(1 - \cos \beta_j) \tau$$

где τ — время движения фазовой точки по специальной траектории L_j от M_j до луча. Из (3.6) и (3.5) следует, что $\tau < \bar{d}_j$. Поэтому, если координаты M_j таковы, что

$$(3.7) \quad r_j = \sqrt{y_j^2 + z_j^2} \geq R_0 + \bar{d}_{j+1} b,$$

то условия 1) выполняются. В силу (3.5) на оптимальной траектории L_j^* найдется некоторая точка M_{j+1} , принадлежащая одной из областей $V_i(\beta_{j+1})$, причем время перехода от M_j к M_{j+1} не превысит \bar{d}_{j+1} .

Выберем такую точку M_0 , что

$$(3.8) \quad x_0 = x_0^a, \quad r_0 \geq R_0 + b \sum_{j=1}^s \bar{d}_j$$

и проведем из нее оптимальную траекторию L^* .

Так как координаты M_0 удовлетворяют условию (3.3), фазовая точка, вышедшая из M_0 в момент t_0 , не позже момента $t_0 + \bar{d}_1$ попадает в некоторую точку M_1 одной из областей $V_i(\beta_1)$. Координаты M_1 , очевидно, удовлетворяют условию (3.7) при $j = 1$, поэтому не позже момента $t_0 + \bar{d}_1 + \bar{d}_2$ оптимальная траектория окажется в точке M_2 одной из областей $V_i(\beta_2)$. Далее оптимальная траектория L^* пройдет последовательно через точки областей $V_i(\beta_j)$, пока в момент t_s не окажется в точке M_s , принадлежащей одной из областей $V_i(\beta_s)$, причем

$$(3.9) \quad t_s < t_0 + \bar{d}_1 + \sum_{j=2}^s \bar{d}_j, \quad r_s > R_0$$

Покажем, что t_s — величина, ограниченная при $s \rightarrow \infty$.

Подставляя в (3.5) оценку \bar{I}_j (4.11), получаем

$$(3.10) \quad \bar{d}_{j+1} < 2\sqrt{\beta_j} \sqrt{\rho} \times \\ \times (1 + c\rho^{-s/2}) / \sqrt{b_1 D}, \quad j = 1, 2, \dots; \quad c = 17$$

Величины β_j составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho < 1$, поэтому ряд, стоящий под знаком суммы в (3.9), сходится. Его сумма может быть оценена сверху суммой геометрической прогрессии с общим членом (3.10). Подставляя в (3.9) эту сумму и значение \bar{d}_1 , по (3.2)

и (4.4) имеем

$$(3.11) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} t_s = t^* < \bar{t}^* = t_0 + a_1 |x_0| + a_2$$

$$a_1 = \frac{2}{b_1(1 - \cos \beta_1)}, \quad a_2 = \frac{2(b + \sqrt{b^2 + 1/2\pi D b_1})}{D b_1 R_0(1 - \cos \beta_1)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\beta_1}(1 + c\rho^{-2})}{\sqrt{b_1 D}(1 - \sqrt{\rho})}$$

где t^* — точная верхняя граница последовательности t_s , a_1, a_2 — постоянные.

Условия выбора точки M_0 (3.8) можно с учетом (3.11) записать для любого x_0 и сколь угодно большого s в виде

$$(3.12) \quad b^{-1} \sqrt{y_0^2 + z_0^2} \geq a_3 + (\bar{t}^* - t_0) = a_1 |x_0| + a_2 + a_3$$

$$a_3 = R_0/b$$

Если координаты точки M_0 удовлетворяют условию (3.12), то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое достаточно большое s , что оптимальная траектория L^* через время d^* , не превышающее

$$(3.13) \quad \bar{d}^* = \bar{t}^* - t_0 = a_1 |x_0| + a_2$$

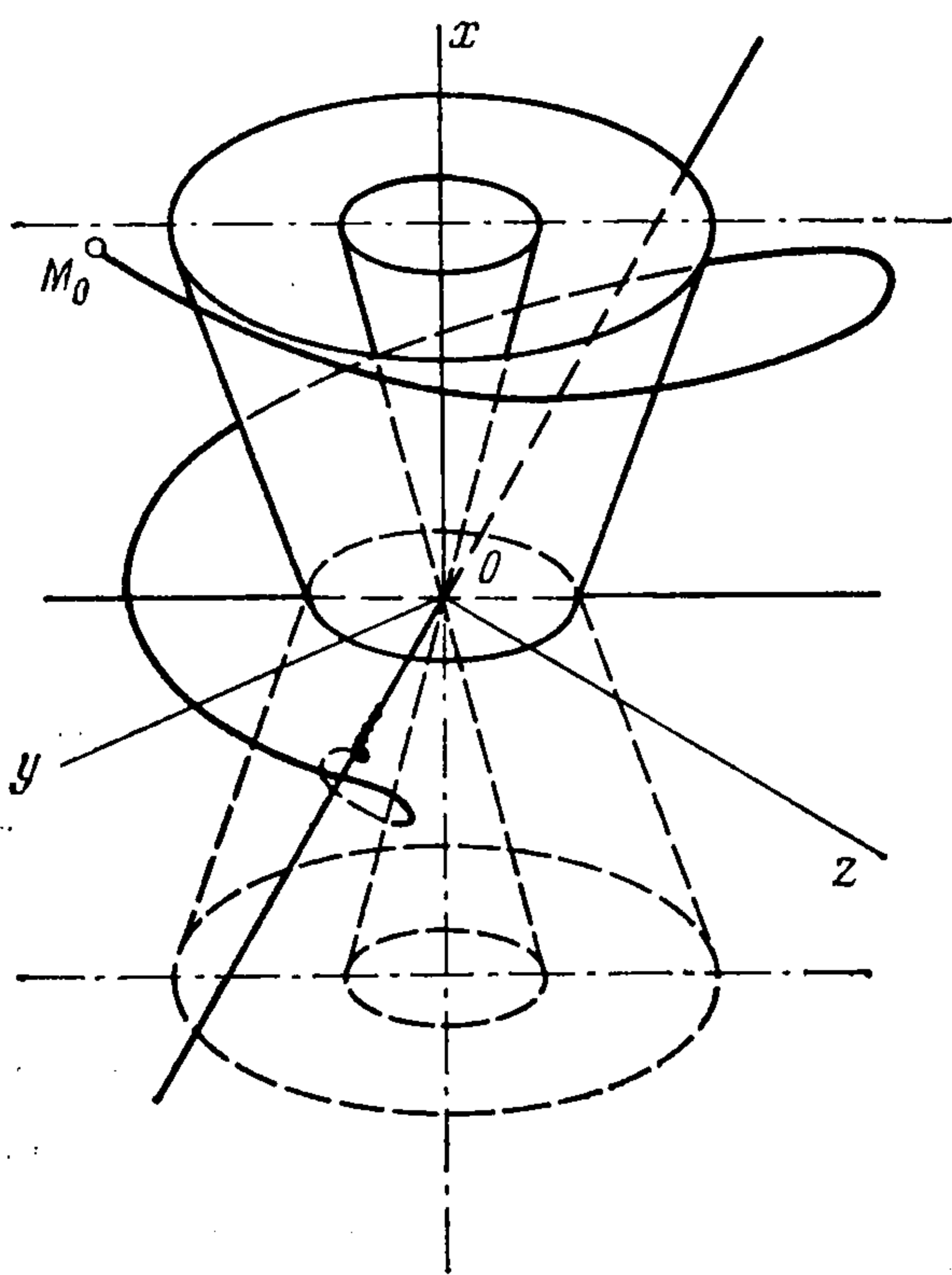
окажется в точке M_s , отстоящей от одного из лучей (1.6) на расстоянии меньшем ε . После момента \bar{t}^* до прихода в начало координат отрезок оп-

тимальной траектории длиной более R_0 совпадает с лучом. Основная теорема доказана полностью.

Рассмотрим приходящие на луч оптимальные решения с точки зрения необходимых условий оптимальности принципа максимума.

Введем обратное время τ таким образом, чтобы в момент $\tau = 0$ фазовая точка находилась в начале координат. Обозначая дифференцирование по τ штрихом, выпишем основные и вспомогательные уравнения системы (1.1)

$$(3.14) \quad \begin{aligned} x' &= -b_1 u_1, & y' &= Dxz - b_2 u_2 \\ z' &= -Dxy - b_3 u_3 \\ \lambda_x' &= -Dz\lambda_y + Dy\lambda_z, \\ \lambda_y' &= Dx\lambda_z, & \lambda_z' &= -Dx\lambda_y \end{aligned}$$



Фиг. 2

и гамильтониан

$$(3.15) \quad H = -\lambda_x b_1 u_1 + \lambda_y (Dxz - b_2 u_2) + \lambda_z (-Dxy - b_3 u_3)$$

На примыкающем к началу координат участке траектории, лежащем на одном из лучей (1.6), должны выполняться условия

$$(3.16) \quad \begin{aligned} x &= 0, & u_1 &= 0, & \lambda_x &= 0, & \lambda_x' &= 0 \\ u_2 &= -\text{sgn } y, & u_3 &= -\text{sgn } z \end{aligned}$$

Анализ соотношений (3.14)—(3.16) показывает, что на оптимальной траектории не может быть участка непрерывного управления конечной длины, в конце которого она выходит на луч [4]. Действительно, пусть

в обратном движении в момент, когда фазовая точка находится на луче и выполнены условия (3.16), включается на малое время Δ , например, положительное управление u_1 . Тогда в силу уравнения (3.14) через время $\Delta / 2$ величины λ_x' и λ_x приобретут положительные значения и условие максимума по управлению не будет выполняться.

Используя идею работы [3], можно показать, что на оптимальных траекториях, проходящих на лучи (1.6), не может быть двух последовательных переключений по u_1 , совершенных строго по одну сторону от плоскости $x = 0$.

Оптимальную траекторию можно представить в виде навивающейся на луч (1.6) спирали (фиг. 2), шаг и диаметр витка которой одновременно стремятся к нулю, причем точка сгущения лежит на конечном расстоянии от начала координат. Фазовая точка выводится на луч после бесконечного числа переключений u_1 , совершенных в конечное время. Реализуется так называемое особое решение второго рода [5].

При двух последовательных пересечениях оптимальной траекторией плоскости $x = 0$ угловое расстояние вектора фазовой точки от луча уменьшается более чем в 17 раз, если оно достаточно мало.

4. Оценка потерь на траекториях. На специальной траектории L , проведенной из точки (x, y, z) потери имеются только на первых трех ее участках. Имеем очевидную оценку

$$(4.1) \quad I \leq b [(1 - \cos \gamma_1) |x| / b_1 + 2(1 - \cos \gamma_2) \tau_2]$$

где γ_1 — максимальный на первом участке острый угол между проекцией вектора управления на плоскость $x = 0$ и вектором $(0, -y, -z)$, γ_2 — аналогичный максимальный угол на втором и третьем участках.

В силу уравнений (1.3) и выбранного на специальной траектории управления (2.2) имеем

$$(4.2) \quad D|x| - b \sin \gamma / R_0 \leq \theta \leq D|x| + b \sin \gamma / R_0$$

где γ — острый положительный угол между векторами $(0, y, z)$ и $(0, b_2, b_3)$, R_0 — некоторая положительная величина, меньшая минимального значения r на первых трех участках траектории L .

Интегрируя нижнюю оценку θ (4.2) на втором и третьем участках траектории L , получаем

$$(4.3) \quad 2(Db_1\tau_2^2 / 2 - b\tau_2 \sin \gamma_2 / R_0) \leq \gamma_0$$

где γ_0 — угол между радиусом-вектором точки начала второго участка траектории L и ближайшим к ней лучом (1.6).

При оценке функционала потерь I_0 положим в (4.1) и (4.2) $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \pi / 2$. Тогда

$$(4.4) \quad I_0 \leq \bar{I}_0 = b [|x_0| / b_1 + 2\bar{\tau}_2] \\ \bar{\tau}_2 = (b + \sqrt{b^2 + 1/2\pi Db_1}) / (Db_1 R_0)$$

Для оценки I_j , $j > 0$, точнее оценим углы γ_0 , γ_1 , γ_2 и τ_2 . Так как точка M_j , $j > 0$, принадлежит одной из областей $V_i(\beta_j)$, интегрируя верхнюю оценку θ (4.2), получаем на первом участке

$$(4.5) \quad \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \beta_j + \frac{Db_1}{2} \left(\frac{h_j}{b_1} \right)^2 + b \sin \gamma_1 \frac{h_j}{b_1 R_0}$$

Для дальнейших оценок необходимо ввести связь между R_0 и β_j . Примем

$$(4.6) \quad \beta_j \leq Db_1 R_0^2 \cdot i (100b^2)$$

Подставляя в (4.5) значение h_j из (2.4) и учитывая (4.6), получаем

$$(4.7) \quad \gamma_1 \leq C_1 \beta_j, \quad C_1 = 1,9$$

В начале второго участка L_j угол γ может увеличиваться со скоростью $\dot{\gamma} \leq \leq b \sin \gamma / R_0 - D |x|$ в течение времени $\tau \leq b \sin \gamma_2 / (R_0 D b_1)$. Отсюда следует

$$(4.8) \quad \gamma_2 < \gamma_1 + (b\gamma_2)^2 / (2R_0^2 b_1 D)$$

Последнее неравенство не выполняется при $\gamma_2 = 2\beta_j$, в чем можно убедиться, подставляя в (4.8) оценки (4.6), (4.7); поэтому имеем

$$(4.9) \quad \gamma_2 < C_2 \beta_j, \quad C_2 = 2$$

Из (4.3) с учетом (4.6), (4.7), (4.9) и неравенства $\gamma_1 > \gamma_0$ имеем

$$(4.10) \quad \tau_2 < C_3 \sqrt{b_j / (D b_1)}, \quad C_3 = 0,1 C_2 + \sqrt{C_1 + 0,01 C_2} = 1,6$$

Подставляя (2.4) и оценки (4.7), (4.9) и (4.10) в (4.1), получаем оценку

$$(4.11) \quad I_j < C_4 b \beta_j^2 \sqrt{\beta_j} / \sqrt{D b_1}, \quad C_4 = (0,55 C_1^2 + C_2^2 C_3) = 8,4$$

Для доказательства неравенства (2.5) разобьем отрезок $[t_-, t_+]$ на примыкающие отрезки $[t_-, t^1], [t^1, t^2], \dots, [t^n, t_+]$. Величины t_j ($j = 1, \dots, n$) определяются последовательно как

$$t^0 = t_-, \quad t^j = t^{j-1} + \tau^j, \quad t^{n+1} = t_+$$

Величина τ^j ($j = 1, \dots, n+1$) — корень уравнения $\omega_j(\beta) \tau^j = 4\beta$, где функция $\omega_j(\alpha)$ определена как

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \omega_j(\alpha) &= D H_j - b \sin \alpha / R_0, \\ H_j &= \max [h_1 x_{j \min}] \end{aligned}$$

В (4.12) через $x_{j \min}$ обозначена точная нижняя грань величины $|x|$ на отрезке $[t^{j-1}, t^j]$. Величина $\omega_j(\beta)$ — нижняя оценка угловой скорости фазовой точки внутри двугранных углов B при условии $\gamma \leq \beta$.

Число отрезков таково, что $t^n + \tau^{n+1} \geq t_+$, $t^n < t_+$.

Оценим интеграл потерь I^j на одном из отрезков $[t^{j-1}, t^j]$. Возможны четыре случая: 1) траектория на отрезке лежит вне углов B ; 2) траектория на отрезке переходит из двугранного угла B по одну сторону от плоскости $x = 0$ в двугранный угол B по другую сторону от этой плоскости; 3) траектория на отрезке $[t^{j-1}, t^j]$ хотя бы частично принадлежит только одному углу B по одну сторону плоскости $x = 0$; 4) траектория на этом отрезке переходит из одного двугранного угла B_i в другой двугранный угол B_l .

Чтобы оценить I^j снизу, используются оценки: $\delta(t) \geq 0$ при $\gamma \leq \beta$; $\delta(t) \geq b(1 - \cos \beta)$ при $\beta < \gamma < \bar{\gamma}_j$; $\delta(t) \geq b(1 - \cos \beta)$ при $\gamma \geq \bar{\gamma}_j$; где $\bar{\gamma}_j$ — корень уравнения $\omega_j(\gamma) = 0$. В случаях 3) и 4) для оценок привлекается неравенство (4.6), в случае 4) — условие $\beta \leq \mu / 14, 4$, где μ — наименьший угол между лучами (1.6). Суммируя оценки I^j по всем участкам $[t^{j-1}, t^j]$, $j = 1, \dots, n+1$, приходим к искомому неравенству (2.5).

При обсуждении работы ряд замечаний высказали В. М. Алексеев, В. И. Гурман, В. А. Егоров, В. Б. Колмановский, которым авторы благодарны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee E. B. Discussion of satellite attitude control. — ARS Journal, 1962, v. 32, No. 6, p. 981—982.
2. Смольников Б. А. Оптимальные режимы торможения вращательного движения симметричного тела. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 725—734.
3. Иослович И. В. Наискорейшее торможение вращения аксиально-симметричного спутника. — Космич. исследования, 1964, т. 2, вып. 4, с. 567—569.
4. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
5. Буякас В. И. Особые решения II рода в одной задаче оптимального управления. — Автоматика и телемеханика, 1977, № 11, с. 18—21.

Москва

Поступила в редакцию
27.IV.1983