которые порождаются также [6] обратной задачей теории упругости — об оптимизации напряженного состояния однородного и изотропного линейно-упругого пространства S^- с полостями, нагруженного на бесконечности по осям усилиями q_l ($l = 1, 2, 3$). Под оптимизацией понимается достижение за счет управления формой границы минимально возможного локального критерия Мизеса — максимума по S^- второго инварианта девиатора тензора напряжений. При этом функции $\partial\chi/\partial x$ имеют смысл упругих смещений точек среды по осям, $2a_l = (Q - 2q_l)/q_l$, $Q = q_1 + q_2 + q_3$, постоянные C_l остаются неопределенными. Для такой границы M и A одновременно приводятся к диагональному виду.

В отличие от плоского случая [5] фактическое отыскание границы при $m > 1$ весьма сложно. В осесимметричном варианте ($q_1 = q_2$, $\mu_{11} = \mu_{22}$) предложено [7] нелинейное интегральное уравнение относительно координат точек меридионального сечения границы как функций длины дуг и приведены численные результаты его решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. Гостехиздат, 1956. 396 с.
5. *Вигдергауз С. Б.* Обратная задача двумерной теории упругости в гидродинамической постановке — ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 639—643.
6. *Вигдергауз С. Б.* Обратная задача трехмерной теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 90—93.
7. *Вигдергауз С. Б.* Оптимальные полости в упругом пространстве с осевой симметрией.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, № 3, с. 51—58.

Ленинград

Поступила в редакцию
7.V.1984

УДК 532.5

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ

Белоненко В. Н., Динариев О. Ю.

Изучается течение вязкой сжимаемой жидкости в цилиндрических трубах с учетом влияния объемной вязкости [1]. Процесс предполагается баротропным, что имеет место, например, когда можно пренебречь тепловыделением или когда жидкость обладает высокой теплопроводностью. Обсуждается вопрос о корректных граничных условиях для системы определяющих уравнений. Далее задача о течении жидкости с уравнением состояния Тэйта решается методом разделения переменных. Приводятся доказательства существования и единственности решений для получаемых обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется асимптотика скорости при возрастании объемной вязкости. Коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости везде считаются постоянными.

1. Будем параллельно рассматривать плоскую и пространственную задачи об одномерном и установившемся течении в цилиндрической области между неподвижными стенками. Определяющая система уравнений (Навье — Стокса, неразрывности, состояния) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} &\rho u u_{,x} = [-p + \zeta u_{,x}]_{,x} + \eta_s (\partial_x^2 + \Delta_j) u \\ &0 = \operatorname{grad}_j [-p + \zeta u_{,x}] \\ &(\rho u)_{,x} = 0, \ p = p(\rho); \ \zeta = \eta_v + {}^1/_3 \eta_s \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u — скорость течения, направленная по оси Ox, η_v и η_s — коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости. Параметр j принимает два значения: 1 и 2, что соответствует течению между плоскостями и в трубе. Для $j = 1$ $\Delta_1 = \partial_y^2$, $\operatorname{grad}_1 = \partial_y$ и все функции предполагаются гладкими в замкнутой области

$$G_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in [0, L], \ y \in [-a, a]\}$$

вплоть до ее границы. На скорость налагается граничное условие прилипания: $u|_{y=\pm a} = 0$.

Для $j = 2$ $\Delta_2 = (\partial_y^2 + \partial_z^2)$, $\mathrm{grad}_2 = (\partial_y, \partial_z)$ и все функции предполагаются гладкими в области

$$G_2 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x \in [0, L], \ (y, z) \in D_2\}$$

вплоть до ее границы; $D_2 \subset R^2$ — произвольная плоская область с кусочно-гладкой границей, и на скорость накладывается граничное условие $u|_{[0,L]\times\partial D_2} = 0$.

Определим функцию $h = -p + \zeta u_{,x}$. Из (1.1) видно, что величина h зависит только от x и равна взятому с противоположным знаком давлению в точках неподвижных границ течения с абсциссой x.

С использованием функции h систему (1.1) можно переписать в виде

(1.2)
$$\rho u u_{,x} = h_{,x} + \eta_s (\partial_x^2 + \Delta_j) u$$
$$u_{,x} = \zeta^{-1}(h + p); \ (\rho u)_{,x} = 0, \ p = p(\rho)$$

Если задать внешний перепад давления естественными, казалось бы, условиями $p|_{x=0} = p_0$, $p|_{x=L} = p_1$ $(p_0 > p_1)$, то это приводит к противоречию, как показывает следующая лемма.

Лемма. Для вязкой сжимаемой жидкости, течение которой подчиняется уравнениям (1.2) и условиям прилипания, равенство $p|_{x=0} = p_0 = \mathrm{const}$ влечет $u \equiv 0$.

Доказательство. Так как u обращается на стенках в нуль, то

$$h(0) + p|_{x=0} = h(0) + p_0 = \zeta u_{,x}|_{x=0} = 0$$

Отсюда $u_{,x}|_{x=0} \equiv 0$, $\Delta_j u_{,x}|_{x=0} \equiv 0$.

Дифференцирование по x позволяет получить из (1.2) следующие уравнения:

(1.3)
$$\rho u u_{,xx} = h_{,xx} + \eta_s (\partial_x^2 + \Delta_j) u_{,x}$$
$$u_{,xx} = \zeta^{-1}(h_{,x} + p_{,\rho}\rho_{,x})$$
$$u_{,xxx} = \zeta^{-1}(h_{,xx} + p_{,\rho\rho}\rho_{,x}^2 + p_{,\rho}\rho_{,xx})$$
$$\rho_{,x}u + \rho u_{,x} = 0, \ \rho_{,xx}u + 2\rho_{,x}u_{,x} + \rho u_{,xx} = 0$$

Будем рассматривать все члены уравнений (1.3) при $x = 0$, отмечая это индексом °. Тогда из первого уравнения (1.3) следует

$$\rho^\circ u^\circ u_{,xx}^\circ = h_{,xx}^\circ + \eta_s u_{,xxx}^\circ$$

Так как на стенках $u_{,xx}$ и $u_{,xxx}$ обращаются в нуль, то $h_{,xx}^\circ = 0$. Поэтому

(1.4)
$$\rho^\circ u^\circ u_{,xx}^\circ = \eta_s u^\circ_{,xxx}$$

Далее имеем

$$u^\circ u_{,xx}^\circ = h_{,x}^\circ u^\circ \zeta^{-1}, \ (u^\circ)^2 u_{,xxx}^\circ = p_{,\rho}^\circ (u^\circ)^2 \rho_{,xx}^\circ \zeta^{-1} =$$
$$= -p_{,\rho}^\circ \rho^\circ u^\circ u_{,xx}^\circ \zeta^{-1} = -p_{,\rho}^\circ \rho^\circ u^\circ h^\circ_{,x} \zeta^{-2}$$

Тогда из (1.4) следует

$$\rho^\circ (u^\circ)^3 h_{,x}^\circ = -\eta_s p_{,\rho}^\circ \rho^\circ u^\circ h_{,x}^\circ \zeta^{-1}$$

Из последнего уравнения для точек, в которых $u^\circ \neq 0$ (а следовательно, и для всего множества $\{x = 0\} \cap G_j$), вытекает соотношение

$$\rho^\circ (u^\circ)^2 h_{,x}^\circ \zeta = -p_{,\rho}^\circ \rho^\circ h_{,x}^\circ \eta_s$$

Но тогда $h_{,x}^\circ = 0$, $u_{,xx}^\circ = 0$.

Итак, при $x = 0$ u подчиняется j-мерному уравнению Лапласа в некоторой ограниченной области и нулевым граничным условиям. Отсюда $u|_{x=0} \equiv 0$. Так как $(\rho u)_{,x} = 0$, то $u = 0$ во всем множестве G_j.

Лемма показывает, что для баротропных одномерных установившихся движений вязкой сжимаемой жидкости между неподвижными стенками ни давление, ни плотность нельзя считать постоянными поперек течения. Поэтому перепад давления зададим условиями

(1.5)
$$h(0) = -p_0, \ h(L) = -p_1$$

2. Возьмем в качестве уравнения состояния соотношение

$$p = p_0 + A(1 - \rho_0/\rho)$$

описывающее поведение широкого класса жидкостей [2].

Тогда система (1.2) допускает разделение переменных

$$u = e^{\nu x}U,\ \rho = e^{-\nu x}R,\ h = Ae^{\nu x} - A - p_0$$

где U и R не зависят от x и подчиняются уравнениям

$$\nu RU^2 = A\nu + \eta_s(\nu^2 + \Delta_j)\,U,\ \ \zeta\nu U = A\,(1 - \rho_0/R) \tag{2.1}$$

Параметр ν определяется из условия (1.5)

$$\nu = L^{-1}\ln(1 + \Delta p/A)$$

Из (2.1) можно исключить R и получить нелинейное дифференциальное уравнение относительно U. Удобно ввести обозначение $U = A\nu^{-1}\zeta^{-1}\varphi$ и изучать задачу для функции φ

$$\begin{gathered}\eta_s(\Delta_j + \nu^2)\,\varphi - A\rho_0\zeta^{-1}\varphi^2(1-\varphi)^{-1} + \zeta\nu^2 = 0\\ \varphi\,|_{y=\pm a} = 0\ \ (j=1);\ \ \varphi\,|_{\partial D_2} = 0\ \ (j=2)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для простоты предположим, что в пространственном случае жидкость движется в круглой трубе радиуса a, причем течение осесимметрично. Это означает, что $\varphi = \varphi(r)$, $\Delta_2 = r^{-1}\partial_r r\partial_r$, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Перейдем к системе единиц, в которой $a = 1$, $\eta_s = 1$, $\rho_0 = 1$. Тогда задача (2.2) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\Delta_j\varphi = F(\varphi) \equiv A\zeta^{-1}\varphi^2(1-\varphi)^{-1} - \zeta\nu^2 - \nu^2\varphi\\ \varphi(\pm 1) = 0\ (j=1);\ \varphi(1) = 0,\ \varphi'(0) = 0\ (j=2).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Теорема. Задача (2.3) имеет единственное решение.

φ — выпуклая функция, и ее максимальное значение удовлетворяет неравенству

$$1 > \varphi_{\max} > 1 - A\,[\zeta\,(\zeta\nu^2 - 2j)]^{-1} \tag{2.4}$$

если $\zeta\nu^2 > 2j$.

Доказательство. Уравнение $F(\varphi) = 0$ имеет два корня: φ_1 и φ_2, причем $\varphi_2 < 0 < \varphi_1 < 1$.

При больших ζ

$$\varphi_1 = 1 + O(\zeta^{-2}),\ \ \varphi_2 = -\zeta + O(1)$$

График $F = F(\varphi)$ качественно представлен на фиг. 1.

Пусть $j = 1$. Изучим фазовый портрет уравнения (2.3) в области $\varphi \in [0, 1[$ (фиг. 2). В точке $M = (\varphi_1, 0)$ имеется особенность типа «седло». Существуют две сепаратрисы, которые проходят через M и пересекают ось $O\varphi'$. Эти кривые вместе с осью $O\varphi'$ ограничивают область возможных течений. Траектории, заполняющие эту область, представляют собой решения уравнения (2.3). Каждая траектория характеризуется абсциссой пересечения с осью $O\varphi$, где функция $\varphi = \varphi(y)$ достигает максимального значения $\varphi_{\max} = \varphi_m$. Так как

$$dy = \pm\left(-2\int_{\varphi}^{\varphi_m} F(s)\,ds\right)^{-1/2} d\varphi$$

то для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, нужно потребовать

$$W_1(\varphi_m) \equiv \int_0^{\varphi_m}\left(-2\int_{\varphi}^{\varphi_m} F(s)\,ds\right)^{-1/2} d\varphi = 1 \tag{2.5}$$

Изучим поведение функции $W_1 = W_1(\varphi_m)$ на интервале $[0, \varphi_1]$. Для этого введем обозначения

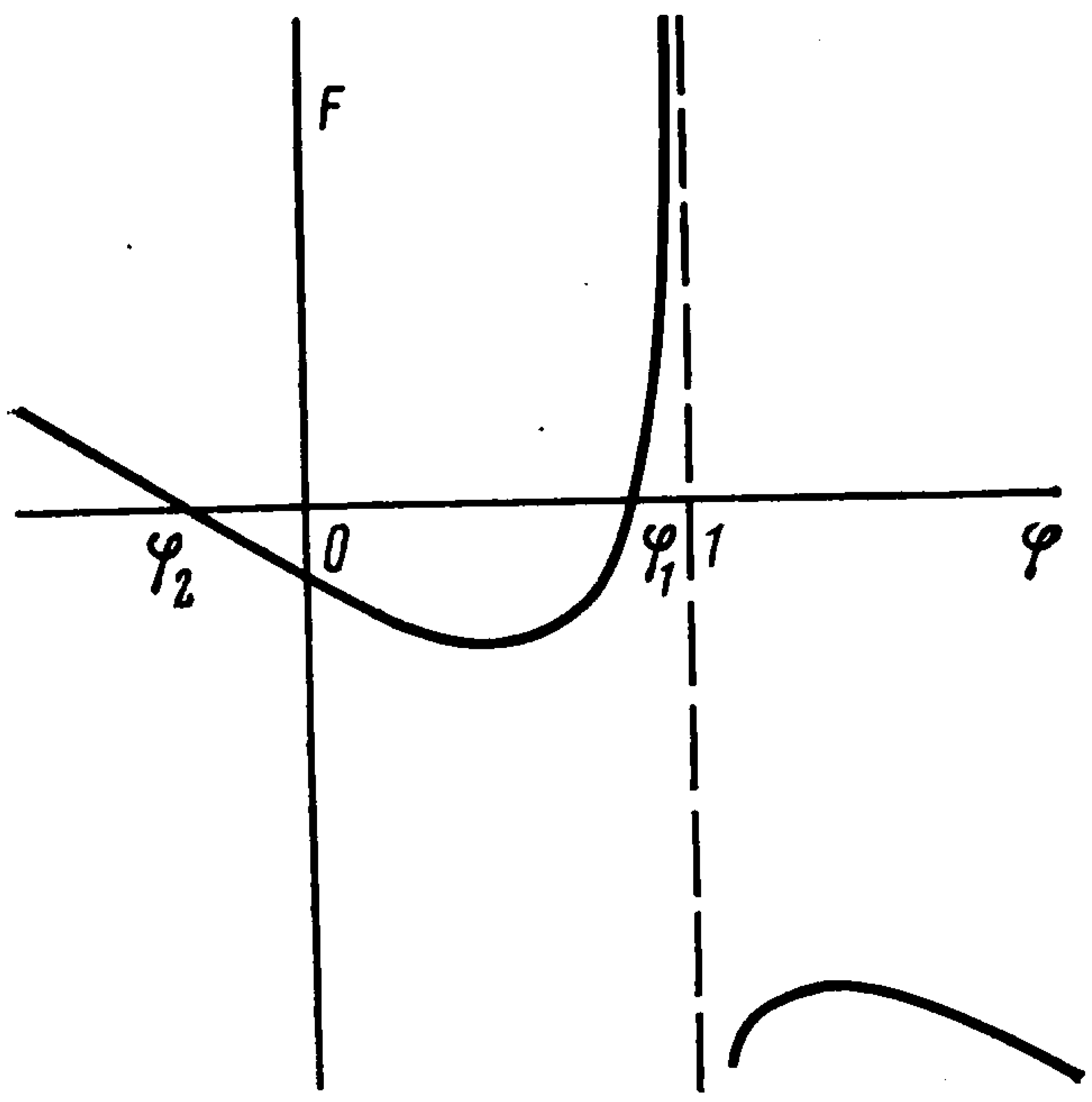
$$f(\varphi) = -F(\varphi),\quad H(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(s)\,ds,\quad H_m = H(\varphi_m)$$

пусть $g = g(H)$ — функция, обратная к $H = H(\varphi)$.

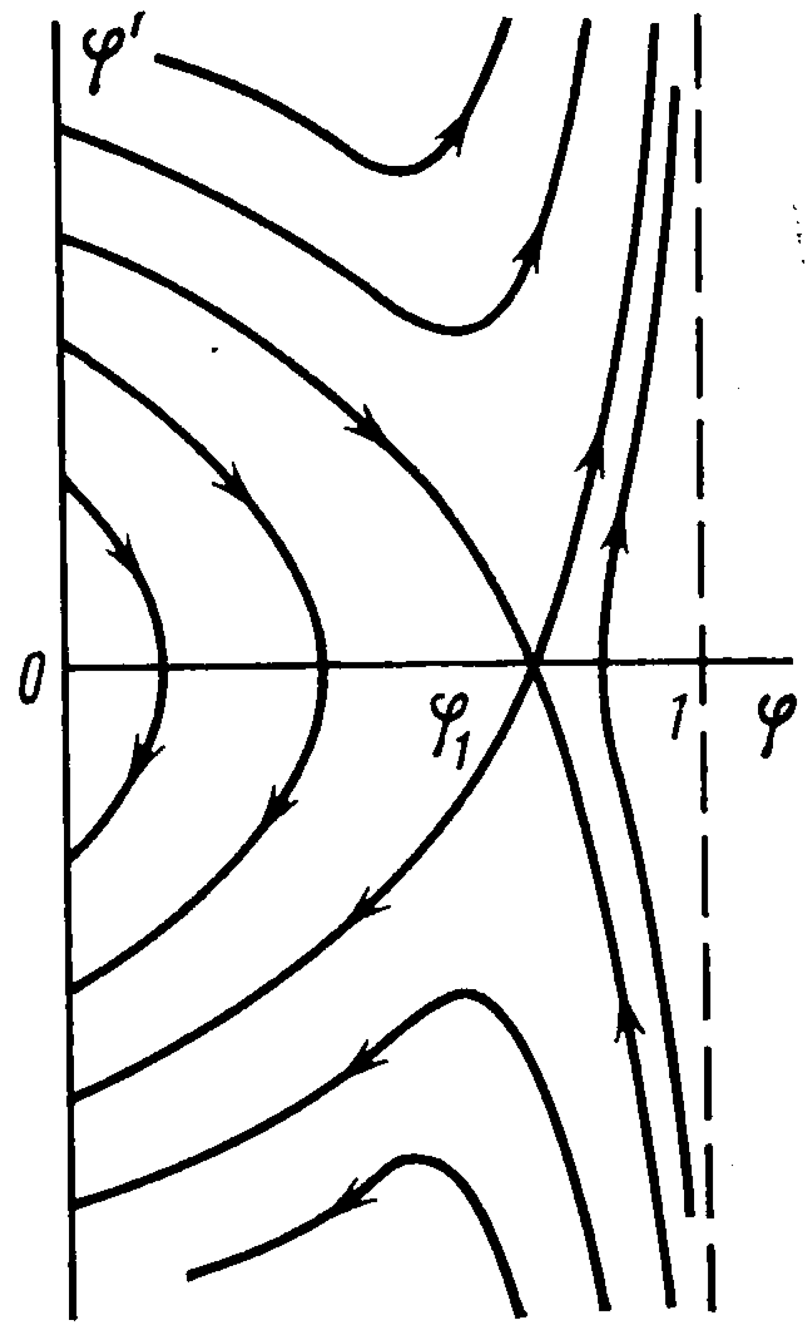
Тогда

$$W_1(\varphi_m) = \int_0^{H_m} [f \circ g(H)]^{-1}(H_m - H)^{-1/2}\,dH =$$

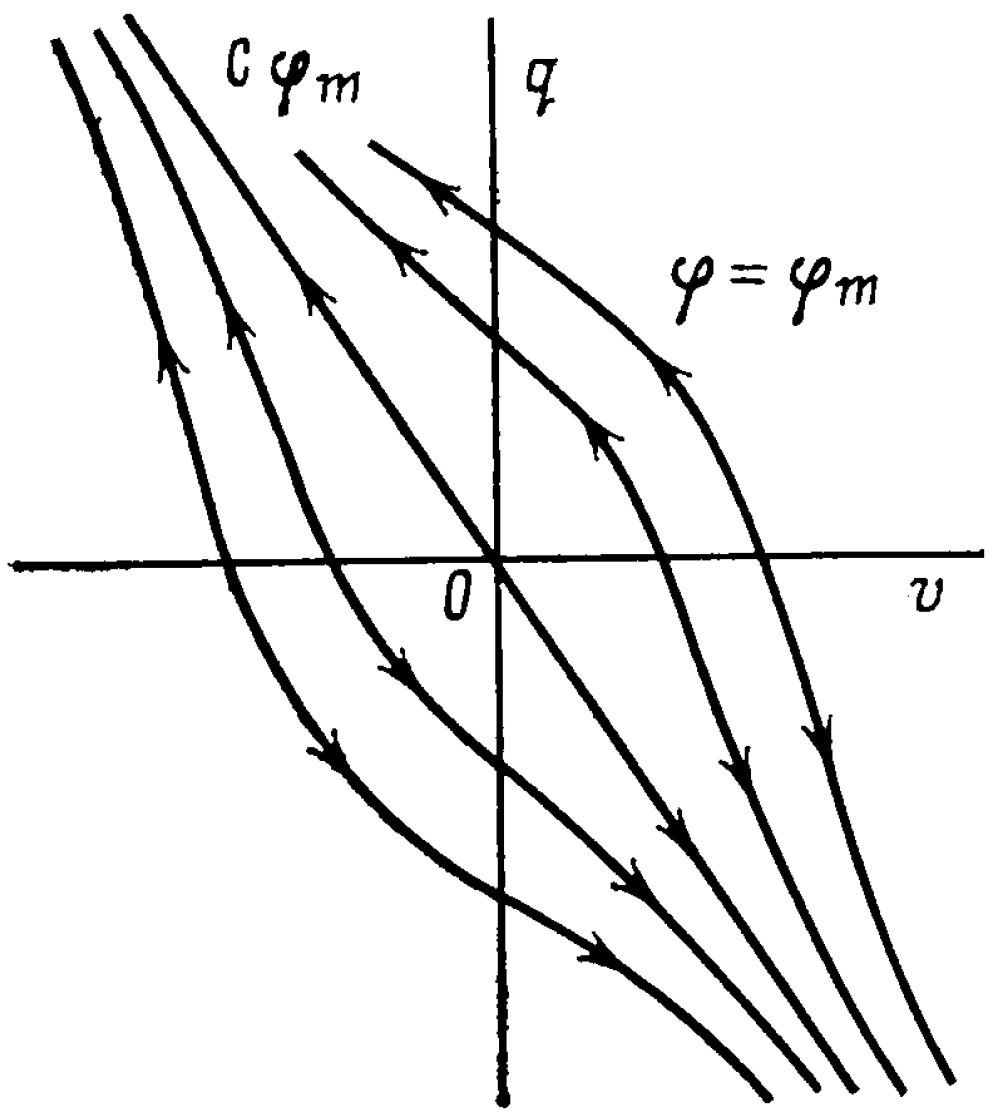
$$= 2^{-1/2}\int_0^1 [f \circ g(H_m\xi)]^{-1}(1-\xi)^{-1/2} H_m^{1/2}\,d\xi$$



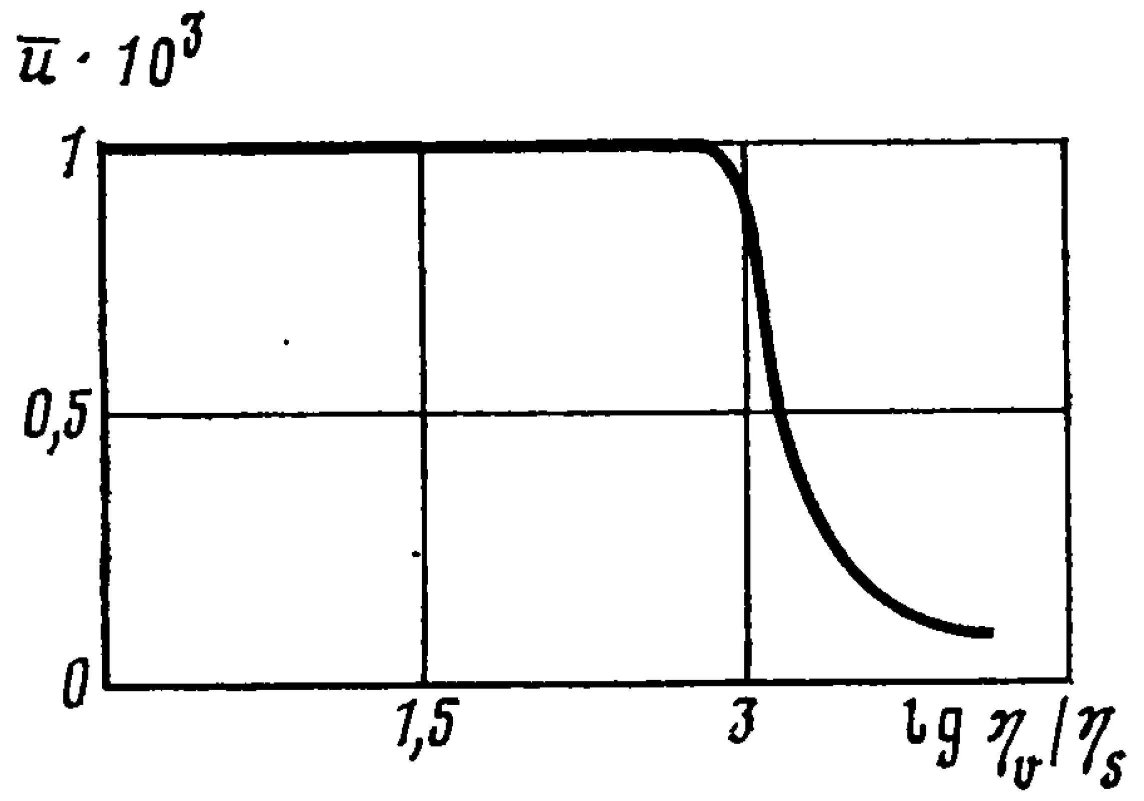
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Очевидно, что $W_1(0) = 0$ и $W_1(\varphi_m) \to +\infty$, если $\varphi_m \to \varphi_1$.

Покажем, что $dW_1(\varphi_m)/d\varphi_m > 0$. Для этого достаточно заметить, что

$$d\,[(f \circ g\,(H_m\xi))^{-1}H_m^{1/2}]/dH_m = 2^{-1}H_m^{-1/2}f^{-3}\,(f^2 - 2Hf') > 0$$

Действительно, функция $Q(H) \equiv [f \circ g\,(H)]^2 - 2Hf' \circ g\,(H)$ обладает очевидными свойствами: $Q(0) > 0$ и $Q'(H) = -2f^{-1}Hf'' \circ g\,(H) > 0$, откуда следует, что $Q(H) > 0$ на рассматриваемом интервале.

Итак, доказано, что $W_1(\varphi_m)$ монотонно возрастает на интервале $[0, \varphi_1[$ от 0 до $+\infty$. Поэтому уравнение (2.4) имеет единственное решение. Отсюда следует существование и единственность решения задачи (2.3) для $j = 1$.

Рассмотрим случай $j = 2$. Если ввести новую функцию $q = r^2$ и новый независимый параметр $\tau = \ln r$, то уравнение (2.3) может быть переписано в виде автономной системы (точка означает дифференцирование по τ)

(2.6) $$q^\cdot = 2q, \quad \varphi^\cdot = v, \quad v^\cdot = qF\,(\varphi)$$

Решение задачи (2.3) представляется траекторией системы (2.6), лежащей в множестве $\{(q, \varphi, v) \mid \varphi \in [0, \varphi_1[\}$ и проходящей через точки $A_0 = (0, \varphi_{m0}, 0)$ и $B_0 = (1, 0, v_0)$. Система (2.6) имеет особую кривую — ось $O\varphi$. Поведение траекторий системы вблизи этой кривой при $\varphi_m \in [0, \varphi_1[$ качественно представлено в проекции на плоскость Ovq на фиг. 3. Видно, что существует единственная траектория C_{φ_m}, выходящая из точки $A = (0, \varphi_m, 0)$ в физическую область $\{q > 0, v < 0\}$.

Пусть $q = q\,(\varphi_m, \tau)$, $\varphi = \varphi\,(\varphi_m, \tau)$, $v = v\,(\varphi_m, \tau)$ уравнение этой траектории. Исключая τ, можно получить функции $q = q\,(\varphi_m, \varphi)$ и $v = v\,(\varphi_m, \varphi)$. Имеет место соотношение

$$q(\varphi_m, \varphi) = 2^{1/2} \int\limits_{\varphi}^{\varphi_m} \left(- \int\limits_{l}^{\varphi_m} q(\varphi_m, s) F(s)\, ds \right)^{-1/2} q(\varphi_m, l)\, dl \tag{2.7}$$

Введем функцию $W_2(\varphi_m) = q(\varphi_m, 0)$. Уравнение

$$W_2(\varphi_m) = 1 \tag{2.8}$$

определяет φ_{m0} и, следовательно, решение задачи (2.3). Видно, что $W_2(0) = 0$.

Далее, используя соотношение (2.7), путем несложных, но длинных выкладок можно доказать, что $\partial q(\varphi_m, \varphi)/\partial \varphi_m > 0$ ($\varphi \in [0, \varphi_m]$) и, следовательно, $dW_2(\varphi_m)/d\varphi_m > 0$. Доказательство этого факта по существу аналогично доказательству неравенства $dW_1(\varphi_m)/d\varphi_m > 0$ и потому здесь не приводится. Ясно, также, что $W_2(\varphi_m) \to +\infty$ при $\varphi_m \to \varphi_1$ (в противном случае, устремляя в (2.7) φ_m к φ_1, получили бы противоречие). Поэтому уравнение (2.7) имеет единственное решение, откуда вытекает существование и единственность решения задачи (2.3) для $j = 2$.

Заметим, что

$$\varphi(y) = -(1-y)\int\limits_0^y d\xi F(\varphi(\xi)) - \int\limits_y^1 (1-\xi) F(\varphi(\xi))\, d\xi \quad (j = 1)$$

$$\varphi(r) = -\ln\frac{1}{r}\int\limits_0^r \xi\, d\xi F(\varphi(\xi)) - \int\limits_r^1 \xi\, d\xi F(\varphi(\xi)) \ln\frac{1}{\xi} \quad (j = 2)$$

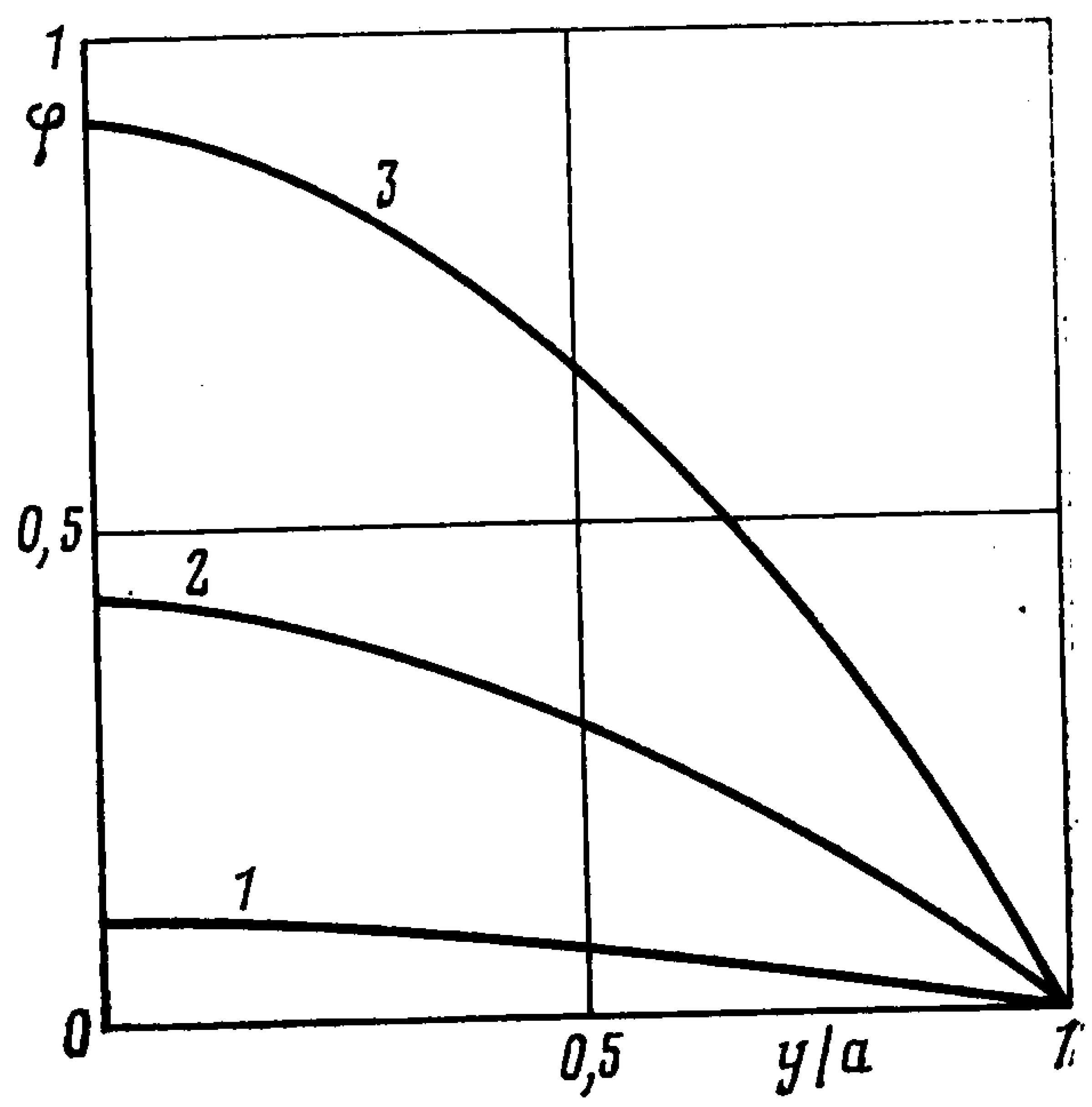
Оценивая члены этих тождеств с помощью неравенств $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{m0} < 1$, $\varphi^2(1 - \varphi)^{-1} < (1 - \varphi_{m0})^{-1}$, получаем неравенство (2.4).

Таким образом, показано, что при движении вязкой сжимаемой жидкости с уравнением состояния Тэйта при высоких плотностях между пластинками или в трубе круглого сечения реализуется выпуклый профиль скоростей, амплитуда которого экспоненциально возрастает вниз по течению. Скорость имеет вид $u = \bar{f}\varphi$, где $\bar{f} = AL(1 + \Delta p/A)^{x/L}[(\eta_v + {}^1/_3\eta_s)\ln(1 + \Delta p/A)]^{-1}$, а

$$\varphi = \varphi(y/a)\ (j = 1),\quad \varphi = \varphi(r/a)\ (j = 2)$$

— безразмерная функция, принимающая значения в интервале $[0, 1[$.

Для количественной оценки влияния объемной вязкости на течение жидкости уравнение (2.3) было решено численными методами для случая $j = 1$, $A\rho_0 a^2\eta_s^{-2} = 1$, $aL^{-1}\ln(1 + \Delta p/A) = 0{,}04$ и для различных значений η_v/η_s. На основании полученных численных результатов был построен график функции $\bar{u} = (\eta_v/\eta_s + {}^1/_3)^{-1}\varphi_{\max}$ в зависимости от $\lg \eta_v/\eta_s$ (фиг. 4). Эта функция отличается от максимальной скорости течения размерным множителем, не зависящим от η_v. Кроме того, для разных значений η_v/η_s были построены графики функции $\varphi(y/a)$, характеризующие профиль скорости течения (фиг. 5). Кривым *1*, *2*, *3* соответствуют значения $\eta_v/\eta_s = 100$, 400, 1000. Фиг. 4 и 5 иллюстрируют доказанное в п. 2 утверждение, что при возрастании объемной вязкости и при постоянстве прочих параметров задачи $\varphi_{\max}$ стремится к единице, а для максимальной скорости течения асимптотически выполняется равенство $u_{\max} = \bar{f}$.



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика. Т. 2. Ч. А. Свойства газов, жидкостей и растворов. М.: Мир, 1968. 487 с.
2. *Hayward A. T. J.* Compressibility equations for liquids: a comparative study.—Brit. J. Appl. Phys., 1967, v. 18, No. 7, p. 965—977.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1984