Проинтегрируем уравнение (7) в пределах от некоторых значений x_0', t_0' до текущих значений $x_1't'$ (штрихи в дальнейшем опустим). Значения x_0, t_0 можно вычислить исходя из заданной формы первоначального профиля, после слияния заднего и переднего фронтов.

$$x = At^{1/4}; \quad A = x_0 t_0^{-1/4} \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет собой уравнение линий скачка на плоскости xt. Эта линия пересекает семейство характеристик центрированной волны и при $x = (8a_0^{1/2}A^4/_3\,\gamma B_0^2 c)^{1/3}$ пересекает крайнюю левую характеристику, соответствующую заднему ударному фронту. При этом передний и задний скачки сольются. Из формулы (8) можно найти, что время t, за которое задний скачок нагонит передний, можно вычислить по формуле

$$t = \left(\frac{8a^{1/2}A}{3\gamma c B_0^2}\right)^{4/3} \tag{9}$$

Таким образом, первоначальный сигнал $B(x, t)$ с $B_{\max} > B^{\wedge}$, распространяющийся по нулевому фону в магнетике в случае зависимости H от B в виде (1), деформируется с сохранением площади сигнала в два ударных фронта, соединенных центрированной простой волной. С течением времени передний фронт начинает ослабевать за счет выхода спереди простой волны и набегания центрированной волны сзади. За время t (9) задний скачок нагонит передний и первоначальный сигнал деформируется в простую волну и замыкающий скачок, идущий по нулевому фону и изменяющий поле до значения $B = {}^3/_4 B_0$. Постепенно величина скачка уменьшится из-за расплывания простой волны, в то время как площадь сигнала будет оставаться постоянной (фиг. 2).

Поскольку зависимость H от B в виде (1) является частным случаем, описывающим первоначальный участок кривой намагничивая большинства магнетиков [1], найденное аналитическое решение качественно отражает картину эволюции слабого сигнала при начальном намагничивании.

Полученные выводы о характере изменения сигнала находятся в хорошем качественном соответствии с экспериментальным исследованием образования ударных волн при распространении по магнетику электромагнитного импульса в случае, когда перемагничивание магнетика происходит по петле гистерезиса [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бозорт Р.* Ферромагнетизм. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 461 с.
2. *Гапонов А. В., Островский Л. А., Фрейдман Г. И.* Ударные электромагнитные волны.— Изв. вузов. Радиофизика, 1967, т. 10, № 9—10, с. 1376—1413.
3. *Гапонов А. В., Фрейдман Г. И.* Об ударных электромагнитных волнах в ферритах.— ЖЭТФ, 1959, т. 36, вып. 3, с. 957—958.
4. *Коробейников В. П.* Задачи теории точечного взрыва в газах. М.: Наука, 1973. 278 с.
5. *Седова Г. Л.* Распространение электромагнитных волн при произвольной зависимости магнитной проницаемости от магнитной индукции.— ПММ, 1970, т. 44, вып. 3, с. 465—469.
6. *Белянцев А. М., Гапонов А. В., Дауме Э. Я., Фрейдман Г. И.* Экспериментальное исследование распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в волноводах, заполненных ферритом.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 5, с. 1699—1710.

Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1984

УДК 532.5

ОДНА ТОЧНАЯ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС

Вигдергауз С. Б.

Для произвольной системы твердых тел, поступательно движущихся в безграничном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости, получено неравенство, усиливающее известный результат Полиа — Шиффера [1, 2]. Указаны нетривиальные примеры достижения в оценке равенства, устанавливающие аналогию с обратной задачей теории упругости.

Обозначим через $S^+ = US_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ трехмерную область, занятую m абсолютно твердыми телами с ляпуновской границей $\Gamma = U\Gamma_i$ и общим объемом $V > 0$, S^- — дополнение S^+ до полного пространства — связную область, занятую покоящейся на бесконечности жидкостью единичной плотности, $\mathbf{M}$ — симметричный тензор коэффициентов присоединенных масс, отвечающий поступательному движению системы тел в направлении осей декартовой системы координат $X_1X_2X_3$, E — единичный тензор, $I_1(D)$, $I_2(D)$, $I_3(D)$ — инварианты произвольного симметричного тензора, т. е. коэффициенты характеристического полинома

(1) $$I_1 = d_{11} + d_{22} + d_{33}$$

(2) $$I_2 = d_{12}^2 + d_{23}^2 + d_{13}^2 - d_{11}d_{22} - d_{22}d_{33} - d_{11}d_{33}$$

(3) $$I_3 = d_{11}d_{22}d_{33} + 2d_{12}d_{23}d_{13} - d_{11}d_{23}^2 - d_{22}d_{13}^2 - d_{33}d_{12}^2$$

Индексы 1, 2, 3 далее обозначают индексацию по соответствующим осям.

В [1, 2] сформулирована теорема: средняя присоединенная масса тела или системы произвольных тел в данных выше условиях не меньше этой величины для сферы того же объема

(4) $$\frac{1}{3}(\mu_{11}V + \mu_{22}V + \mu_{33}V) \geqslant {}^1/_2V$$

или в равносильной форме:

(5) $$I_1(E + \mathbf{M}) \geqslant {}^9/_2$$

(μ_{lk} — компоненты $\mathbf{M}$).

Приведенное в [2] доказательство неравенства (4) исходит из вариационного принципа Дирихле

(6) $$K_0 = \sup K(\varphi)$$

$$K(\varphi) = \int\limits_{\Gamma} \varphi u_l n^l \, d\Gamma - \frac{1}{2}\int\limits_{S^+} \frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

где кинетическая энергия K_0 — квадратичная форма от компонент вектора скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

(7) $$K_0 = {}^1/_2V(\mathbf{Mu}, \mathbf{u})$$

$\varphi(x_1, x_2, x_3)$ — произвольная функция в S^-, убывающая на бесконечности, n^l — компоненты вектора единичной нормали к любой точке Γ, направленного внутрь области S^+. В формуле (6) и ниже имеется в виду суммирование по повторяющимся индексам.

Для получения оценки (4) функция φ из (6) выбирается в виде линейной комбинации первых производных по координатам от ньютоновского потенциала масс единичной плотности, распределенных в объеме тел

$$\varphi = a^l \frac{\partial\chi}{\partial x_l}, \quad \chi = \int\limits_{S^+} \frac{dx_1'\, dx_2'\, dx_3'}{[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2]^{1/2}}$$

Максимизация $K(\varphi)$ по a^l ($l = 1, 2, 3$) приводит к неравенству

(8) $$K_0 \geqslant \frac{V}{2} b^l u_l^2, \quad b^l = \frac{A_{ll}}{1 - A_{ll}}$$

где A_{ll} — диагональные элементы тензора A с компонентами

$$A_{lj} = -\frac{1}{4\pi V}\int\limits_{S^+} \frac{\partial^2\chi}{\partial x_l\, \partial x_j}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Из свойств $\chi(x_1, x_2, x_3)$ следует, что

(9) $$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 1$$

Соотношение (8), записанное в системе координат, оси которой направлены по главным осям A, обращается в равенство, в частности для любого трехосного эллипсоида. Далее в доказательстве оценка (8) огрубляется, оставаясь равенством при $n = 1$ уже лишь для сферы.

С целью уточнения оценки запишем (8) с учетом (7) в виде

(10) $$((\mathbf{M} - B)\,\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0$$

B — диагональная матрица с компонентами b_1, b_2, b_3, удовлетворяющими равенству

(11) $$b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3 + 2b_1b_2b_3 = 1$$

которое следует из (8) и (9).

В силу произвольности вектора $\mathbf{u}$ из (10) вытекают условия неотрицательности квадратичной формы с матрицей $(\mathrm{M} - B)$ [3]

(12) $$\mu_{11} \geqslant b_1,\ \mu_{22} \geqslant b_2,\ \mu_{33} \geqslant b_3$$

а также условие

(13) $$(\mu_{11} - b_1)(\mu_{22} - b_2) - \mu_{12}^2 \geqslant 0$$

два аналогичных ему, полученных из (13) очевидной перестановкой индексов, и наконец

(14) $$\det(\mathrm{M} - B) \geqslant 0$$

Из (13) и (12) следует, что

(15) $$\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 \geqslant b_1b_2$$

(16) $$- b_1\mu_{22} - b_2\mu_{11} \geqslant \mu_{12} - \mu_{11}\mu_{22} - b_1b_2$$

Почленно складывая неравенство (15) с ему аналогичными, имеем из (2)

(17) $$- I_2(\mathrm{M}) \geqslant b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3$$

Раскрывая теперь (14) и учитывая (3), получим

$$I_3(\mathrm{M}) \geqslant b_1b_2b_3 - b_1b_2\mu_{33} - b_2b_3\mu_{11} - b_1b_3\mu_{22} + b_1(\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}^2) + b_2(\mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}^2) + b_3(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2)$$

Используя три неравенства типа (16) и группируя члены в правой части полученного соотношения, имеем

$$2I_3(\mathrm{M}) \geqslant b_1(\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}^2) + b_2(\mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}^2) + b_3(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2) - b_1b_2b_3$$

Из (15) теперь следует, что

(18) $$2I_3(\mathrm{M}) \geqslant 2b_1b_2b_3$$

Складывая (17) и (18), находим, принимая во внимание (11), инвариантную оценку коэффициентов μ_{lk}

(19) $$2I_3(\mathrm{M}) - I_2(\mathrm{M}) \geqslant 1$$

Непосредственно проверяется, что для произвольной невырожденной матрицы третьего порядка верно тождество

$$I_1((E + D)^{-1}) = \frac{3 + 2I_1(D) + I_2(D)}{1 + I_1(D) + I_2(D) + I_3(D)}$$

при помощи которого (19) приводится к эквивалентному виду

(20) $$I_1((E + \mathrm{M})^{-1}) \leqslant 2$$

линейному относительно элементов $(E + \mathrm{M})^{-1}$. Видно, что неравенства (19), (20) верны для произвольного трехосного эллипсоида.

Записав соотношение между средними гармоническим и арифметическим [4] относительно составляющих тензора $(E + \mathrm{M})$ в его диагональном представлении

$$\frac{3 + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33}}{3} = \frac{I_1(E + \mathrm{M})}{3} \geqslant$$
$$\geqslant 3\left(\frac{1}{1 + \mu_{11}} + \frac{1}{1 + \mu_{22}} + \frac{1}{1 + \mu_{33}}\right)^{-1} = \frac{3}{I_1((E + \mathrm{M})^{-1})}$$

имеем из (20) неравенство Полиа — Шиффера. Обратное, разумеется, неверно.

Для двумерного тензора коэффициентов Λ оценка типа (20) имеет вид $I_1((E + \Lambda)^{-1}) \leqslant 1$ или, что то же самое, $I_2(\Lambda) \geqslant 1$. Знак равенства, как показано в [5], достигается на стационарной (для малых вариаций формы границы) точке функционала присоединенной массы в направлении x_1, если общая площадь системы тел и их присоединенная масса в направлении x_2 заданы.

Из доказательства условия (20) видно, что эта оценка обращается в равенство на телах такой формы, когда $\partial^2\chi/\partial x_l \partial x_j$ постоянны в S^+, или, по непрерывности χ и ее первых производных, когда на искомой границе верны соотношения

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = a^l x_l^2 + l_i;\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_i$$
$$\partial\varphi/\partial n = 2a^l x_l n^l,\quad n = (n^1, n^2, n^3),\quad i = 1, 2, \ldots, m$$

которые порождаются также [6] обратной задачей теории упругости — об оптимизации напряженного состояния однородного и изотропного линейно-упругого пространства S^- с полостями, нагруженного на бесконечности по осям усилиями q_l ($l = 1, 2, 3$). Под оптимизацией понимается достижение за счет управления формой границы минимально возможного локального критерия Мизеса — максимума по S^- второго инварианта девиатора тензора напряжений. При этом функции $\partial\chi/\partial x$ имеют смысл упругих смещений точек среды по осям, $2a_l = (Q - 2q_l)/q_l$, $Q = q_1 + q_2 + q_3$, постоянные C_l остаются неопределенными. Для такой границы М и A одновременно приводятся к диагональному виду.

В отличие от плоского случая [5] фактическое отыскание границы при $m > 1$ весьма сложно. В осесимметричном варианте ($q_1 = q_2$, $\mu_{11} = \mu_{22}$) предложено [7] нелинейное интегральное уравнение относительно координат точек меридионального сечения границы как функций длины дуг и приведены численные результаты его решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. Гостехиздат, 1956. 396 с.
5. *Вигдергауз С. Б.* Обратная задача двумерной теории упругости в гидродинамической постановке — ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 639—643.
6. *Вигдергауз С. Б.* Обратная задача трехмерной теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 90—93.
7. *Вигдергауз С. Б.* Оптимальные полости в упругом пространстве с осевой симметрией.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, № 3, с. 51—58.

Ленинград

Поступила в редакцию
7.V.1984

УДК 532.5

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ

Белоненко В. Н., Динариев О. Ю.

Изучается течение вязкой сжимаемой жидкости в цилиндрических трубах с учетом влияния объемной вязкости [1]. Процесс предполагается баротропным, что имеет место, например, когда можно пренебречь тепловыделением или когда жидкость обладает высокой теплопроводностью. Обсуждается вопрос о корректных граничных условиях для системы определяющих уравнений. Далее задача о течении жидкости с уравнением состояния Тэйта решается методом разделения переменных. Приводятся доказательства существования и единственности решений для получаемых обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется асимптотика скорости при возрастании объемной вязкости. Коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости везде считаются постоянными.

1. Будем параллельно рассматривать плоскую и пространственную задачи об одномерном и установившемся течении в цилиндрической области между неподвижными стенками. Определяющая система уравнений (Навье — Стокса, неразрывности, состояния) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} &\rho u u_{,x} = [-p + \zeta u_{,x}]_{,x} + \eta_s (\partial_x^2 + \Delta_j)\, u \\ &0 = \mathrm{grad}_j\, [-p + \zeta u_{,x}] \\ &(\rho u)_{,x} = 0, \; p = p\,(\rho); \; \zeta = \eta_v + {}^1/_3\eta_s \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u — скорость течения, направленная по оси Ox, η_v и η_s — коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости. Параметр j принимает два значения: 1 и 2, что соответствует течению между плоскостями и в трубе. Для $j = 1$ $\Delta_1 = \partial_y^2$, $\mathrm{grad}_1 = \partial_y$ и все функции предполагаются гладкими в замкнутой области

$$G_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in [0,\; L],\; y \in [-a,\; a]\}$$