

## УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ГАЗЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В.

Рассматривается одномерное изотермическое движение газа с учетом сил сопротивления, линейно-зависящих от скорости. Приводятся постановки задач движения газа с учетом и без учета конвективных членов. Получены их аналитические и численные решения. Показана возможность возникновения ударных волн, отраженных в среде.

Рассматриваемые течения возникают при фильтрации газа через пористые среды, при движении газа по трубам и магистральным трещинам, при движении пористых тел в газах, а также в ряде технологических процессов [1, 2]. Система уравнений для описания движения газа с учетом сил трения приведена в [3, 4]. Системы квазилинейных уравнений общего типа исследовались в [5].

1. Постановка задачи. Система уравнений, описывающая одномерное изотермическое движение газа с силами сопротивления, линейными по скорости, имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u \right) = - \frac{\partial}{\partial x} P - au, \quad P = c^2 \rho$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $P$  — давление,  $u$  — скорость движения газа,  $c$  — изотермическая скорость звука,  $a$  — постоянный коэффициент сопротивления.

Как правило, во втором уравнении (1.1) конвективные члены опускают, поскольку из-за больших сил сопротивления, казалось бы, за время  $t \sim \rho/a$  они становятся пренебрежимо малыми по сравнению с остальными слагаемыми. Однако при некоторых начальных и граничных условиях решения уравнений (1.1) с учетом и без учета конвективных членов количественно и качественно различаются.

Начальные и граничные условия возьмем в виде ( $A$  и  $u_0$  — постоянные)

$$(1.2) \quad \rho(x; t = 0) = 0, \quad u(x; t = 0) = 0$$

$$(1.3) \quad \rho(x = 0; t) = At, \quad u(x = 0; t) = u_0$$

Ищем автомодельное решение задачи (1.1)—(1.3)

$$(1.4) \quad \rho = A t f(\theta), \quad u = c \varphi(\theta); \quad \theta = x/(ct)$$

Здесь  $f$  и  $\varphi$  — безразмерные аналоги плотности и скорости движения газа,  $\theta$  — автомодельная переменная.

В переменных (1.4) задачу (1.1)—(1.3) можно записать в виде

$$(1.5) \quad f'(\varphi - \theta) + \varphi' f = -f.$$

$$f' - \varphi' f(\theta - \varphi) = -\sigma \varphi; \quad \sigma = a/A$$

$$(1.6) \quad f(\theta \rightarrow \infty) = 0$$

$$(1.7) \quad f(\theta = 0) = 1, \quad \varphi(\theta = 0) = \varphi_0; \quad \varphi_0 = u_0/c$$

В пренебрежении конвективными членами второе уравнение (1.5) заменяется на  $f' = -\sigma \varphi$  [6—8].

Решением системы (1.5) с условием (1.6) и первым условием (1.7) служит простая волна [6]

$$(1.8) \quad \varphi = \sigma^{-1/2}, \quad f = 1 - \sigma^{1/2} \theta, \quad \theta \leq \theta_0$$

$$\varphi = 0, \quad f = 0, \quad \theta > \theta_0; \quad \theta_0 = \sigma^{-1/2}$$

Видно, что в этом случае скорость втекания газа  $\varphi(\theta = 0)$  зависит от коэффициента сопротивления  $a$  и постоянной  $A$ .

При скорости втекания газа большей скорости звука ( $\varphi(\theta = 0) > 1$ ) для системы (1.5) следует задавать два граничных условия (1.7).

Решение задачи (1.5)–(1.7) при  $\sigma = 0$  (отсутствует сила сопротивления) имеет вид

$$(1.9) \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{\varphi - \theta + \sqrt{2}}{\varphi_0 + \sqrt{2}} \frac{\varphi_0 - \sqrt{2}}{\varphi - \theta - \sqrt{2}} \right]$$

$$f = \sqrt{\frac{(\varphi - \theta)^2 - 2}{\varphi_0^2 - 2}}, \quad 1 < \varphi_0 < \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} < \varphi_0$$

$$\varphi = \theta + \sqrt{2}, \quad f = \exp\{-\sqrt{2}\theta\}, \quad \varphi_0 = \sqrt{2}$$

На фиг. 1 показана зависимость давления газа  $f(\theta)$  и скорости  $\varphi(\theta)$  для  $\varphi_0 = 1, 2; 1, 4; 2; 5$  (кривые 1–4). Качественные различия в зависимостях  $f(\theta)$  и  $\varphi(\theta)$  при  $\varphi_0 > \varphi_0^* = \sqrt{2}$  ( $\varphi'' > 0$ ) и  $\varphi_0 < \varphi_0^*$  ( $\varphi'' < 0$ ) связаны с граничным условием  $\rho(0; t) = At$ . При  $\rho(0; t) = At^\alpha$  значение  $\varphi_0^* \neq \sqrt{2}$  и зависит от  $\alpha$ .

Из решения (1.9) следует, что при  $\sigma = 0$  и для  $\varphi_0 > 1$  с ростом  $\theta$   $\varphi \rightarrow \infty$ , т. е. скорость распространения фронта газа бесконечна.

**2. Решение системы уравнений для  $\sigma > 0$ .** Из второго уравнения (1.5) следует, что при  $\sigma > 0$  газ распространяется с конечной скоростью. Пусть  $\theta_1$  — автомодельная координата фронта распространения газа. Поскольку скорость движения газа на фронте совпадает со скоростью движения самого фронта, то из (1.4) получаем

$$(2.1) \quad \varphi(\theta = \theta_1) = \varphi_1 = \theta_1$$

Из уравнений (1.5) видно, что  $\varphi > 0$  при  $\theta < \theta_1$ .

Рассмотрим движение газа при  $\varphi_0 > 1$ . Характеристики, соответствующие  $\xi_2 = u - c$ , выходят из прямых  $x = 0$  и  $x = v_1 t$ , где  $v_1 = c\varphi_1$ . Из-за нелинейности уравнений (1.1) поведение характеристик зависит от решений. При этом возможны два случая: либо характеристики, соответствующие  $\xi_2$  и выходящие из прямых  $x = 0$  и  $x = v_1 t$ , пересекаются на некоторой линии (прямой в силу автомодельности задачи), либо поле характеристик непрерывно, тогда из точки  $x = 0, t = 0$  выходит характеристика. Пространство, занятое газом, разделяется на две области прямой  $X(t)$ , совпадающей в первом случае с линией, на которой пересекаются характеристики, во втором случае — с характеристикой, выходящей из  $x = 0, t = 0$ .

Фиг. 2 иллюстрирует возможные поля характеристик, прямая  $X(t)$  изображена штриховой линией. В области 1 решение определяется только граничными условиями (характеристики, соответствующие  $\xi_1 = u + c$  и  $\xi_2 = u - c$ , выходят из прямой  $x = 0$ ), в области 2 плотность и скорость газа определяются граничными и начальными условиями (характеристика, соответствующая  $\xi_2 = u - c$ , выходит из прямой  $x = v_1 t$ ).

Решение системы уравнений (1.5) в области 2, удовлетворяющее условиям (1.6) и (2.1), имеет вид

$$(2.2) \quad \varphi = \theta_1, \quad f = \sigma\theta_1(\theta_1 - \theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

где  $\theta_0$  — автомодельная координата, соответствующая границе между областями 1 и 2.

Рассмотрим случай, когда  $X(t)$  — характеристика. Определитель системы (1.5), составленный из коэффициентов при производных  $f'$  и  $\varphi'$ , в точке  $\varphi = \theta + 1$  обращается в нуль. Для существования решения необходимо, чтобы было  $f = \sigma\varphi$ . Решение на характеристике непрерывно, поэтому скорость движения газа  $\varphi(\theta_0) = \theta_1$ . Из определения  $X(t)$  ( $dX/dt = \xi_2 = u - c$ ) получаем  $\theta_0 = \theta_1 - 1$ . Условие  $f = \sigma\varphi$  в точке  $\theta_0$  выполняется, поскольку решение имеет вид

$$(2.3) \quad \varphi(\theta = \theta_0) = \theta_1, \quad f(\theta = \theta_0) = \sigma\varphi(\theta_0) = \sigma\theta_1$$

Если на линии  $X(t)$  характеристики пересекаются, то на  $X(t)$  решение терпит скачок. Пусть  $D = dX/dt$ . Условия Гюгонио для изотермического газа в автомодельных переменных запишутся в виде ( $[F]$  — скачок функции  $F$ )

$$[f(\varphi - \theta_0)] = 0, \quad [f + f(\varphi - \theta_0)^2] = 0$$

откуда

$$(2.4) \quad \varphi_1 = \theta_0 + (\varphi_2 - \theta_0)^{-1}, \quad f_1 = f_2(\varphi_2 - \theta_0)^2$$

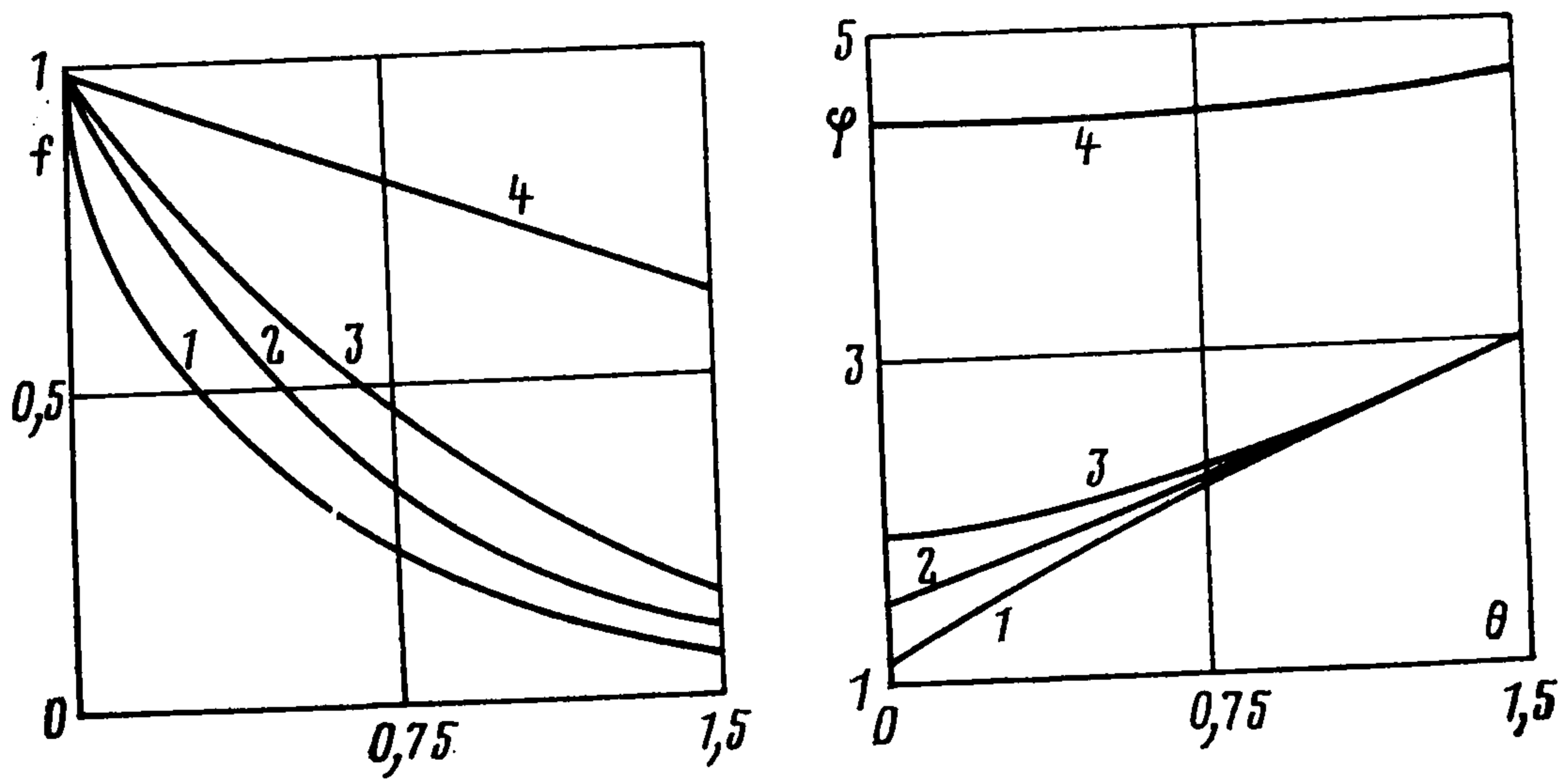
Здесь  $f_1 = f(\theta_0 - 0)$ ,  $\varphi_1 = \varphi(\theta_0 - 0)$  (плотность и скорость газа слева от  $\theta_0$ ),  $f_2 = f(\theta_0 + 0)$ ,  $\varphi_2 = \varphi(\theta_0 + 0)$ .

Из (2.2) и (2.4) получим

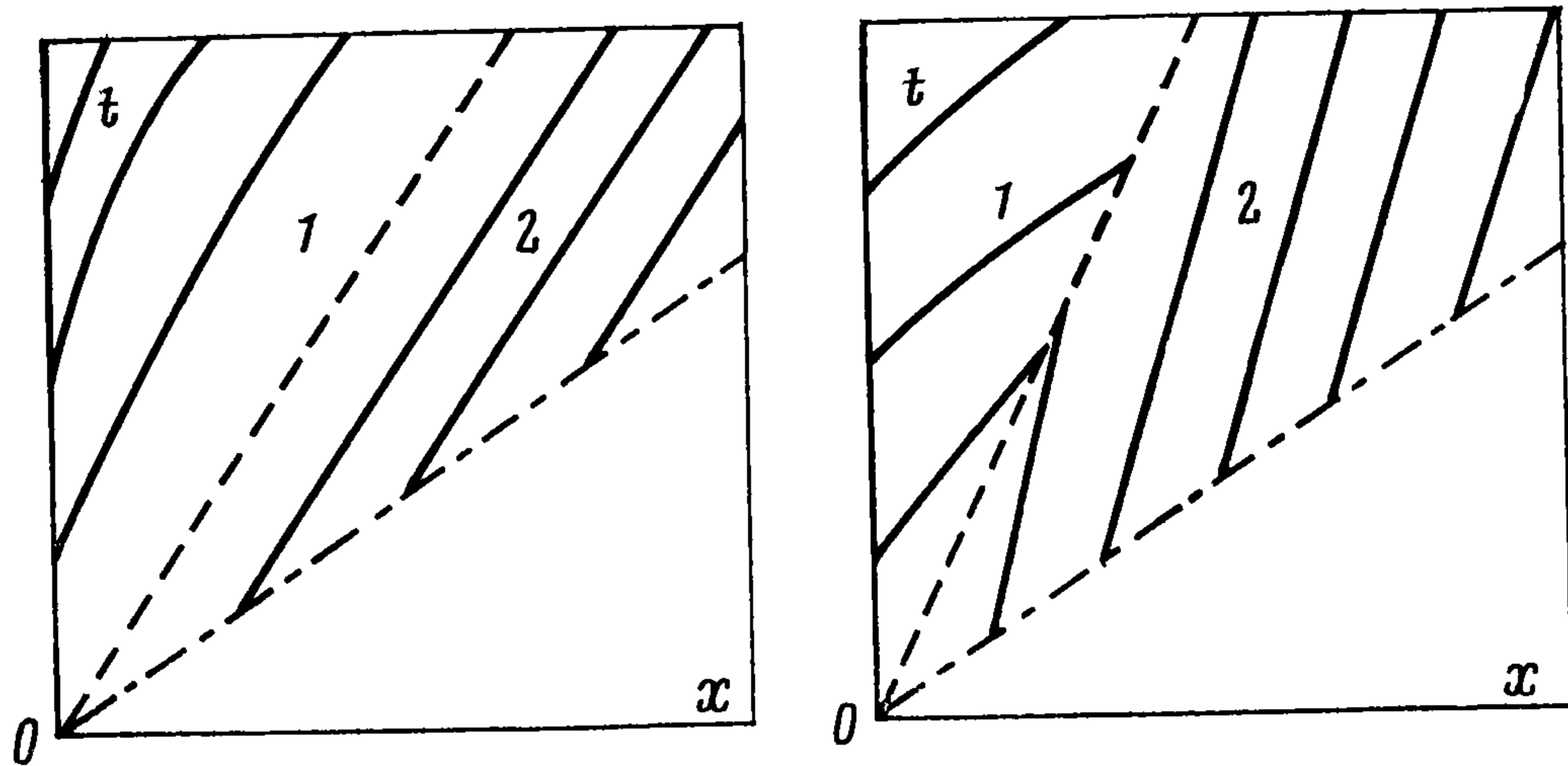
$$(2.5) \quad \varphi_1 = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_2)^{-1}, \quad f_1 = \sigma\theta_1(\theta_1 - \theta_0)^3$$

Плотность  $f_1$  и скорость движения  $\varphi_1$  связаны с  $\theta_0$  выражением

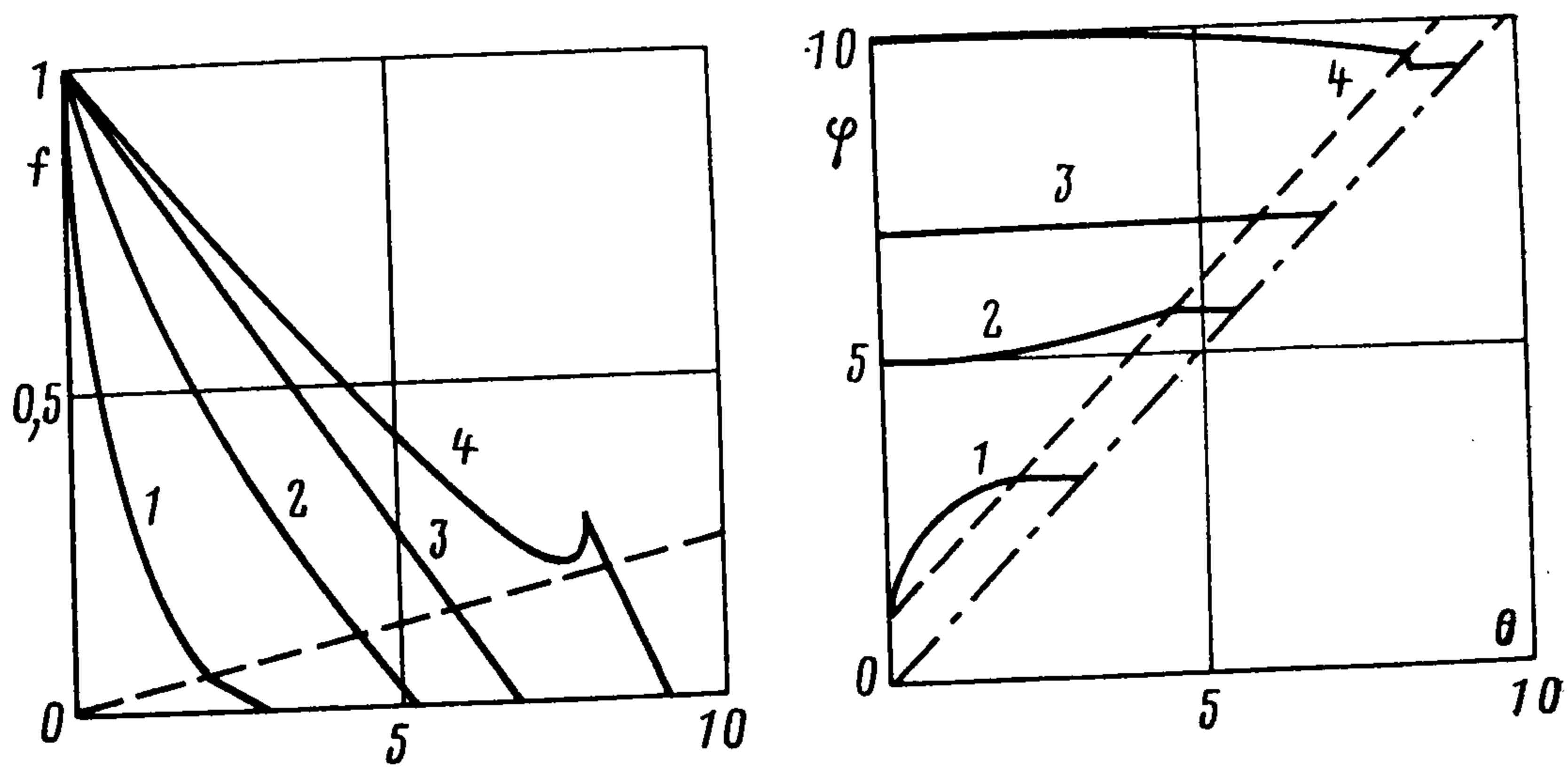
$$(2.6) \quad f_1 = \sigma[\theta_0 + (\varphi_1 - \theta_0)^{-1}](\varphi_1 - \theta_0)^{-3}$$



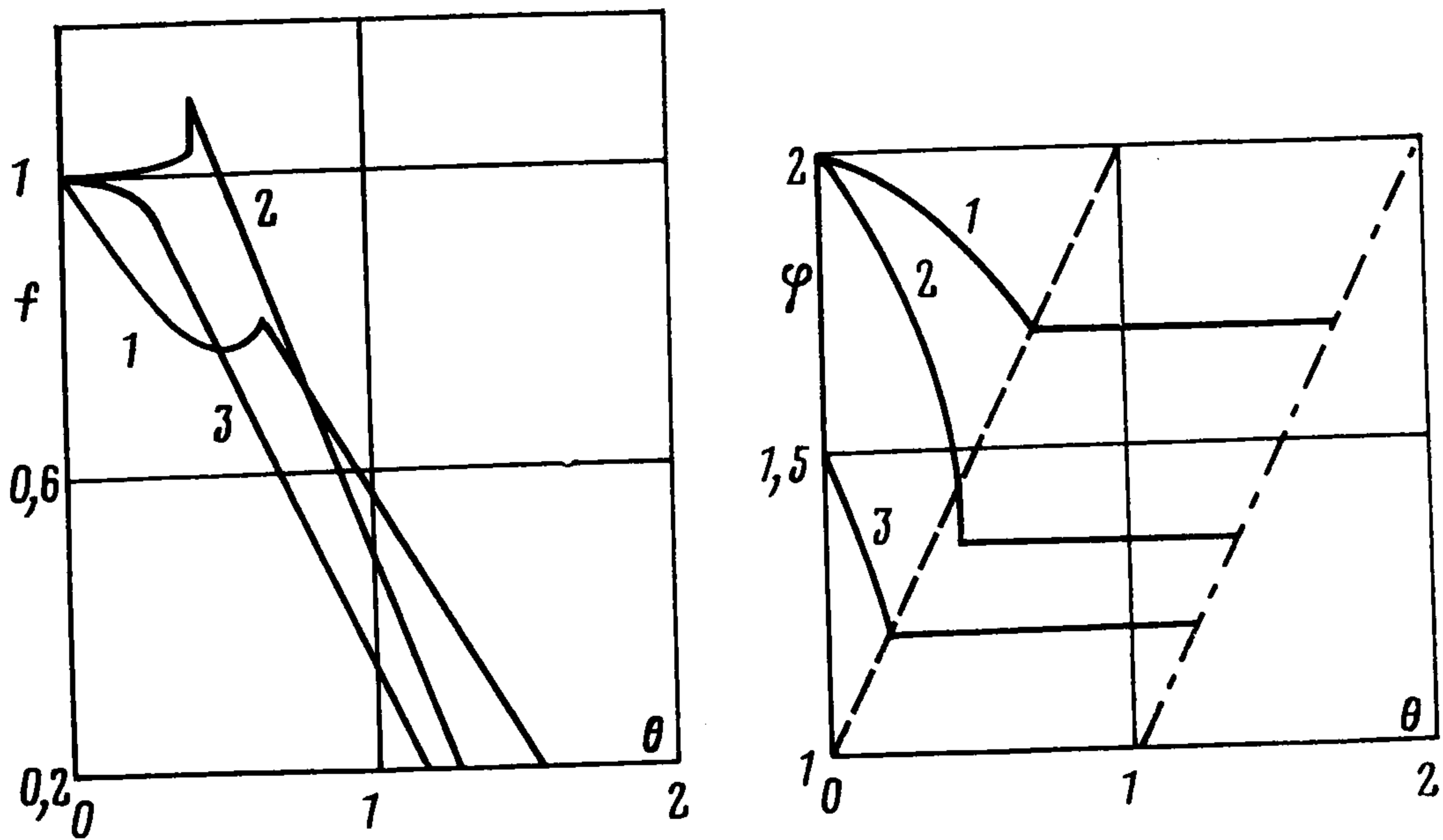
Фиг. 1



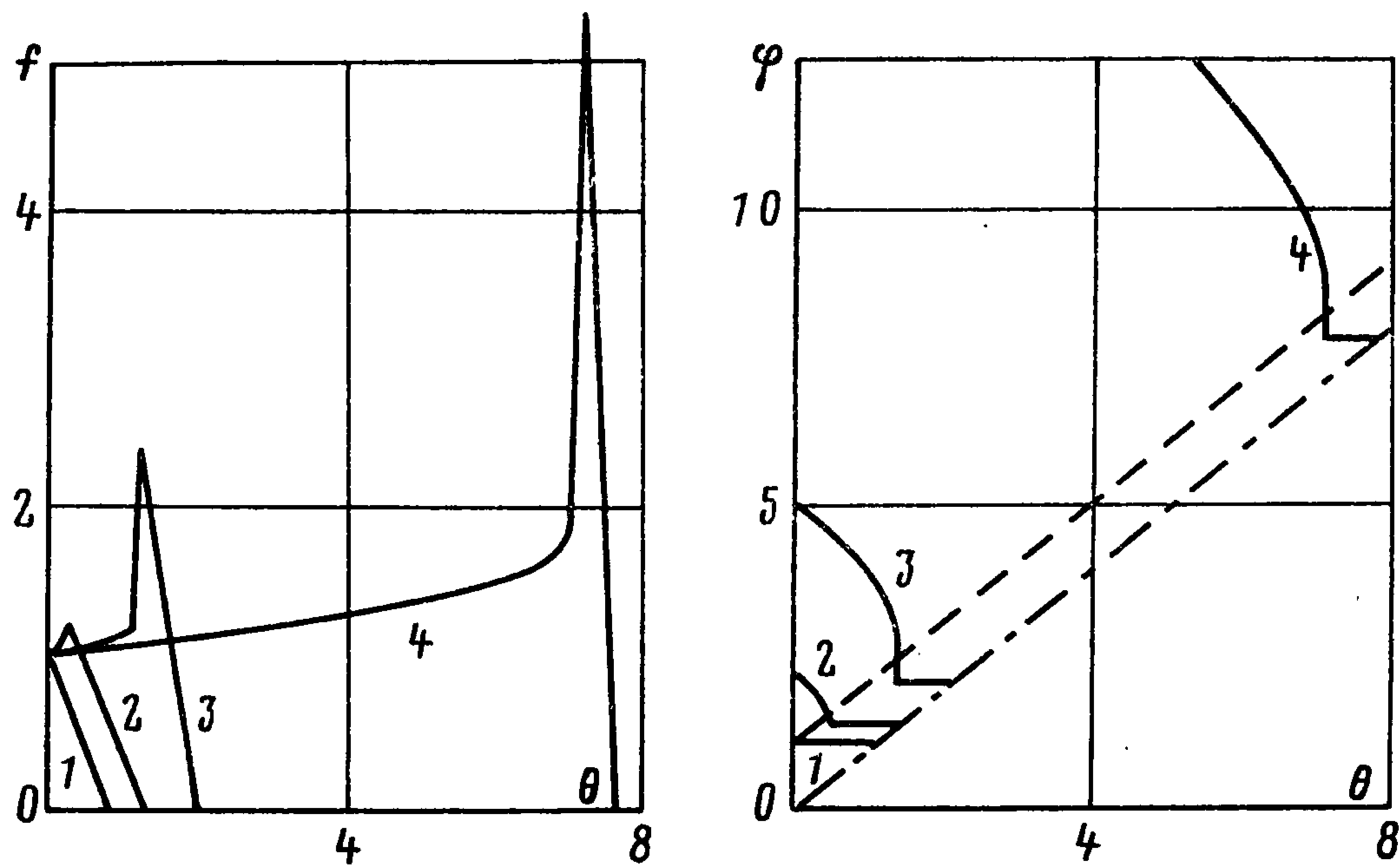
Фиг. 2



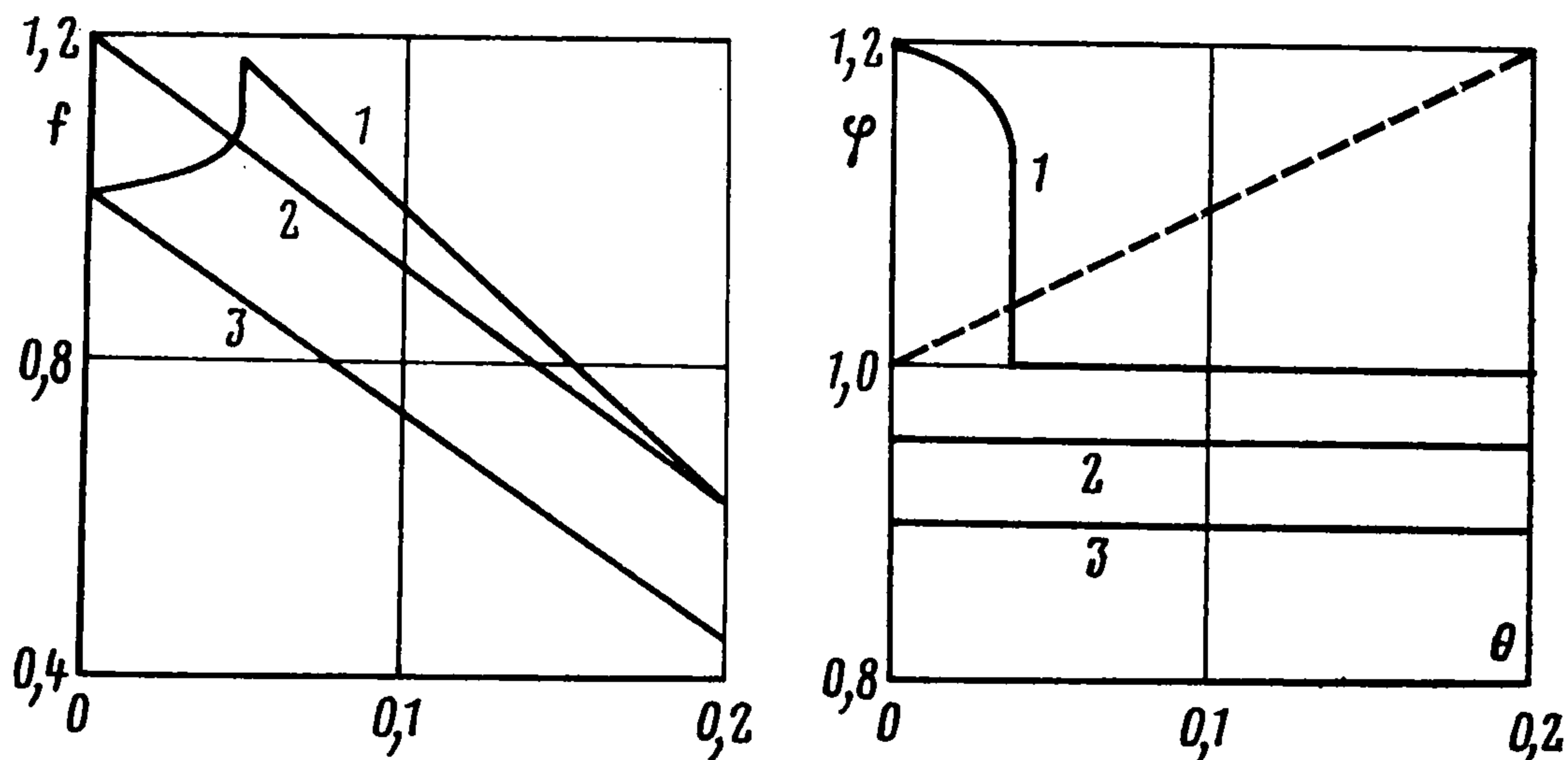
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

В случае непрерывности решения условия (2.5) переходят в (2.3).

**3. Результаты и обсуждение.** Для решения задачи (1.5)–(1.7) в области 1 используем численный метод. Введем сетку  $\omega = \{\theta_n = nh; h = 0, 1, \dots, N\}$  ( $h$  — шаг по координате) и сеточные функции  $f_n$  и  $\varphi_n$ . В соответствии с (1.7) выбираем  $\varphi_0 = \varphi(\theta = 0)$  и  $f_n = f(\theta = 0) = 1$ . По заданным значениям  $\varphi_0$  и  $f_0$  находим  $f_n$  и  $\varphi_n$  в точках  $\theta_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) методом Рунге — Кутты четвертого порядка аппроксимации [9]. В процессе расчета из условия (2.6) определяем координату  $\theta_0$ , а из (2.5) —  $\theta_1$ .

В области 2 решение описывается формулами (2.2).

На фиг. 3 представлены зависимости  $f(\theta)$  и  $\varphi(\theta)$  для  $\sigma = 0,02$  при  $\varphi_0 = 1,1; 5; 7; 10$  (кривые 1–4). При  $\varphi_0 = \sigma^{-1/2}$  решением является «простая волна» (формула (1.8), кривая 3). Для  $\varphi_0 < \sigma^{-1/2}$  скорость  $\varphi$  увеличивается с  $\theta$ , достигая максимального значения в точке  $\theta_0$ , которая является координатой слабого разрыва. Если  $\varphi_0 > \sigma^{-1/2}$ , то  $\varphi$  с ростом  $\theta$  уменьшается. При  $\theta = \theta_0$  плотность  $f$  и скорость движения газа  $\varphi$  изменяются скачком. Далее решение описывается (2.2). Штриховой кривой на фиг. 3 разделены решения в областях 1 и 2. Штрихпунктирной прямой  $\varphi = \theta$  ограничено пространство, занятое газом.

Скачок в решении при  $\theta = \theta_0$  ( $\varphi_0 > \sigma^{-1/2}$ ) является ударной волной, которая движется в направлении, противоположном движению газа.

Аналогично случаю  $\sigma = 0$ , при  $\sigma < 1$  дозвуковых решений задачи (1.5)–(1.7) также не существует.

На фиг. 4 представлены результаты расчета плотности  $f(\theta)$  и скорости газа  $\varphi(\theta)$  при  $\sigma = 0,5; \varphi_0 = 2,0$  (кривые 1);  $\sigma = 0,95, \varphi_0 = 2,0$  (кривые 2);  $\sigma = 0,95, \varphi_0 = 1,5$  (кривые 3). Видно, что увеличение  $\sigma$  ( $\varphi_0$  фиксировано) приводит к более быстрому уменьшению  $\varphi$  с ростом  $\theta$ . При этом скачок у  $\varphi$  и  $f$  увеличивается. В области 1 наблюдается рост плотности, переходящий в ударную волну.

Фиг. 5 иллюстрирует результаты решения задачи (1.5)–(1.7) при  $\sigma = 1$  для  $\varphi_0 = 1; 1,5; 5; 20$  (кривые 1–4). С увеличением значений  $\varphi_0$  возрастает степень уплотнения газа, скачок динамических переменных на ударной волне увеличивается.

Представляет интерес обсудить движение газа при  $\sigma > 1$ . На фиг. 6 показаны зависимости  $f(\theta)$  и  $\varphi(\theta)$  для  $\sigma = 1,25$  при  $\varphi_0 = 1,2; 1,06; 0,89$  (кривые 1—3). При  $\varphi_0 = \sigma^{1/4}$  условие (2.6) выполняется в точке  $\theta = 0$ . Это означает, что при  $\theta = 0$  изменение  $\varphi$  и  $f$  происходит скачком (ударная волна находится на границе среды). За ударной волной решение описывается формулой (2.2) и является дозвуковым. Для  $\varphi_0 < \sigma^{1/4}$  сверхзвуковых движений газа не существует.

При  $\sigma > 1$ , в отличие от  $0 \leq \sigma \leq 1$ , существует дозвуковой режим течения газа, который совпадает с решением (1.8) фильтрационной задачи.

Таким образом, система (1.1) с условиями (1.2) (1.3) допускает не только фильтрационное решение (1.8), но и ряд других решений, зависящих от скорости втекания газа  $u_0$ . Если  $a < A$ , то реализуется только сверхзвуковое движение газа, причем при  $u_0 > u_0^* = c\sqrt{A/a}$  образуется ударная волна, направление которой противоположно движению газа. Увеличение  $a$  (или уменьшение  $A$ ) приводит к уменьшению  $u_0^*$  и увеличению скачков динамических переменных (плотности и скорости) газа на ударной волне.

В случае  $a > A$  сверхзвуковое втекание газа возможно только при  $u_0 > c(a/A)^{1/4}$  и при этом всегда образуется ударная волна. Кроме того, при  $a > A$  возможно дозвуковое втекание газа, совпадающее с решением фильтрационной задачи.

Авторы благодарят Е. Е. Ловецкого и Б. Л. Рождественского за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981. 483с.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664с.
3. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335с.
4. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336с.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 668с.
6. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 6, с. 679—698.
7. Бондаренко А. Г., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А. Автомодельное решение задачи о течении газа через пористую среду в режиме турбулентной фильтрации. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 573—577.
8. Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Автомодельное решение задачи осесимметричного движения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1982, № 4, с. 168—171.
9. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.VII.1983

Технический редактор В. М. Пахомова

Сдано в набор 22.10.84      Подписано к печати 11.01.85      Т-00910      Формат бумаги 70×100<sup>1/16</sup>  
Высокая печать      Усл. печ. л. 15,4      Усл. кр.-отт. 34,7 тыс.      Уч.-изд. л. 15,1      Бум. л. 5 5  
Тираж 2226 экз.      Зак. 799

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21  
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6