Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 531.35

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ШАРА В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Вильке В. Г., Копылов С. А., Марков Ю. Г.

Рассматривается движение вязкоупругого шара (планеты), центр масс которого движется по круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил. Методом разделения движений и усреднения получены приближенные уравнения, описывающие вращательное движение шара в канонических переменных Андуайе, и исследована эволюция этого движения.

Ранее [1] были получены приближенные уравнения, описывающие поступательно-вращательное движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил, найдены стационарные движения и исследована их устойчивость. Изучались [2—4] модели приливных явлений, вызывающих эволюцию вращательного движения планет. Полученное в [1] уравнение изменения момента количества движения вязкоупругого шара соответствует модели приливных явлений, когда «приливной горб» повернут относительно линии притягивающий центр — центр масс планеты на угол, пропорциональный угловой скорости вращения планеты в орбитальных осях [4]. Кроме того, в этом уравнении содержится момент за счет деформации планеты при действии центробежных сил инерции, вызывающий регулярную прецессию планеты.

Пусть однородный изотропный упругий шар занимает в инерциальной системе координат $O\,\xi_1\xi_2\xi_3$ область Ω в естественном недеформированном состоянии, а движение шара задается однопараметрической группой

$$g^t\colon\ \Omega \to E^3,\quad \xi = \xi(\mathbf{r}, t),\quad \mathbf{r} \in \Omega,\quad t \in R^1$$

Следуя [1], представим векторное поле $\xi(\mathbf{r}, t)$ в виде (здесь и далее, если не оговорено противное, интегралы берутся по области Ω)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(t) + O(t)\,(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \tag{1}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \xi\rho\,dx,\qquad \int \mathbf{u}\rho\,dx = \int \operatorname{rot}\mathbf{u}\,dx = 0$$

$$M = \int \rho\,dx,\quad \rho = \mathrm{const}$$

где ρ — плотность шара. Условия (1) однозначно определяют радиус вектор центра масс шара $\mathbf{R}(t)$, систему координат $Cx_1x_2x_3$, относительно которой шар в интегральном смысле не вращается. Оператор $O(t)$ принадлежит группе вращений трехмерного пространства и определяет переход от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе координат Кенига $C\,\xi_1\xi_2\xi_3$. Будем предполагать, что величины $\partial u_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ малы $(|\partial u_i/\partial x_j| \ll 1)$ и деформированное состояние шара описывается классической теорией упругости малых деформаций; в частности, функционал потенциальной энергии упругих деформаций имеет вид [2, 5]

$$E[\mathbf{u}] = \int a'(\Sigma_1^2 - a_1'\Sigma_2^2)\,dx,\quad a' > 0,\quad 0 < a_1' < 3 \tag{2}$$

$$a' = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad a_1' = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}$$

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i},\qquad \Sigma_2 = \sum_{i<j}^{3}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\right]$$

Здесь E, ν — модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Потенциал гравитационных сил и сил инерции переносного движения (поступательного движения системы координат $C\ \xi_1\xi_2\xi_3$) определим функционалом

$$\Pi_1 = -\int \mu\rho\ \{[(\mathbf{R} + O\,(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2]^{-1/2} + R^{-3}\mathbf{R}O\mathbf{u}\}\,dx \tag{3}$$

где μ — гравитационная постоянная. Гравитационное взаимодействие частиц тела описывается функционалом потенциальной энергии

$$\Pi_2 = \int g\,\frac{\mathbf{r}}{r_0}\,\mathbf{u}\,dx$$

(g — ускорение силы тяжести на поверхности шара, а r_0 — радиус шара) и вызывает сферически-симметричную деформацию шара [5]. В дальнейшем будет показано, что эти деформации не приводят к эволюции вращательного движения шара.

Рассмотрим такую постановку задачи, когда центр масс C шара описывает относительно притягивающего центра O кеплеровскую круговую орбиту радиуса R. Тогда

$$\mathbf{R} = R\mathbf{R}^0,\ \mathbf{R}^0 = \cos\vartheta\ \xi_1 + \sin\vartheta\xi_2,\ \vartheta = \sqrt{\mu/R^3}t$$

Конфигурационным многообразием системы служит

$$W = SO\,(3) \times V_0$$
$$V_0 = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in (W_2^1\,(\Omega))^3,\ \int \mathbf{u}dx = \int \operatorname{rot}\mathbf{u}\,dx = 0\}$$

Функционал кинетической энергии в движении относительно системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$

$$T = \frac{1}{2}\int [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \mathbf{u}^{\cdot}]^2\,\rho\,dx$$

Введем на касательном расслоении группы вращений SO (3) канонические переменные Андуайе I_i, φ_i ($i = 1, 2, 3$) [6] и получим функционал Рауса в виде

$$R_*\,[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{u}] = \frac{1}{2}\,(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}\,[\mathbf{u}]\,(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) - \tag{4}$$
$$- \frac{1}{2}\int \mathbf{u}^{\cdot 2}\rho\,dx + E\,[\mathbf{u}] + \Pi_1 + \Pi_2$$
$$\mathbf{G} = \nabla_\omega T = \int (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \mathbf{u}^{\cdot}]\,\rho\,dx$$
$$\mathbf{G}_u = \int (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{u}^{\cdot}\rho\,dx$$

Здесь $J^{-1}\,[\mathbf{u}]$ — оператор инерции в системе координат $Cx_1x_2x_3$, а матрица $O\,(t)$ в Π_1 и вектор момента количеств движения $\mathbf{G}$ выражены через переменные Андуайе [7]

$$\mathbf{G} = (\sqrt{I_2^2 - I_1^2}\sin\varphi_1,\ \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_1,\ I_1) \tag{5}$$
$$O\,(t) = \Gamma_3\,(\varphi_3)\,\Gamma_1\,(\delta_1)\,\Gamma_3\,(\varphi_2)\,\Gamma_1\,(\delta_2)\,\Gamma_3\,(\varphi_1)$$
$$\Gamma_3\,(\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \Gamma_1\,(\alpha) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$$

Рассматриваемая задача содержит «большой» параметр — характеристику жесткости упругого шара (модуль Юнга E — предполагается большим, а, соответственно, деформации шара — малыми). В пределе при бесконечно большой жесткости деформации шара будут равны нулю

($\cdot \equiv 0$) и функционал Рауса невозмущенной задачи примет вид

$$R_0 = I_2^2/(2A)$$

где A — момент инерции недеформированного шара относительно диаметра.

Невозмущенное движение шара есть равномерное вращение вокруг одного из диаметров с угловой скоростью $\varphi_2^{\cdot} = I_2 A^{-1}$. В случае конечной жесткости уравнения Рауса записываются в виде

$$\text{(6)} \qquad I_i^{\cdot} = -\nabla_{\varphi_i} R_*, \ \varphi_i^{\cdot} = \nabla_{I_i} R_* \ (i = 1, 2, 3)$$

$$\int \left[\left(\frac{d}{dt} \nabla_{u^{\cdot}} R_* - \nabla_u R_* - \nabla_{u^{\cdot}} D + \lambda_1 \right) \delta \mathbf{u} + \lambda_2 \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} \right] dx = 0$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \in V, \ V = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3\}$$

Второе уравнение (6) записано в виде вариационного принципа Даламбера — Лагранжа и содержит два неопределенных множителя λ_1 и λ_2. Градиент диссипативного функционала $\nabla_{u^{\cdot}} D$ определяет вязкие диссипативные силы. Будем предполагать, что диссипативный функционал $D[\mathbf{u}^{\cdot}]$ пропорционален функционалу потенциальной энергии упругих деформаций, если в последнем компоненты тензора малых деформаций заменить на соответствующие компоненты тензора скоростей деформаций, т. е. $D[\mathbf{u}^{\cdot}] = \chi E[\mathbf{u}^{\cdot}]$ [1].

Второе уравнение (6) с учетом (4) запишем в следующем виде:

$$\text{(7)} \qquad \int \Big\{ \frac{d}{dt} [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times J^{-1}[\mathbf{u}] (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)] \rho - \rho \mathbf{u}^{\cdot\cdot} -$$

$$- \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, \nabla_u J^{-1}[\mathbf{u}] (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) - [\mathbf{u}^{\cdot} \times J^{-1}[\mathbf{u}] (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)] \rho -$$

$$- \nabla E[\mathbf{u}] - \chi \nabla_{u^{\cdot}} E[\mathbf{u}^{\cdot}] + \mu \rho [(\mathbf{R} + O(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2]^{-3/2} O^{-1} (\mathbf{R} +$$

$$+ O(\mathbf{r} + \mathbf{u})) - \mu \rho R^{-3} O^{-1} \mathbf{R} + g r_0^{-1} \mathbf{r} + \lambda_1 \Big\} \delta \mathbf{u} \, dx +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (\lambda_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} \, d\sigma = 0$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$$

В уравнении (7) последний интеграл преобразован по формуле Остроградского — Гаусса, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности шара. Решение уравнения (7) будем искать в виде ряда по малому параметру $\varepsilon = E^{-1}$

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \ldots$$

Поскольку в дальнейшем предполагается использовать метод разделения движений и метод усреднения [8], то достаточно определить функцию $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\text{(9)} \qquad \int \Big\{ \rho \mathbf{r} \times J^{-1}[0] \mathbf{G}^{\cdot} - \frac{1}{2} (\mathbf{G}, J^{-1}[0] \nabla_u J_1[\mathbf{u}] J^{-1}[0] \mathbf{G}) -$$

$$- \varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_1] - \varepsilon \chi \nabla E[\mathbf{u}_1^{\cdot}] + \mu \rho R^{-3} \mathbf{r} -$$

$$- 3 \mu \rho R^{-3} (\mathbf{R}^\circ, O\mathbf{r}) O^{-1} \mathbf{R}^\circ + \lambda_1 \Big\} \delta \mathbf{u} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\lambda_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} \, d\sigma = 0$$

При выводе уравнения (9) было использовано равенство

$$J^{-1}[\mathbf{u}] = (J[0] + J_1[\mathbf{u}] + J_2[\mathbf{u}])^{-1} =$$

$$= J^{-1}[0] - J^{-1}[0] J_1[\mathbf{u}] J^{-1}[0] + \ldots$$

где

$$J^{-1}[0] = A^{-1} \operatorname{diag} \{1,1,1\}, \quad J_1[\mathbf{u}] = dJ[\lambda \mathbf{u}]/d\lambda |_{\lambda=0}$$

— линейная по $\mathbf{u}$ компонента оператора инерции деформированного шара. Заметим, что $\nabla_u J_1 [\mathbf{u}]$ не зависит от $\mathbf{u}$.

Также справедливы равенства

$$(\mathrm{G},\ J_1 [\mathbf{u}]\,\mathrm{G}) = 2\ [\mathbf{r} \times \mathrm{G}]\,[\mathbf{u} \times \mathrm{G}]\,\rho dx$$

$$(\mathrm{G},\ \nabla_u J_1 [\mathbf{u}]\,\mathrm{G}) = -2\rho \mathrm{G} \times [\mathrm{G} \times \mathbf{r}]$$

Если в вариационном уравнении (9) положить $\delta\mathbf{u} = \mathbf{a} \in E^3$ или $\delta\mathbf{u} = \delta\alpha \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})$, $\delta\alpha \in E^3$ (возможные перемещения соответствуют группе вращений — перемещений трехмерного пространства), то найдем $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ [1]. Заметим, что в невозмущенном движении $\mathrm{G}^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$, и перепишем уравнение (9) следующим образом [1,5]:

$$(10)\qquad -\varepsilon\nabla E\,[\mathbf{u}_1 + \chi\mathbf{u}_1^{\boldsymbol{\cdot}}] = A^{-2}\rho \mathrm{G} \times [\mathrm{G} \times \mathbf{r}] + a\mathbf{r} -$$

$$-3\mu\rho R^{-3} O^{-1}\mathbf{R}^{\circ} \times [O^{-1}\mathbf{R}^{\circ} \times \mathbf{r}], \qquad a = -2\mu\rho R^{-3} + g r_0^{-1}$$

$$-\varepsilon\nabla E\,[\mathbf{u}_1] = \left[\Delta\mathbf{u}_1 + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_1\right]\frac{1}{2(1+\nu)}$$

Уравнение (10) описывает квазистационарный процесс деформации вязкоупругого шара. Граничные условия для функции $\mathbf{u}_1$ формулируются в виде $\sigma\cdot\mathbf{n} = 0$ на $\partial\Omega$, где σ — тензор напряжений. Поскольку уравнение (10) линейно и первые два члена в правых частях не зависят от времени, то его решение можно представить в виде суммы трех функций: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{13}$, удовлетворяющих уравнениям

$$(11)\qquad -\varepsilon\,\nabla E\,[\mathbf{u}_{11}] = A^{-2}\rho \mathrm{G} \times [\mathrm{G} \times \mathbf{r}], \quad -\varepsilon\nabla E\,[\mathbf{u}_{12}] = a\mathbf{r}$$

$$-\varepsilon\nabla E\,[\mathbf{u}_{13} + \chi\mathbf{u}_{13}^{\boldsymbol{\cdot}}] = -3\mu\rho R^{-3}\,[O^{-1}\mathbf{R}^0 \times [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times \mathbf{r}]]$$

Согласно [1, 2] решения уравнений (11) имеют вид

$$(12)\qquad \mathbf{u}_{11}(r) = \rho I_2^2 A^{-2}\Gamma_3(-\varphi_1)\ \Gamma_1(-\delta_2)\,\mathbf{u}^*(\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)\,\mathbf{r})$$

$$\mathbf{u}_{12}(r) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)}\left[\mathbf{r}^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu}r_0^2\right]a\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\chi)^n\frac{\partial^n \mathbf{u}_{130}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^n}$$

$$\mathbf{u}_{130}(\mathbf{r},\ t) = -3\mu\rho R^{-3} O_1^{-1}(t)\,\mathbf{u}^*(O_1(t)\,\mathbf{r})$$

$$O_1(t) = \Gamma_0(\vartheta)\,O(t), \qquad \Gamma_0(\vartheta) = \begin{Vmatrix} -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{r}) = [(B_1\,\mathbf{r},\ \mathbf{r})\,B_2\mathbf{r} + (B_3\,\mathbf{r},\ \mathbf{r})\,B_4\mathbf{r} + B_5]\,\mathbf{r}$$

$$B_1 = \mathrm{diag}\,\{b_1,\ b_1,\ b_2\},\ B_2 = \mathrm{diag}\,\{1, 1, 0\},\ B_3 = \mathrm{diag}\,\{a_1, a_1, a_2\}$$

$$B_4 = \mathrm{diag}\,\{0,\ 0,\ 1\},\ B_5 = \mathrm{diag}\,\{c_1,\ c_1,\ c_2\}$$

$$b_1 = -(4 - 3\nu - 5\nu^2)\,\psi(\nu), \quad b_2 = -(9 - 8\nu - 5\nu^2)\,\psi(\nu)$$

$$a_1 = 2\ (3-\nu)\,\psi(\nu),\ a_2 = (1 + 3\nu)\,\psi(\nu)$$

$$\psi(\nu) = \frac{1+\nu}{5(1-\nu)(5\nu+7)}$$

$$c_1 = r_0^2\,\frac{12 - 8\nu - 12\nu^2}{35 - 10\nu - 25\nu^2}, \qquad c_2 = -r_0^2\,\frac{3 + 18\nu - 3\nu^2 - 10\nu^3}{35 - 10\nu - 25\nu^2}$$

Функция $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{r})$ описывает осесимметричную упругую деформацию шара (сжатие шара по оси вращения) под действием центробежных сил инерции, вызванных собственным вращением шара. Функции $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r})$ соответствует сферически-симметричная деформация шара, вызванная силами внутренней гравитации и внешним гравитационным полем.

Внешнее гравитационное поле определяет также нестационарную деформацию шара (гравитационные приливы), описываемую функцией $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$. В орбитальной системе координат $Cxyz$ (ось Cz совпадает с направлением на притягивающий центр, ось Cx — касательная к орбите, ось Cy ортогональна к плоскости орбиты) функция $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$, представленная двумя первыми членами ряда (12), имеет вид [2]

$$(13)\qquad \mathbf{u}_{13}'(\mathbf{r}', t) = -3\mu\rho R^{-3}\{\mathbf{u}^*(\mathbf{r}') + \chi[(B_1\mathbf{r}', \mathbf{r}')(SB_2 - B_2S) + (B_3, \mathbf{r}', \mathbf{r}')(SB_4 - B_4S) + r_0^2(SB_5 - B_5S)]\mathbf{r}' - 2\chi[(B_1 S\mathbf{r}', \mathbf{r}')B_2 + (B_3S\mathbf{r}', \mathbf{r}')B_4]\mathbf{r}', \quad S = O_1^{\cdot}O_1^{-1}$$

Здесь S — кососимметрическая матрица, характеризующая угловую скорость шара Ω^* относительно орбитальной системы координат $Cxyz$. Ряд в (12), определяющий $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$, сходится, если $\chi\,|\Omega^*| < 1$, а выражение (13) хорошо аппроксимирует $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$ при условии $\chi\,|\Omega^*| \ll 1$, что и предполагается в дальнейшем.

Подставим функцию $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ с учетом (12) и (13) в функционал Рауса и усредним правые части уравнений (6) по «быстрым» переменным φ_2 и ϑ [8]. Полученные в результате уравнения будут описывать эволюцию движения вязкоупругого шара в переменных Андуайе.

Заметим, что в функционале Рауса (4) от канонических переменных Андуайе зависят только два члена R_1 и Π_1, где

$$R_1 = {}^1/_2\,(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}[\mathbf{u}]\,(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u))$$

Представим эти члены с точностью до малых порядка ε и R^{-3} в виде

$$(14)\qquad \begin{aligned} &R_1 = R_0 - {}^1/_2\,\varepsilon A^{-2}(\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_1]\,\mathbf{G}) - \varepsilon A^{-1}(\mathbf{G}_u', \mathbf{G})\\ &\Pi_1 = D_1 - \mu\rho R^{-3}\varepsilon\int[3\,(O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{r})\,(O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{u}_1) - (\mathbf{r}, \mathbf{u}_1)]\,dx\\ &D_1 = -\mu M R^{-3}\\ &\mathbf{G}_u' = \int(\mathbf{r}\times\mathbf{u}_1^{\cdot})\,\rho dx, \quad (J_1[\mathbf{u}_1]\,\mathbf{G}, \mathbf{G}) \equiv 2\int[\mathbf{r}\times\mathbf{G}]\,[\mathbf{u}_1\times\mathbf{G}]\,\rho dx \end{aligned}$$

В системе координат $Cx_1x_2x_3$, связанной интегральным образом с шаром, вектор $\mathbf{G}$ в невозмущенном движении постоянен, а функция $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ зависит от времени через переменные $\varphi_2 = I_2A^{-1}t + \varphi_2(0)$, ϑ и 2π-периодична по ним.

Поскольку операция усреднения

$$\langle\cdot\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdot\,d\varphi_2\,d\vartheta$$

то

$$\left\langle \mathbf{G}_u'\cdot\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial p_k}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = \left\langle\int\mathbf{r}\times\left(\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\varphi_2}\varphi_2^{\cdot} + \frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\vartheta}\vartheta^{\cdot}\right)\rho\,dx\,\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial p_k}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = 0$$

Здесь p_k принимает значения $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Таким образом, член $-\varepsilon A^{-1}(\mathbf{G}_u', \mathbf{G})$ не дает вклада при усреднении в правые части уравнений (6).

Второй член в R_1 представляется в виде

$$-{}^1/_2\,\varepsilon A^{-2}[(\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_{11}]\,\mathbf{G}) + (\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_{12}]\,\mathbf{G}) + (\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_{13}]\,\mathbf{G})]$$

Так как $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r})$— сферически-симметричная функция, то

$$(\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_{12}]\,\mathbf{G}) = {}^1/_2\,f_1(\mathbf{u}_{12})\,I_2^2$$

что приводит к возмущению только быстрой переменной φ_2 в соответствующем уравнении (6). Член

$$(\mathbf{G},\ J_1\,[\mathbf{u}_{11}]\,\mathbf{G}) = (J_1\,[\rho I_2{}^2 A^{-2}\,\mathbf{u}^*\,(\mathbf{r}^*)]\,\Gamma_1\,(\delta_2)\,\Gamma_3\,(\varphi_1)\,\mathbf{G}$$
$$\Gamma_1\,(\delta_2)\,\Gamma_3\,(\varphi_1)\,\mathbf{G})$$

где второе скалярное произведение представлено в системе координат, одна из осей которой совпадает с вектором $\mathbf{G}$. Функция $\mathbf{u}^*\,(\mathbf{r}^*)$ симметрична в этой системе координат, и оператор J_1 имеет вид

$$J_1\,[\rho I_2{}^2 A^{-2}\mathbf{u}^*\,(\mathbf{r}^*)] = \mathrm{diag}\,\{m_1,\,m_1,\,m_1\} + \mathrm{diag}\,\{0,\ 0,\ m_2 - m_1\}$$

где m_1, m_2 — постоянные величины.

Тогда

$$(\mathbf{G},\ J_1\,[\mathbf{u}_{11}]\,\mathbf{G}) = m_1 I_2{}^2 + (\mathrm{diag}\,\{0, 0, m_2 - m_1\}\,\Gamma_1\,(\delta_2)\,\Gamma_3\,(\varphi_1)\,\mathbf{G},$$
$$\Gamma_1\,(\delta_2)\ \Gamma_3\ (\varphi_1)\,\mathbf{G}) = m_1 I_2{}^2 + (m_2 - m_1)\ (G_1 \sin\delta_2 \sin\varphi_1 +$$
$$+ G_2 \sin\delta_2 \cos\varphi_1 + G_3 \cos\delta_2)^2$$
$$G_1 = \sqrt{I_2{}^2 - I_1{}^2}\,\sin\varphi_1,\quad G_2 = \sqrt{I_2{}^2 - I_1{}^2}\,\cos\varphi_1,\quad G_3 = I_1$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(\mathbf{G}, J_1\,[\mathbf{u}_1]\,\mathbf{G}) = (m_2 - m_1)\,2\,(G_1 \sin\delta_2 \sin\varphi_1 +$$
$$+ G_2 \sin\delta_2 \cos\varphi_1 + G_3 \cos\delta_2)\,(\sqrt{I_2{}^2 - I_1{}^2}\cos\varphi_1 \sin\delta_2 \sin\varphi_1 -$$
$$- \sqrt{I_2{}^2 - I_1{}^2}\sin\varphi_1 \sin\delta_2 \cos\varphi_1) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi_2}(\mathbf{G}, J_1\,[\mathbf{u}_1]\,\mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial\varphi_3}(\mathbf{G}, J_1\,[u_1]\,\mathbf{G}) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial I_1}(\mathbf{G}, J_1\,[\mathbf{u}_1]\,\mathbf{G}) = 2\,(m_2 - m_1)\,(G_1 \sin\delta_2 \sin\delta_1 +$$
$$+ G_2 \sin\delta_2 \cos\varphi_1 + G_3 \cos\delta_2)\left(\frac{-I_1}{\sqrt{I_2{}^2 - I_1{}^2}}\sin\varphi_1 \sin\delta_2 \sin\varphi_1 -\right.$$
$$\left.- \frac{I_1}{\sqrt{I_2{}^2 - I_1{}^2}}\cos\varphi_1 \sin\delta_2 \cos\varphi_1 + \cos\delta_2\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial I_2}(\mathbf{G}, J_1\,[\mathbf{u}_1]\,\mathbf{G}) = 2m_1 I_2 + 2\,(m_2 - m_1)\,I_2 = 2m_2 I_2$$
$$\frac{\partial}{\partial I_3}(\mathbf{G}, J_1\,[\mathbf{u}_1]\,\mathbf{G}) = 0$$

Таким образом, отличный от нуля член дает поправку только к производной быстрой перменной φ_2.

Далее

$$(\mathbf{G}, J_1\,[\mathbf{u}_{13}]\,\mathbf{G}) = \left(\mathbf{G}, \left(J_1\,[\mathbf{u}_{130}] - \chi J_1\!\left[\frac{\partial\mathbf{u}_{130}}{\partial\vartheta}\right]\vartheta^{\boldsymbol{\cdot}} - \chi J_1\!\left[\frac{\partial\mathbf{u}_{130}}{\partial\varphi_2}\right]\varphi_2{}^{\boldsymbol{\cdot}}\right)\mathbf{G}\right)$$

При усреднении по ϑ и φ_2 члены, содержащие $\vartheta^{\boldsymbol{\cdot}}$ и $\varphi_2{}^{\boldsymbol{\cdot}}$, дадут нуль, так как функция $\mathbf{u}_{130}\,(\mathbf{r},\,\vartheta,\,\varphi_2)$ 2π-периодичная по ϑ и φ_2. Остается рассмотреть член

$$(\mathbf{G},\ J_1\,[\mathbf{u}_{130}]\,\mathbf{G}) = (J_1\,[-3\mu\rho R^{-3}\,\mathbf{u}^*(\mathbf{r}^*)]\,O_1\,(t)\,\mathbf{G},\ O_1\,(t)\,\mathbf{G})$$

где второе скалярное произведение записано в орбитальной системе координат.

Поскольку

$$J_1\,[-3\mu\rho R^{-3}\mathbf{u}^*\,(\mathbf{r}^*)] = \mathrm{diag}\,\{l_1,\,l_1,\,l_1\} + \mathrm{diag}\,\{0,\,0,\,l_2 - l_1\}$$

то

$$(\mathbf{G}, J_1\,[\mathbf{u}_{130}]\,\mathbf{G}) = l_1 I_2{}^2 + (\mathrm{diag}\,\{0, 0, l_2 - l_1\}\,O_1\,(t)\,\mathbf{G}, O_1\,(t)\mathbf{G}) =$$
$$= l_1 I_2{}^2 + (l_2 - l_1)\ (G_1\gamma_{31} + G_2\gamma_{32} + G_3\gamma_{33})^2$$

где $O_1\,(t) = (\gamma_{ij})$, l_1, l_2 — постоянные и $(\gamma_{31},\,\gamma_{32},\,\gamma_{33})$ — компоненты единичного вектора $\mathbf{e}_z$ по оси орбитальной системы координат Cz в системе координат $Cx_1x_2x_3$, связанной с шаром. Покажем, что при вычислении частных производных от выражения $(\mathbf{G}, J_1 [\mathbf{u}_{130}] \mathbf{G})$ отличной от нуля будет только производная по I_2. Вектор $\mathbf{G}$ не зависит от I_3, φ_2, φ_3, а его производные $\partial\mathbf{G}/\partial\varphi_1$ и $\partial\mathbf{G}/\partial I_1$ ортогональны к $\mathbf{G}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_{130}]\mathbf{G}) = 2(l_2 - l_1)(\mathbf{G}, \mathbf{e}_z)\left(\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\varphi_1}, \mathbf{e}_z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial I_1}(\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_{130}]\mathbf{G}) = 2(l_2 - l_1)(\mathbf{G}, \mathbf{e}_z)\left(\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial I_1}, \mathbf{e}_z\right)$$

Пары векторов $\mathbf{G}$, $\partial\mathbf{G}/\partial\varphi_1$ и $\mathbf{G}$, $\partial\mathbf{G}/\partial I_1$ ортогональны и неподвижны в системе координат $Cx_1x_2x_3$, а вектор $\mathbf{e}_z$ вращается с постоянной угловой скоростью, связанной с изменением углов φ_2 и ϑ. Отсюда следует, что проекция вектора $\mathbf{e}_z$ на плоскости, содержащая векторы $\mathbf{G}$, $\partial\mathbf{G}/\partial\varphi_1$ и $\mathbf{G}$, $\partial\mathbf{G}/\partial I_1$, вращается с постоянной скоростью, а ее произведение с взаимноортогональными векторами в результате операции усреднения даст нуль.

Таким образом, член R_1 в функционале Рауса после усреднения в уравнениях возмущенного движения (6) даст члены, отличные от нуля только в уравнении для быстрой угловой переменной φ_2. Следовательно, эволюцию медленных переменных I_i $(i = 1, 2, 3)$, φ_1, φ_3 будет определять член Π_1 в функционале Рауса (4).

Согласно соотношению (14), в правых частях уравнений (6) от Π_1 останутся производные от величины

$$-3\mu\rho R^{-3}\varepsilon\sum_{k=1}^{3}\int(\mathbf{R}^\circ, O\mathbf{r})(\mathbf{R}^\circ, O\mathbf{u}_{1k})\,dx$$

где от переменных Андуайе зависит оператор

$$O = \Gamma_3(\varphi_3)\,\Gamma_1(\delta_1)\,\Gamma_3(\varphi_2)\,\Gamma_1(\delta_2)\,\Gamma_3(\varphi_1)$$

Так как $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r})$ — сферически-симметричная функция, то член

$$\int(O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{r})\,(O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}))\,dx$$

не зависит от вектора $O^{-1}\mathbf{R}^\circ$ и, следовательно, не повлияет на правые части уравнений (6).

Рассмотрим член

$$P_1 = \int(O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{r})\,(O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}))\,dx =$$
$$= \int(\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)\,O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{r}^*)\,(\Gamma_1(\delta_2)\,\Gamma_3(\varphi_1)\,O^{-1}\mathbf{R}^\circ,$$
$$\mathbf{u}^*(\mathbf{r}^*))\,\rho I_2^2A^{-2}dx$$

Если координаты вектора $\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)O^{-1}\mathbf{R}^0$ обозначить через $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, то, используя соотношение (12), найдем

$$P_1 = \rho I_2^2A^{-2}\,[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,(b_1f_1 + b_1f_2 + b_2f_2 + c_1f_3) +$$
$$+ \alpha_3^2\,(2a_1f_2 + a_2f_1 + c_2f_3)]$$
$$f_1 = \int x^4\,dx,\ f_2 = \int x^2y^2dx,\ f_3 = \int x^2dx$$

Поскольку $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, то

(15) $$P_1 = D_2' + D_2\alpha_3^2 = D_2' + D_2\,(\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)\,[\Gamma_3(-\varphi_1)\times$$
$$\times\Gamma_1(-\delta_2)\,\Gamma_3(-\varphi_2)\,\Gamma_1(-\delta_1)\,\Gamma_3(-\varphi_3)]\,\Gamma_0^{-1}(\vartheta)\,\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z)^2$$
$$D_2 = \rho I_2^2A^{-2}\,[(a_2 - b_1)\,f_1 + (2a_1 - b_1 - b_2)\,f_2 + (c_2 - c_1)\,f_3]$$
$$D_2' = \rho I_2^2A^{-2}\,(b_1f_1 + b_1f_2 + b_2f_2 + c_1f_3),\ \ \mathbf{e}_z = (0,0,1)$$

Отметим, что переменные Андуайе, по которым необходимо вычислять частные производные в уравнениях (6), содержатся только в членах, заключенных в квадратные скобки, т. е.

$$\frac{\partial P_1}{\partial\cdot} = 2D_2 (\Gamma_1(-\delta_1)\Gamma_3(-\varphi_3)\Gamma_0^{-1}(\vartheta)\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z)(\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1) \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial\cdot}[\Gamma_3(-\varphi_1)\Gamma_1(-\delta_2)\Gamma_3(-\varphi_2)\Gamma_1(-\delta_1)\Gamma_3(-\varphi_3)] \times$$
$$\times \Gamma_0^{-1}(\vartheta)\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z)$$

где $\partial/\partial\cdot$ означает частную производную по одной из переменных φ_1, φ_2, φ_3, I_1, I_3. Вычисляя частные производные и усредняя по φ_2 и ϑ, найдем

(16) $$\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial\varphi_1}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = \left\langle\frac{\partial P_1}{\partial\varphi_2}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = \left\langle\frac{\partial P_1}{\partial\varphi_3}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = \left\langle\frac{\partial P_1}{\partial I_1}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = 0$$
$$\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial I_3}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta} = -D_2 I_2^{-1}\cos\delta_1$$

Вычислим частные производные по переменным Андуайе от выражения

(17) $$P_2 = \int (O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t))\,dx$$

Интеграл в (17) удобно вычислить в орбитальной системе координат, так как функция $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$ имеет в этой системе наиболее простой вид. Оператор перехода от осей, связанных с шаром, к орбитальным осям

$$O_1(t) = L = \Gamma_0(\vartheta)\,O,\quad O = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\,\Gamma_3(\varphi_2)\,\Gamma_1(\delta_2)\,\Gamma_3(\varphi_1)$$

и далее

$$P_2 = \int (LO^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{r}')(LO^{-1}\mathbf{R}^\circ, \mathbf{u}_{13}'(\mathbf{r}', t))\,dx$$

где $\mathbf{u}_{13}'(\mathbf{r}', t)$ представляется формулой (13), а

$$LO^{-1}\mathbf{R}^\circ = \mathbf{e}_z(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3);\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1$$

Однако в дальнейшем необходимо вычислять производные по переменным Андуайе от матрицы O^{-1}, и поэтому при вычислении интеграла сохраним обозначения для компонент вектора $\mathbf{e}_z(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Прежде всего найдем из (13)

(18) $$S = \begin{Vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ -g_1 & 0 & g_3 \\ -g_2 & -g_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$g_1 = \sin\delta_1\sin(\vartheta-\varphi_3)\,\varphi_2^\cdot,\quad g_2 = \cos\delta_1\varphi_2^\cdot - \vartheta^\cdot,\quad g_3 =$$
$$= \sin\delta_1\cos(\vartheta-\varphi_3)\,\varphi_2^\cdot$$

и далее

$$\mathbf{u}_3'(\mathbf{r}', t) = \alpha\mathbf{u}^*(\mathbf{r}^*) - \alpha\chi[(b_1-a_1)(x^2+y^2) + (b_2-a_2)z^2 +$$
$$+ c_1 - c_2](g_2 z,\ g_3 z,\ g_2 x + g_3 y) - 2\alpha\chi\,[(b_1-b_2)(x,\ y,\ 0) +$$
$$+ (a_1-a_2)(0,\ 0,\ z)](g_2 xz + g_3 yz),\quad \alpha = -3\mu\rho R^{-3}$$

В результате получим

(19) $$P_2 = (\gamma_1^2+\gamma_2^2)\,D_3 + \gamma_3^2 D_4 - \gamma_1\gamma_3\,D_5 g_2 - \gamma_2\gamma_3 D_5 g_3$$
$$D_3 = \alpha\int[b_1(x^2+y^2) + b_2 z^2 + c_1]\,x^2 dx$$
$$D_4 = \alpha\int[a_1(x^2+y^2) + a_2 z^2 + c_2]\,z^2 dx$$
$$D_5 = \alpha\chi\int\{[(b_1-a_1)(x^2+y^2) + (b_2-a_2)z^2 + c_1 - c_2] \times$$
$$\times (x^2+y^2) + 2(a_1 - a_2 + b_1 - b_2)x^2 z^2\}\,dx$$

Далее

(20) $$\frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\varphi_1} = L\frac{\partial O^{-1}}{\partial\varphi_1}\mathbf{R}^\circ \Rightarrow \left\langle\frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\varphi_1}\right\rangle_{\varphi_2} =$$
$$= (-\cos\delta_2\cos\delta_1,\ -\sin\delta_1\cos\delta_2\cos(\vartheta-\varphi_3),\ 0)$$
$$\frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\varphi_2} = L\frac{\partial O^{-1}}{\partial\varphi_2}\mathbf{R}^\circ \Rightarrow \left\langle\frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\varphi_2}\right\rangle_{\varphi_2} = (-\cos\delta_1,\ -\cos(\vartheta-\varphi_3)\sin\delta_1,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi_z} = L \frac{\partial O^{-1}}{\partial \varphi_3} \mathbf{R}^\circ \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi_3} \right\rangle_{\varphi_2} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial I_1} = L \frac{\partial O^{-1}}{\partial \delta_2} \mathbf{R}^\circ \frac{\partial \delta_2}{\partial I_1} \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial I_1} \right\rangle_{\varphi_2} = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial I_3} = L \frac{\partial O^{-1}}{\partial \delta_1} \mathbf{R}^\circ \frac{\partial \delta_1}{\partial I_3} \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial I_3} \right\rangle_{\varphi_2} = (0, 0, 0)$$

При вычислении выражений (20) произведено усреднение по углу φ_2, так как этот угол не входит в g_2 и g_3 в формуле (18). Вычисляя частные производные по каноническим переменным от P_2, усредняя результаты по φ_2 и ϑ и учитывая соотношения (18)—(20), найдем

(21)
$$\left\langle \frac{\partial P_2}{\partial \varphi_1} \right\rangle_{\varphi_2, \vartheta} = D_5 \frac{I_1}{A I_2} \left(\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} - \frac{I_3}{I_2} A \vartheta^\cdot \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial P_2}{\partial \varphi_2} \right\rangle_{\varphi_2, \vartheta} = \frac{D_5}{A} \left(\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} - \frac{I_3}{I_2} A \vartheta^\cdot \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial P_2}{\partial \varphi_3} \right\rangle_{\varphi_2, \vartheta} = -\frac{D_5}{A} (I_3 - A\vartheta^\cdot); \qquad \left\langle \frac{\partial P_2}{\partial I_1} \right\rangle_{\varphi_2, \vartheta} = \left\langle \frac{\partial P_2}{\partial I_3} \right\rangle_{\varphi_2, \vartheta} = 0$$

В результате усреднения из уравнений (6) получим приближенные уравнения, описывающие эволюцию вращательного движения вязкоупругого шара

(22)
$$I_1^\cdot = -k_1 \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} - \frac{I_3}{I_2} A\vartheta^\cdot \right)$$

$$I_2^\cdot = -k_1 \left(\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} - \frac{I_3}{I_2} A\vartheta^\cdot \right)$$

$$I_3^\cdot = -k_1 (I_3 - A\vartheta^\cdot)$$

$$\varphi_1^\cdot = 0, \quad \varphi_3^\cdot = -k_2 I_3$$

$$k_1 = \frac{9\mu^2\rho^2\varepsilon\chi}{R^6 A} \int \{[(b_1 - a_1)(x^2 + y^2) + (b_2 - a_2) z^2 + c_1 - c_2](x^2 + z^2) + 2(a_1 - a_2 + b_1 - b_2) x^2 z^2\} dx > 0$$

$$k_2 = \frac{R^3}{6\mu A \chi} k_1 > 0$$

Из уравнений (22) следует, что I_3 стремится к $A\vartheta^\cdot$ и

(23)
$$I_3 = A\vartheta^\cdot + (I_3(0) - A\vartheta^\cdot) e^{-k_1 t}$$

Далее

(24)
$$I_2^2 = A^2\vartheta^{\cdot 2} + (I_2^2(0) - I_3^2(0) - 2I_3(0) A\vartheta^\cdot - 2A^2\vartheta^{\cdot 2}) e^{-k_1 t} + (I_3(0) - A\vartheta^\cdot)^2 e^{-2k_1 t}$$

Соотношение (24) определяет закон изменения величины I_2, которая также стремится к $A\vartheta^\cdot$. Угол δ_2 между осью Cx_3 и вектором G не меняется, так как согласно уравнениям (22)

$$(\cos \delta_2)^\cdot = -\sin \delta_2 \frac{I_1^\cdot I_2 - I_2^\cdot I_1}{I_2^2} = 0$$

Это означает, что величина I_1 меняется пропорционально изменению величины I_2

$$I_1(t) = I_2(t) I_1(0) / I_2(0)$$

Так как углы φ_1 и δ_2 постоянны, то ось вращения шара фиксирована в системе координат, интегральным образом связанной с шаром.

В процессе эволюции ось вращения вязкоупругого шара стремится к нормали к плоскости орбиты, а угловая скорость шара — к орбитальной угловой скорости.

Уравнения (22) содержат два малых параметра k_1 и k_2, причем $k_1 \ll k_2$. Следовательно, во вращательном движении шара имеются две эволюции: быстрая и медленная. Быстрая эволюция описывается уравнениями (22) при $k_1 = 0$, при этом изменяется только угол φ_3 и вектор G описывает круговой конус с осью симметрии, совпадающей с нормалью к орбите. Медленная эволюция соответствует членам, содержащим k_1 в уравнениях (22), и описывает изменения величин I_1, I_2, I_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вильке В. Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил.— ПММ, 1980, т. 44, вып. № 3, с. 395—402.
2. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1982. 118 с.
3. Приливы и резонансы в Солнечной системе: Сб. статей / Под ред. *В. Н. Жаркова*. М.: Мир, 1976, 287 с.
4. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
5. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. И.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
6. *Andoyer M. H.* Cours de mécanique celeste. P.: Gauthier-Villars. T. 1, 1923. 438p. T. 2. 1926. 454p.
7. *Вильке В. Г.* Об эволюции движения тяжелого симметричного тела, несущего вязкоупругие стержни.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ., 1982, № 2, с. 106—110.
8. *Вильке В. Г.* Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ., 1983, № 5, с. 54—59.

Москва

Поступила в редакцию 24.V.1983