Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 531.381

НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Богоявленский О. И.

Доказывается, что уравнения вращения твердого тела, закрепленного в центре масс, в ньютоновском поле произвольного достаточно далекого объекта являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю. Указывается интегрируемый случай вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле, обобщающий случай Ковалевской.

1. Интегрируемость по Лиувиллю вращения произвольного твердого тела, закрепленного в центре масс, в ньютоновском поле произвольного далекого объекта. Исследование вращения произвольного твердого тела T, закрепленного в центре масс O, в ньютоновском поле произвольного достаточно далекого объекта V сводится к изучению вращения тела T в ньютоновском поле с произвольным однородным квадратичным потенциалом [1, 2]. До настоящего времени в рассматриваемой задаче был известен единственный интегрируемый случай, в котором гравитационное поле объекта V обладает осевой симметрией (ось проходит через точку O), при этом квадратичный потенциал φ эквивалентен потенциалу $\varphi = a\,(x^1)^2$ (задача Бруна [3], см. [1, 2, 4]) и уравнения, описывающие вращение твердого тела T, сводятся к интегрируемому случаю Клебша для уравнений Кирхгофа. Ниже показано, что рассматриваемая задача в самом общем случае является вполне интегрируемой по Лиувиллю.

Уравнения вращения тела T вокруг неподвижной точки O рассматриваются в системе отсчета S, жестко связанной с твердым телом. Пусть $\varphi\,(x^1, x^2, x^3)$ — ньютоновский потенциал в неподвижной системе отсчета F, центр которой находится в точке O; $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ — три орта неподвижной системы координат, отнесенные к системе отсчета S. Определим потенциальную функцию

$$U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \int\limits_T \rho(\mathbf{r})\, \varphi((\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}), (\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}))\, dr^1\, dr^2\, dr^3 \tag{1.1}$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — плотность тела T в точке $\mathbf{r}$. Уравнения вращения тела T в ньютоновском поле с потенциалом $\varphi\,(x^1, x^2, x^3)$ в системе отсчета S имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{M}^{\cdot} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + (\partial U / \partial \boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\alpha} + (\partial U / \partial \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta} + (\partial U / \partial \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \boldsymbol{\alpha}^{\cdot} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\beta}^{\cdot} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\omega}$ — векторы кинетического момента и угловой скорости, координаты которых связаны соотношениями

$$M_i = \sum_{k=1}^{3} I_{ik}\omega_k, \qquad I_{ik} = \int\limits_T \rho(\mathbf{r}) \left(\delta_{ik} \sum_{l=1}^{3} (r^l)^2 - r^i r^k\right) dr^1\, dr^2\, dr^3 \tag{1.3}$$

I_{ik} — компоненты тензора инерции тела T в системе S.

Теорема 1. Уравнения вращения произвольного твердого тела вокруг неподвижной точки O в ньютоновском поле с произвольным квадратичным потенциалом

$$(1.4)\qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x^i x^j$$

являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю.

Отметим, что ньютоновские поля с потенциалом вида (1.4), удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta\varphi(x^1, x^2, x^3) = 0$, выделяются условием $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

Выберем орты неподвижной системы отсчета F совпадающими с главными осями квадратичной формы (1.4); после такого преобразования имеем $2\varphi(x) = a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 + a_3(x^3)^2$. Орты системы отсчета S выберем совпадающими с главными осями тензора инерции (1.3), т. е. $I_{ik} = I_i\delta_{ik}$. Потенциальная функция U (1.1) при этом принимает вид

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} 2U &= U_0 - a_1(I_1\alpha_1^2 + I_2\alpha_2^2 + I_3\alpha_3^2) - a_2(I_1\beta_1^2 + I_2\beta_2^2 + \\ &+ I_3\beta_3^2) - a_3(I_1\gamma_1^2 + I_2\gamma_2^2 + I_3\gamma_3^2) \\ U_0 &= (a_1 + a_2 + a_3)(I_1 + I_2 + I_3)/2 \end{aligned}$$

Воспользуемся известным изоморфизмом векторов с компонентами v^i в R^3 и кососимметрических (3×3)-матриц с компонентами V_{jk}:

$$(1.6)\qquad v^i \to V_{jk} = -\sum_{i=1}^{3} v^i \varepsilon_{ijk}$$

при котором векторное произведение $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ переходит в коммутатор матриц $[X, Y] = XY - YX$. После этого изоморфизма векторам $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\omega}$ отвечают матрицы $\alpha, \beta, \gamma, M, \omega$ и уравнения (1.2) принимают вид

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} M^{\cdot} &= [M, \omega] + a_1[\alpha, C\alpha + \alpha C] + a_2[\beta, C\beta + \beta C] + \\ &+ a_3[\gamma, C\gamma + \gamma C] \\ \alpha^{\cdot} &= [\alpha, \omega], \quad \beta^{\cdot} = [\beta, \omega], \quad \gamma^{\cdot} = [\gamma, \omega] \end{aligned}$$

где матрица C имеет компоненты $C_{ij} = (2^{-1}(I_1 + I_2 + I_3) - I_i)\delta_{ij}$; $M_{ij} = I_k\omega_{ij}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$. В силу уравнений (1.7) имеем

$$(\alpha^2)^{\cdot} = [\alpha^2, \omega], \quad (\beta^2)^{\cdot} = [\beta^2, \omega], \quad (\gamma^2)^{\cdot} = [\gamma^2, \omega]$$

Введем матрицу $u = a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_3\gamma^2$ и воспользуемся очевидным тождеством $[x, Cx + xC] = [x^2, C]$; из уравнений (1.7) получаем следствие

$$(1.8)\qquad M^{\cdot} = [M, \omega] + [u, C], \quad u^{\cdot} = [u, \omega]$$

Матрицы M и ω кососимметрические, матрицы u и C симметрические. Другой вывод уравнений (1.8) в более общем случае указан в п. 2.

Уравнения (1.8) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли L_9', элементы которой l представляются в виде $l = M + u$, где M, u — трехмерные матрицы, $M^t = -M$, $u^t = u$ коммутаторы определены условиями

$$(1.9)\qquad [M, u] = Mu - uM, \; [M_1, M_2] = M_1M_2 - M_2M_1, \; [u_1, u_2] = 0$$

Орбиты X действия соответствующей группы Ли G_9' в $L_9'^*$ являются симплектическими многообразиями $V^6 = R^3 \times SO(3) = T(SO(3))$ — касательный пучок к группе Ли $SO(3)$. Многообразия V^6 определяются условиями $\lambda_j(u) = \text{const}$, где $\lambda_j(u)$ — собственные числа матрицы u если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то орбита $X = V^5 = R^3 \times S^2$, и $X = R^3$, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Скобки Пуассона функций на $L_9'^*$ определяются по формулам

$$(1.10) \qquad \{f, g\} = \sum_{i,j,k} C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

где C_{ij}^{k} — структурные константы алгебры Ли L_9' в базисе x_i. Скобки Пуассона (1.10) на подмногообразиях V^6 невырожденны.

Уравнения (1.8) имеют гамильтонов вид

$$(1.11) \qquad M_{ij}^{\cdot} = \{M_{ij}, H\}, \quad u_{ij}^{\cdot} = \{u_{ij}, H\}$$

где гамильтониан $H = J_1 = \mathrm{Tr}\,(2^{-1}M\cdot\omega + u\cdot C)$.

Введем матрицу B с компонентами $B_{ij} = I_1 I_2 I_3 I_i^{-1}\delta_{ij}$. Система (1.8) имеет два дополнительных первых интеграла

$$(1.12) \qquad J_2 = \mathrm{Tr}\,(2^{-1}M^2 + Bu), \quad J_3 = \mathrm{Tr}\,(M^2u + Bu^2)$$

Интегралы J_1, J_2, J_3, очевидно, функционально независимы. В силу (1.11) имеем $J_2^{\cdot} = \{J_2, J_1\} = 0$, $J_3^{\cdot} = \{J_3, J_1\} = 0$. Прямое вычисление показывает, что скобка Пуассона $\{J_2, J_3\} = 0$, т. е. три интеграла J_1, J_2, J_3 находятся в инволюции. Поэтому гамильтонова система (1.8) — (1.11) на шестимерных симплектических подмногообразиях V^6 вполне интегрируема по Лиувиллю. Следовательно, траектории системы (1.8) — (1.11) являются квазипериодическими обмотками трехмерных торов T^3 в пространстве $L_9'^*$, определенных условиями $J_i = c_i$, $\lambda_j(u) = k_j$.

Уравнения (1.8) допускают эквивалентное представление в виде матричного уравнения Лакса, зависящего от произвольного спектрального параметра E:

$$(1.13) \qquad L^{\cdot} = [L, Q], \quad L = BE^2 + ME + u, \quad Q = \omega - EI$$

Интегралы (1.12) являются коэффициентами при E^2 в разложении функций $\mathrm{Tr}\,(L^2(E))$ и $\mathrm{Tr}\,(L^3(E))$ (которые в силу (1.13) не зависят от t) по степеням параметра E. Вследствие существования представления (1.13) уравнения Эйлера (1.8) интегрируются явно в тэта-функциях римановых поверхностей, заданных уравнением $R(E, w) = \det\,(L(E) - w\cdot 1) = 0$. Уравнения Лакса со спектральным параметром изучались (в связи с другими задачами) в работах [5, 6].

Отметим, что в интегрируемом случае Клебша [1, 2, 4], описывающем решение задачи Бруна [3] ($\varphi = a\,(x^1)^2$), динамика траекторий — квазипериодическая на двумерных торах T^2. В малоизвестных работах Бруна [7, 8] указаны два дополнительных интеграла уравнений вращения твердого тела в поле с общим квадратичным потенциалом вида (1.4); в работе Горячева [9] два дополнительных интеграла найдены в случае потенциала $\varphi(x) = a\,((x^1)^2 - (x^2)^2)$. В названных работах гамильтонова структура уравнений Эйлера (1.2) и вопрос об их интегрируемости по Лиувиллю не рассматривались. В исследуемой задаче совместный уровень всех шести первых интегралов $J_i = c_i$, $\lambda_j(u) = k_j$ является трехмерным многообразием, как и в самом общем случае уравнений Эйлера — Пуассона. Поэтому в отличие от интегрируемых случаев уравнений Эйлера — Пуассона здесь метод последнего множителя Якоби неприменим.

Первое доказательство теоремы 1, отличное от приведенного выше, дано ранее, [10]. В данной работе, кроме доказательства интегрируемости по Лиувиллю, основанного на исследовании гамильтоновой структуры уравнений (1.8), получено также доказательство интегрируемости этих уравнений в тэта-функциях Римана, что является следствием представления системы (1.8) в виде (1.13). Явные формулы, выражающие угловые скорости твердого тела $\omega^i(t)$ через тэта-функции Римана, выведены в [11].

Общие уравнения (1.2), описывающие вращение твердого тела в ньютоновском поле вокруг неподвижной точки, являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве L_{12}^* к алгебре Ли L_{12}, коммутаторы которой в базисе X_i, Y_j^α (i, j, k, α, β = 1, 2, 3) имеют вид

$$(1.14)\qquad [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_k, \quad [X_i, Y_j^\alpha] = \varepsilon_{ijk}Y_k^\alpha, \ [Y_i^\alpha, Y_j^\alpha] = 0$$

Уравнения (1.2) имеют интеграл энергии $J_1 = 2^{-1}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ и шесть геометрических интегралов $J_2, \ldots, J_7$, определяющих постоянные попарные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Совместный уровень интегралов $J_2, \ldots, J_7$ является подмногообразием $V_1^6 = T$ (SO (3)). Уравнения (1.2) на V_1^6 гамильтоновы с гамильтонианом J_1 в симплектической структуре, определенной в силу (1.10) — (1.14). Уравнения (1.2) служат первым примером физически важных уравнений Эйлера на алгебрах Ли, где нелинейность потенциальной функции U в гамильтониане J_1 может быть сколь угодно сложной.

2. Интегрируемые случаи вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в силовом поле с неквадратичным потенциалом. Рассмотрим вращение твердого тела T вокруг неподвижной точки в силовом поле с потенциалом вида

$$(2.1)\qquad \varphi = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}(|x|)\,x^\alpha x^\beta, \qquad |x| = ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}$$

где $a_{\alpha\beta}(|x|)$ — произвольные дифференцируемые функции переменной $|x|$. Ньютоновские потенциалы вида (2.1), удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, определяются формулами

$$\varphi = \Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} c_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\Big)|x|^{-5} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} b_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + c\,|\mathbf{x}|^{-1}$$

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = 0, \quad b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$$

Введем следующий четырехкомпонентный тензор, симметричный по двум парам индексов α, β и i, k и обобщающий тензор инерции I_{ik} (1.3)

$$(2.2)\qquad T_{\alpha\beta ik} = \int_T \rho(\mathbf{r})\,a_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}|)\Big(\delta_{ik}\sum_{l=1}^{3}(r^l)^2 - r^i r^k\Big)\,dr^1\,dr^2\,dr^3$$

Теорема 2. Если тензор $T_{\alpha\beta ik}$ допускает представление

$$(2.3)\qquad T_{\alpha\beta ik} = A_{\alpha\beta}I_{ik} + B_{\alpha\beta}\delta_{ik} + \delta_{\alpha\beta}C_{ik}$$

где A, B, C — произвольные симметрические матрицы, то уравнения вращения тела T в поле с потенциалом (2.1) вокруг неподвижной точки O ($x^i = 0$) являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю.

Если $a_{\alpha\beta}(|x|) = \mathrm{const}$, то условия (2.3), очевидно, выполнены, поэтому теорема 2 обобщает теорему 1. Если тело T — шар, плотность которого

$$(2.4)\qquad \rho(\mathbf{r}) = \rho_1(\mathbf{r}/|\mathbf{r}|)\rho_2(|\mathbf{r}|)$$

то условия (2.3) выполнены при произвольных функциях $a_{\alpha\beta}(|\mathbf{x}|)$ (при этом $B_{\alpha\beta} = C_{ik} = 0$), поэтому уравнения вращения такого твердого тела в поле с произвольным потенциалом вида (2.1) являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю.

Пусть ортогональная матрица $Q(t)$ определяет преобразование из лагранжевых координат r^k, связанных с системой отсчета S, в эйлеровы координаты x^i: $x^i = Q_k^i(t)r^k$ (всюду по повторяющимся индексам проводится суммирование). По определению, $Q^\cdot = Q\omega$, где ω — матрица угловой скорости.

В системе S потенциал (2.1) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, n, l} a_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}|) Q_n{}^\alpha Q_l{}^\beta r^n r^l$$

Компоненты момента сил, действующего на тело T в поле с потенциалом φ (2.2), определяются формулами

$$(2.5) \qquad K_i = \int_T \left(\mathbf{r} \times \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}\right)_i dr^1 dr^2 dr^3 = \int_T \varepsilon_{imn} r^m \rho a_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}|) Q_n{}^\alpha Q_l{}^\beta r^l dr^1 dr^2 dr^3$$

Кососимметрическая матрица K, соответствующая в силу изоморфизма (1.6) вектору момента сил (2.5), имеет компоненты

$$(2.6) \qquad K_{jk} = -\varepsilon_{ijk} K_i = T_{\alpha\beta jl} Q_k{}^\alpha Q_l{}^\beta - T_{\alpha\beta kl} Q_j{}^\alpha Q_l{}^\beta$$

После подстановки выражения (2.3) в формулы (2.6) получаем

$$(2.7) \qquad K_{jk} = I_{jl} A_{\alpha\beta} Q_k{}^\alpha Q_l{}^\beta - I_{kl} A_{\alpha\beta} Q_i{}^\alpha Q_l{}^\beta$$

Введем матрицу $u = Q^t A Q$. Равенство (2.7) в матричном виде означает $K = Iu - uI = -[u, I]$. Поэтому уравнения, определяющие изменение матрицы кинетического момента и матрицы u (в силу $Q^{\cdot} = Q\omega$), имеют вид

$$(2.8) \qquad M^{\cdot} = [M, \omega] - [u, I], \quad u^{\cdot} = [u, \omega]$$

Уравнения (2.8) полностью определяют вращение твердого тела в поле с потенциалом (2.1) при выполнении условий (2.3). Эти уравнения, очевидно, совпадают с уравнениями (1.8) и поэтому являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю.

3. Интегрируемый случай вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле. Рассмотрим вращение вокруг неподвижной точки O твердого тела T, имеющего постоянный магнитный момент $\mathbf{m}$, в однородном гравитационном и магнитном поле. Предположим, что тензор инерции тела во вращающейся системе отсчета S диагонален с компонентами I_1, I_2, I_3. Направления векторов напряженности однородного гравитационного и магнитного поля определяются векторами $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\delta}$ единичной длины; вектор $\mathbf{r}$ определяет положение центра масс (в системе S), m — масса твердого тела, g и h —напряженности гравитационного и магнитного полей; $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — векторы кинетического момента и угловой скорости, $M_k = I_k \omega_k$. Уравнения движения в системе S имеют вид

$$(3.1) \qquad \mathbf{M}^{\cdot} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma} + h\mathbf{m} \times \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\delta}^{\cdot} = \boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{\omega}$$

Такой же вид имеют уравнения вращения вокруг неподвижной точки заряженного твердого тела с полным зарядом σ в постоянном гравитационном и электрическом поле. При этом в уравнениях (3.1) h заменяется на E (напряженность электрического поля), вектор $\mathbf{m}$ — на вектор дипольного момента

$$\mathbf{d} = \int_T \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{r}\, dr^1 dr^2 dr^3$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ — плотность электрического заряда.

Уравнения (3.1) имеют следующие первые интегралы:

$$(3.2) \qquad J_1 = 2^{-1}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) - h(\mathbf{m}, \boldsymbol{\delta}), \quad J_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$$
$$J_3 = (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta}), \quad J_4 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})$$

Интеграл J_1 совпадает с полной энергией твердого тела. Многообразие V^6, определенное условиями $J_2 = c_2$, $J_3 = c_3$, $J_4 = c_4$, в общем случае гомеоморфно произведению $V^6 = R^3 \times SO(3) = T\,(SO\,(3))$.

Уравнения (3.2) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве $L_9{}^*$ к алгебре Ли L_9, коммутаторы которой в базисе X_i, $Y_j{}^\alpha$ имеют вид (1.14), где $\alpha, \beta = 1, 2$. Трехмерные векторы $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ принадлежат подпространствам $X_i{}^*$, $Y_i{}^{1*}$, $Y_i{}^{2*}$ соответственно.

Скобки Пуассона функций на пространстве L_9^* определяются по формулам (1.10). Для базисных функций M_i, γ_j, δ_k получаем

$$(3.3)\qquad \{M_i,\ M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k,\quad \{M_i,\ \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k,\quad \{M_i,\ \delta_j\} = \varepsilon_{ijk}\delta_k$$
$$\{\gamma_i,\ \gamma_j\} = \{\delta_i,\ \delta_j\} = \{\gamma_i,\ \delta_j\} = 0$$

В силу (1.10) скобки Пуассона произвольных многочленов от M_i, γ_j, δ_k вычисляются по правилу Лейбница с использованием (3.3). Функции J_2, J_3, J_4 (3.2) являются аннуляторами скобок Пуассона (3.3); многообразия их уровней V^6 имеют невырожденную симплектическую структуру (эти построения аналогичны проведенным в работе [12] для уравнений Кирхгофа). Уравнения (3.1) имеют гамильтонов вид

$$(3.4)\qquad M_i^{\boldsymbol\cdot} = \{M_i,\ H\},\quad \gamma_j^{\boldsymbol\cdot} = \{\gamma_j,\ H\},\quad \delta_k^{\boldsymbol\cdot} = \{\delta_k,\ H\}$$

где гамильтониан $H = J_1$.

Теорема 3. Уравнения (3.1) при условиях

$$(3.5)\qquad mg\mathbf{r} = (R,\ 0,\ 0),\quad h\mathbf{m} = (0,\ Q,\ 0),\quad I_1 = I_2 = 2I_3$$

имеют первый интеграл

$$(3.6)\qquad J_5 = z_1^2 + z_2^2$$
$$z_1 = M_1^2 - M_2^2 + 4I_3R\gamma_1 - 4I_3Q\delta_2,\quad z_2 = 2M_1M_2 + {}$$
$${} + 4I_3R\gamma_2 + 4I_3Q\delta_1$$

На многообразии $J_5 = 0$ ($z_1 = 0$, $z_2 = 0$) уравнения (3.1) имеют дополнительный интеграл $J_6 = \{z_1,\ z_2\}$ и являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю.

Непосредственно проверяется, что из уравнений (3.1) следуют уравнения

$$(3.7)\qquad z_1^{\boldsymbol\cdot} = \{z_1,\ H\} = I_3^{-1}M_3z_2,\quad z_2^{\boldsymbol\cdot} = \{z_2,\ H\} = -I_3^{-1}M_3z_1$$

приводящие к существованию интеграла J_5. Уравнения (3.7) эквивалентны одному уравнению $z^{\boldsymbol\cdot} = -iI_3^{-1}M_3z$, где $z = z_1 + iz_2$, при этом $J_5 = |\,z\,|^2$.

Многообразие уровня $J_5 = 0$ ($z_1 = 0$, $z_2 = 0$) в пересечении с подмногообразиями V^6 определяет четырехмерные симплектические подмногообразия V^4 (индуцированная симплектическая структура невырожденна). На подмногообразиях V^4 система (3.1) — (3.4) имеет дополнительный первый интеграл

$$(3.8)\qquad J_6 = \{z_1,\ z_2\} = 4M_3\,(M_1^2 + M_2^2 + 4I_3RM_1\gamma_3 + {}$$
$${} + 4I_3QM_2\delta_3)$$

Действительно, в силу тождества Якоби и уравнений (3.7) получаем

$$J_6^{\boldsymbol\cdot} = \{\{z_1,\ z_2\},\ H\} = -\ \{\{z_2,\ H\},\ z_1\} + \{\{z_1,\ H\},\ z_2\} =$$
$$= I_3^{-1}z_1\{M_3,\ z_1\} + I_3^{-1}z_2\{M_3,\ z_2\} = I_3^{-1}(2z_1M_1M_2 -$$
$$- z_2\,(M_1^2 - M_2^2))$$

Следовательно, на подмногообразиях V^4 ($z_1 = z_2 = 0$, $J_2 = c_2$, $J_3 = c_3$, $J_4 = c_4$) имеем $J_6^{\boldsymbol\cdot} = 0$. Таким образом, гамильтонова система (3.1)—

— (3.4) на инвариантных подмногообразиях V^4 имеет дополнительный интеграл J_6 и поэтому вполне интегрируема по Лиувиллю. При отсутствии магнитного поля ($Q = 0$) интегрируемый случай (3.5) уравнений (3.1) переходит в классический случай Ковалевской.

В найденном интегрируемом случае потенциальная функция $U = R\gamma_1 + Q\delta_2$ (см. (1.2)) существенно зависит от трех углов Эйлера φ, ψ, θ. Интегрируемые случаи, в которых функция U зависит только от двух углов Эйлера φ, θ, исследовались в работах [13, 14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. Ofversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Forhadlingar. Stokholm, 1893, № 7, s. 455—468.
4. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
5. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела.— Функцион. анализ и его прил., 1976, т. 10, № 4, с. 93—94.
6. *Переломов А. М.* Несколько замечаний об интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости.— Функцион. анализ и его прил., 1981, т. 15, № 2, с. 83—85.
7. *Brun F.* Rotation kring fix punkt II, III.— Arkiv for matematik, astronomi och fysik, 1907, Bd. 4, № 5, s. 1—4; 1909, Bd. 6, № 5, s. 1—10.
8. *Brun F.* Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.— Arkiv for matematik. Astronomi och fysik, 1909, Bd 6, № 9, s. 1—17.
9. *Горячев Д. Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава: Типография Варшавского учебного округа, 1910. 62 с.
10. *Богоявленский О. И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле.— Докл. АН СССР, 1984, т. 275, № 6, с. 1359—1363.
11. *Богоявленский О. И.* Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, т. 48, № 5, с. 883—938.
12. *Новиков С. П.* Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II.— Функцион. анализ и его прил., 1981, т. 15, № 4, с. 37—52.
13. *Горячев Д. Н.* Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки.— Изв. Варшавск. ун-та, 1915, № 3, с. 1—11.
14. *Горячев Д. Н.* Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера.— Изв. Варшавск. ун-та, 1916, № 3, с. 1—15.

Москва

Поступила в редакцию
26.XII.1983