

УДК 521.35

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Косенко И. И.

Изучается устойчивость точек либрации трехосного однородного гравитирующего эллипсоида, вращающегося вокруг одной из своих главных центральных осей инерции. Рассматривается плоское движение пассивной точки единичной массы. В пространстве параметров задачи строится область устойчивости и резонансные множества для всех изучаемых резонансов. Проводится систематический анализ устойчивости точки либрации с применением соответствующих теорем для положений равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Качественное исследование геометрической структуры области устойчивости проведено в [1, 2].

Если эллипсоид — фигура вращения вокруг полярной центральной оси инерции [1], то относительные равновесия не изолированы и заполняют окружность в экваториальной плоскости. Если же экваториальные полуоси различны, то у эллипсоида могут существовать до четырех изолированных положений относительного равновесия. Условия существования внешних к эллипсоиду точек либрации в этой задаче, а также канонические уравнения движения в окрестности изучаемого положения равновесия получены в [1]. В [1, 2] введено и использовано подходящее пространство механических параметров задачи.

1. Область устойчивости. Уравнения движения пассивной точки в окрестности относительного равновесия имеют вид

$$(1.1) \quad \dot{q}_i = H_{p_i}, \quad \dot{p}_i = -H_{q_i} \quad (i = 1, 2)$$

где функция Гамильтона разлагается в степенной ряд

$$(1.2) \quad H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_4(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \dots$$

Однородные формы $H_k(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ($k = 2, 3, 4$) в рассматриваемой задаче имеют представление

$$(1.3) \quad \begin{aligned} H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= h_{2000}q_1^2 + h_{1001}q_1p_2 + h_{0200}q_2^2 + h_{0110}q_2p_1 + \\ &+ h_{0020}p_1^2 + h_{0002}p_2^2 \\ H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= h_{3000}q_1^3 + h_{1200}q_1q_2^2, \quad H_4(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h_{4000}q_1^4 + \\ &+ h_{2200}q_1^2q_2^2 + h_{0400}q_2^4 \end{aligned}$$

Нужные в дальнейшем коэффициенты ряда Тейлора вычислены в виде

$$(1.4) \quad \begin{aligned} h_{2000} &= -(\varphi_2 + \varphi_3)/(2\varphi_1), \quad h_{1001} = -1, \quad h_{0200} = \varphi_2/(2\varphi_1) \\ h_{0110} &= 1, \quad h_{0020} = h_{0002} = 1/2 \\ h_{3000} &= (1/\beta_2^2 + 1/\beta_3^2)/(3\varphi_1\beta_2\beta_3), \quad h_{1200} = 1/(\varphi_1\beta_2^2\beta_3) \\ h_{4000} &= -\xi_0[(1/\beta_2^2 + 1/\beta_3^2)^2 + 2(1/\beta_2^4 + 1/\beta_3^4)]/(12\varphi_1\beta_2\beta_3) \\ h_{2200} &= \xi_0(3/\beta_2^2 + 1/\beta_3^2)/(2\varphi_1\beta_2^3\beta_3), \quad h_{0400} = -\xi_0/(4\varphi_1\beta_2^5\beta_3) \\ \beta_i &= (\nu + \alpha_i)^{1/2} \quad (i = 2, 3) \end{aligned}$$

где механические параметры задачи — α_1, α_2, ν (пространство параметров трехмерно). Остальные величины от них зависят: $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$, $\nu = \xi_0^2 - \alpha_1$. Здесь α_1 — квадрат экваториальной полуоси эллипсоида, на продолжении которой лежит изучаемая точка либрации [1], α_2 — квадрат перпендикулярной ей экваториальной полуоси, α_3 — квадрат полярной полуоси (зависимый параметр), ξ_0 — расстояние от точки либрации

до центра эллипсоида. Все величины — безразмерные.

Далее необходимо ввести эллиптические параметры [1]

$$(1.5) \quad \varphi_i = \int_v^{+\infty} \{(\alpha_i + u)^{-1} [(\alpha_1 + u)(\alpha_2 + u)(\alpha_3 + u)]^{-1/2}\} du \quad (i = 1, 2, 3)$$

Пространство параметров задачи — призма, определяемая формулой

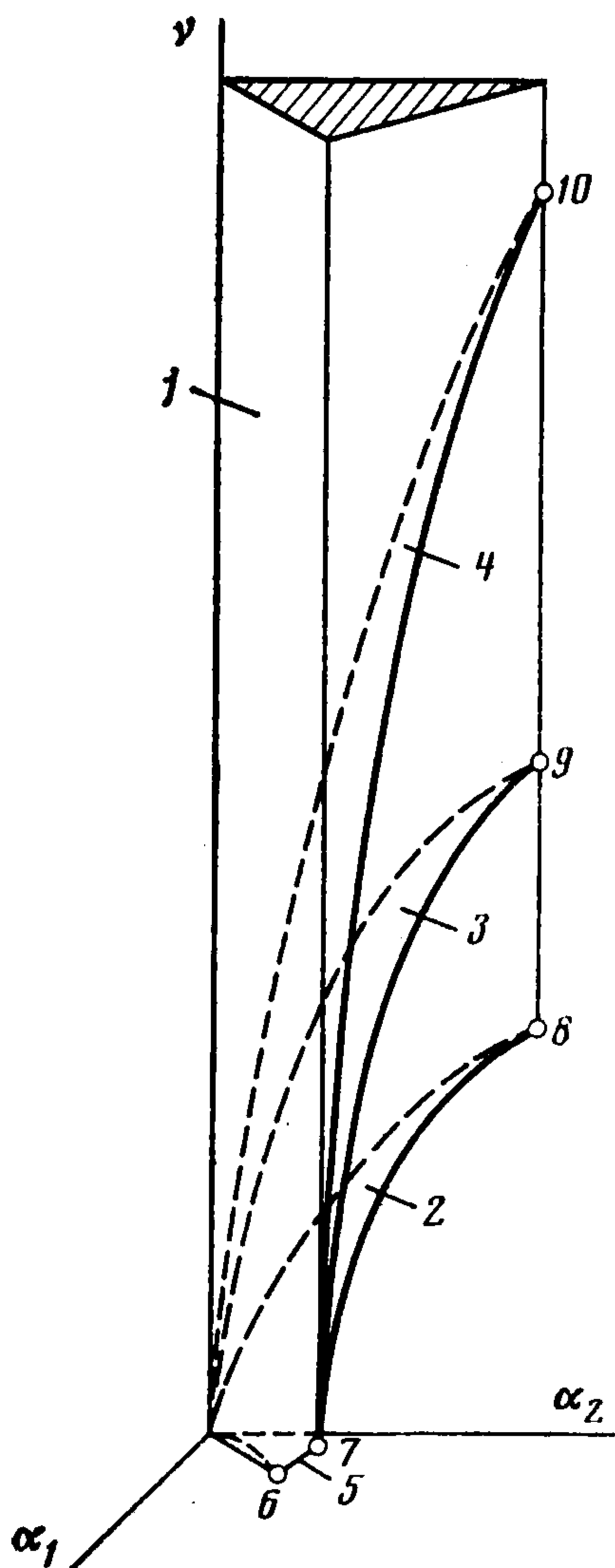
$$(1.6) \quad \Pi^3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, v) : \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 < 1, v > 0\}$$

Частоты нормальных колебаний плоского движения

$$(1.7) \quad \omega_{1,2} = \{1 - h/2 \pm [(g + h/2)^2 - 2h]^{1/2}\}^{1/2}, \quad 0 \leq \omega_2 \leq \omega_1$$

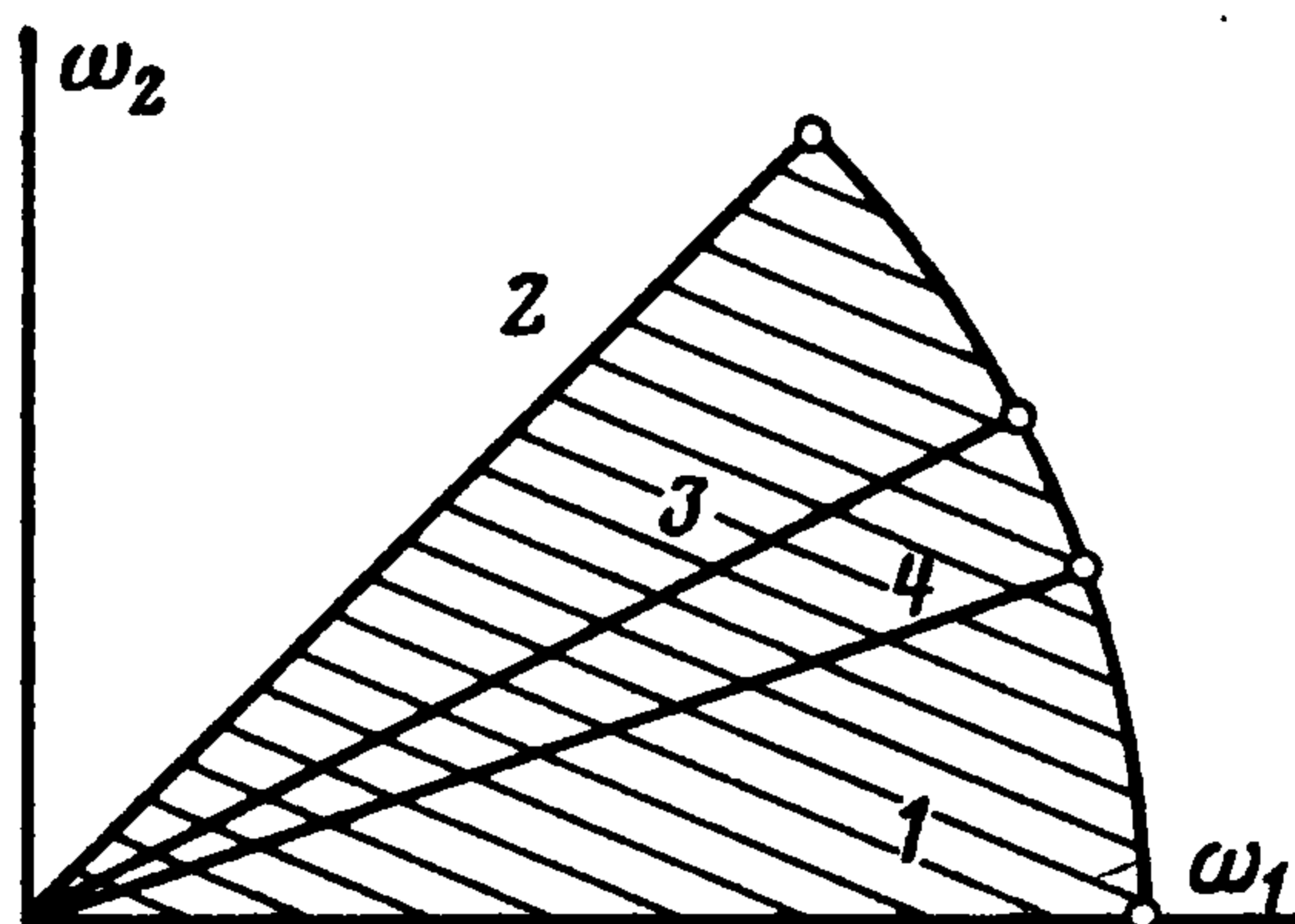
$$g = \varphi_2/\varphi_1, \quad h = \varphi_3/\varphi_1$$

Качественные результаты [1, 2] позволили впоследствии точно построить область устойчивости и резонансные поверхности (фиг. 1). Формулы (1.7), (1.5) определяют отображение $\Omega : (\alpha_1, \alpha_2, v) \mapsto (\omega_1, \omega_2)$ пространства параметров Π^3 в частотное пространство $\mathbb{R}_+^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0\}$. В \mathbb{R}_+^2 условия устойчивости системы первого приближения имеют вид (фиг. 2): $0 < \omega_2 < \omega_1, \omega_1^2 + \omega_2^2 < 2$. Они определяют множество $\Sigma \subset \mathbb{R}_+^2$. Обозначим $St = \Omega^{-1}(\Sigma)$ — область устойчивости в Π^3 . Дуга окружности $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2$ соответствует условию $h = 0$ (или $\varphi_3 = 0$). Из механического смысла задачи ясно, что всегда $\varphi_3 > 0$ (поскольку величины $\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3$). Это неравенство приводит к соотно-



Фиг. 1

шению $\omega_1^2 + \omega_2^2 < 2$. Множества, соответствующие одно другому при отображении $\Omega : \Pi^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, обозначены на фиг. 1 и 2 одинаковыми цифрами. Резонансным прямым 1 — 4 (фиг. 2) соответствуют поверхности 1 — 4 (фиг. 1) резонансов первого ($\omega_2 = 0$), второго ($\omega_1 = \omega_2$), третьего ($\omega_1 = 2\omega_2$) и четвертого ($\omega_1 = 3\omega_2$) порядков. Прообраз точки двойного резонанса ($\omega_1 = \omega_2 = 0$) есть прямолинейный интервал 5 (фиг. 1).



Фиг. 2

Определим границу (в топологии Π^3) области устойчивости $St \subset \Pi^3$. Она состоит из: 1) полубесконечного участка S_1 (множество 1) плоскости $\alpha_1 = \alpha_2$, ограниченного прямыми: 5; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$; $\alpha_1 = \alpha_2, v = 0$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ — поверхности резонанса первого порядка; 2) поверхности резонанса второго порядка S_2 (множество 2); 3) интервала 5 двойного резонанса $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Кроме того, рассмотрим поверхности S_3, S_4 резонансов третьего и четвертого порядков (множества 3 и 4 на фиг. 1). Ясно, что $S_3 \subset St$ и $S_4 \subset St$. Отдельно устойчивость будет проверена в не-

резонансном множестве $S_0 = St \setminus (S_3 \cup S_4)$. Для точек 6 — 10 (фиг. 1) в Π^3 вычислены соответствующие координаты: $(0,43 \dots; 0,43 \dots; 0)$, $(0,5; 0,5; 0,2408 \dots)$, $(0; 1; 6,2308 \dots)$, $(0; 1; 10, 2799 \dots)$ $(0; 1; 19, 0293 \dots)$.

2. Резонанс первого порядка. Резонанс первого порядка реализуется лишь на границе области устойчивости в первом приближении и соответствует случаю второй нулевой частоты: $\omega_2 = 0$. Поэтому на границе S_1 , включая интервал 5 двойного резонанса, справедливо равенство $g = 1$, откуда $\varphi_1 = \varphi_2$. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод о том, что при резонансе первого порядка имеем эллипсоид вращения, у которого равны экваториальные полуоси: $\alpha_1 = \alpha_2$. Точка либрации, если она существует, не изолирована. Относительные равновесия заполняют целую окружность в экваториальной плоскости, а в инерциальной системе отсчета являются решениями уравнений движения спутника на круговой орбите.

Известно, что такие решения, вообще говоря, неустойчивы по Ляпунову, если учитывать все фазовые переменные. Причиной этого является систематический сдвиг по долготе вдоль экваториальной орбиты. Поэтому обычно исследуется устойчивость круговых орбит по части переменных [3]. В данной работе устойчивость точки либрации означает устойчивость положения относительного равновесия во вращающейся системе координат или, что эквивалентно, устойчивость периодического движения по всем фазовым переменным.

Следуя, например, работе [3], можно проверить, что для любого эллипсоида вращения в окрестности круговой орбиты имеется систематический сдвиг по долготе. Поэтому можно сделать вывод, что в случае одной нулевой частоты: $\omega_2 = 0$, при резонансе первого порядка (а также и при двойном резонансе: $\omega_1 = \omega_2 = 0$), точка либрации в данной задаче всегда неустойчива.

3. Резонанс второго порядка. Нелинейный анализ устойчивости при $(\alpha_1, \alpha_2, \nu) \in S_2$ проведем в соответствии с работами [4, 5]. Уравнения плоского движения в окрестности точки либрации в локальных канонических переменных можно представить в виде: $\dot{z} = IH_z$, где z — четырехмерный вектор: $z = \text{col}(q_1, q_2, p_1, p_2)$, I — симплектическая матрица четвертого порядка: $I^2 = -E$. Функция Гамильтона в соответствии с (1.2) представляется в виде ряда

$$H(z) = H_2(z) + H_3(z) + \dots$$

Можно проверить, что на поверхности S_2 резонанса второго порядка (случай равных частот: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$) у матрицы $I(H_2)_{zz} - i\omega E$ минор M_{14} (вычеркивается первая строка и четвертый столбец) не равен нулю. Значит, при $(\alpha_1, \alpha_2, \nu) \in S_2$ собственное число $i\omega$ имеет непростой элементарный делитель. Поэтому, согласно [4], линейным каноническим преобразованием $z = NZ$ ($Z = \text{col}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$) функцию Гамильтона можно привести к такому виду, что однородная форма наинизшего порядка H_2 представится следующим образом:

$$H_2(z) = F_2(Z) = (P_1^2 + P_2^2)/2 + \omega(Q_1P_2 - Q_2P_1)$$

где частота определяется равенством: $\omega = (1 - h/2)^{1/4}$. Матрица симплектического преобразования имеет вид:

$$N = (a_{ij})(i, j = 1, \dots, 4), a_{11} =$$

$$\begin{aligned}
&= -1/(1+a)^{1/2}, \quad a_{22} = 1/(1-a)^{1/2}, \quad a_{41} = a/(1+a)^{1/2} \\
a_{32} &= -a/(1-a)^{1/2}, \quad a_{33} = -(2-a^2)/\{2[(1-a^2)(1-a)]^{1/2}\} \\
a_{44} &= (2-a^2)/\{(1-a^2)(1+a)\}^{1/2}, \quad a_{23} = a/\{2[1-a^2)(1-a)]^{1/2}\} \\
a_{14} &= -a/\{2[(1-a^2)(1+a)]^{1/2}\}, \quad a = (h/2)^{1/2}
\end{aligned}$$

Остальные элементы матрицы N равны нулю. Преобразованный гамильтониан определяется равенствами

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad F(Z) &= F_2(Z) + F_3(Z) + \dots, \quad F_k(Z) = \\
&= \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=k} f_{i_1 i_2 j_1 j_2} Q_1^{i_1} Q_2^{i_2} P_1^{j_1} P_2^{j_2}
\end{aligned}$$

где $F_k(Z)$ — однородные формы степени k . Нелинейным нормализующим преобразованием $Z \mapsto \zeta$ функцию Гамильтона можно привести к виду

$$\begin{aligned}
\Lambda(\zeta) &= \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \omega(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + A(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \sum_{k=5}^{\infty} \Lambda_k(\zeta) \\
\zeta &= \text{col}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)
\end{aligned}$$

Справедлива теорема [5]: если $A > 0$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову; если $A < 0$, то положение равновесия по Ляпунову неустойчиво.

Для вычисления коэффициента A нужно применить формулы, полученные в [5]. Проверка на ЭВМ показала, что при любых $(\alpha_1, \alpha_2, \nu) \in S_2$ величина $A > 0$, таким образом точка либрации устойчива по Ляпунову.

4. Резонанс третьего порядка. В пространстве параметров множество, где выполняются резонансные соотношения для резонанса третьего порядка, непусто и, как уже было указано в п. 1, определяется равенством $S_3 = \Omega^{-1}\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 = 2\omega_2\}$ (S_3 — поверхность в пространстве Π^3). Как и всякий слой в St , определенный равенством

$$(4.1) \quad S_{k+1} = \Omega^{-1}\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 = k\omega_2, k > 1, k \in \mathbf{R}\}$$

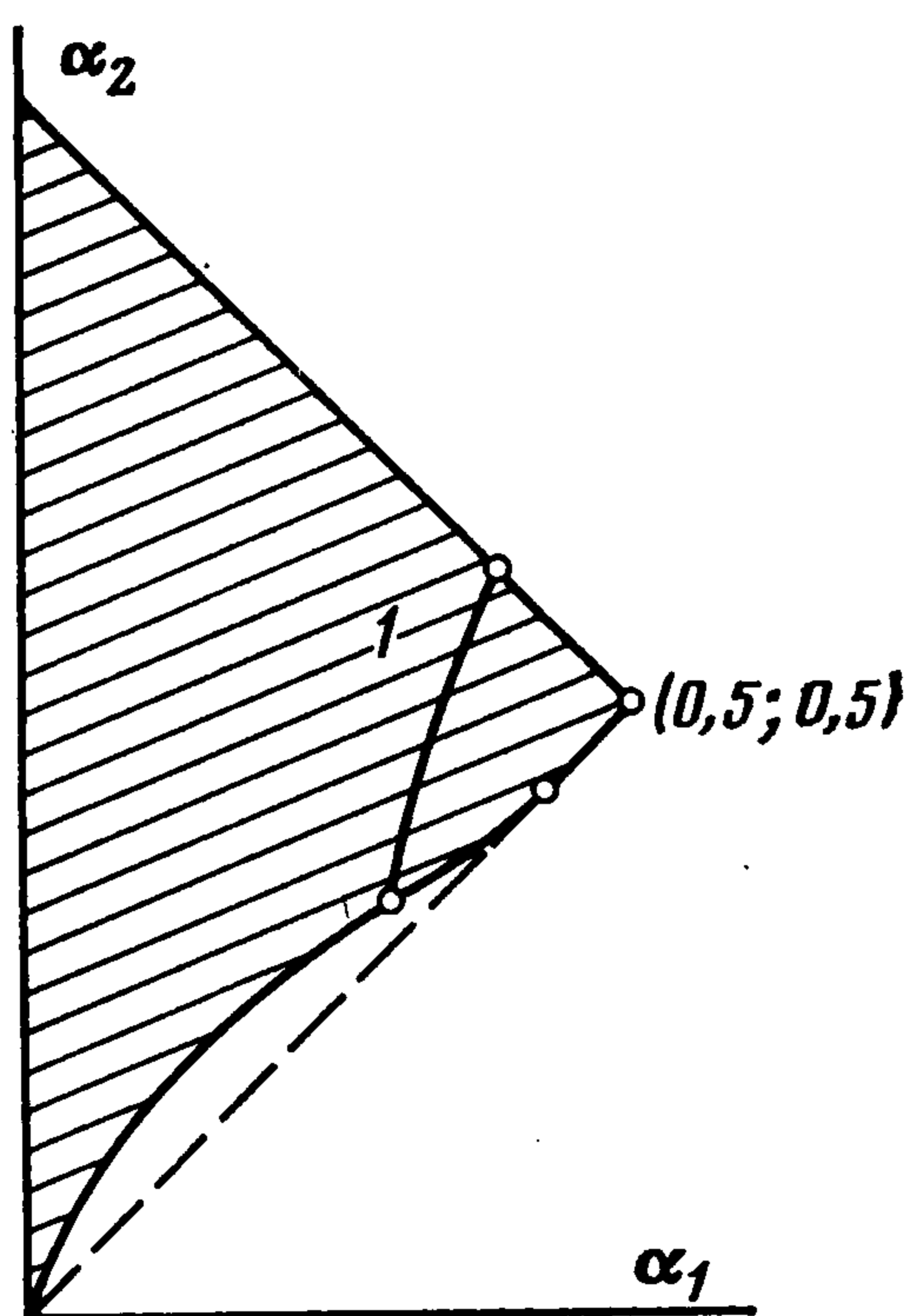
поверхность S_3 взаимно однозначно проецируется на плоскость параметров (α_1, α_2) (на фиг. 3 эта проекция заштрихована). Интерпретация результатов исследования устойчивости в резонансных случаях оказывается наглядной и удобной, поскольку об этом свойстве можно говорить в терминах величин двух экваториальных полуосей эллипсоида. Точно так же представим диаграмму областей устойчивости и неустойчивости для резонанса четвертого порядка. Таким образом, по форме эллипсоида можно будет судить об устойчивости точки либрации.

В дальнейшем придется изучать задачу во внутренних точках области St . На границе St исследование полностью завершено в пп. 2, 3, поскольку $Fr St = S_1 \cup S_2 \cup I_{12}$, где I_{12} — прямолинейный интервал 5 (фиг. 1) двойного резонанса: $\omega_1 = \omega_2 = 0$, определяемый соотношениями: $\alpha_1 = \alpha_2$, $(1-c)\nu + 1 = (2+c)\alpha_1$. Величина c — решение уравнения

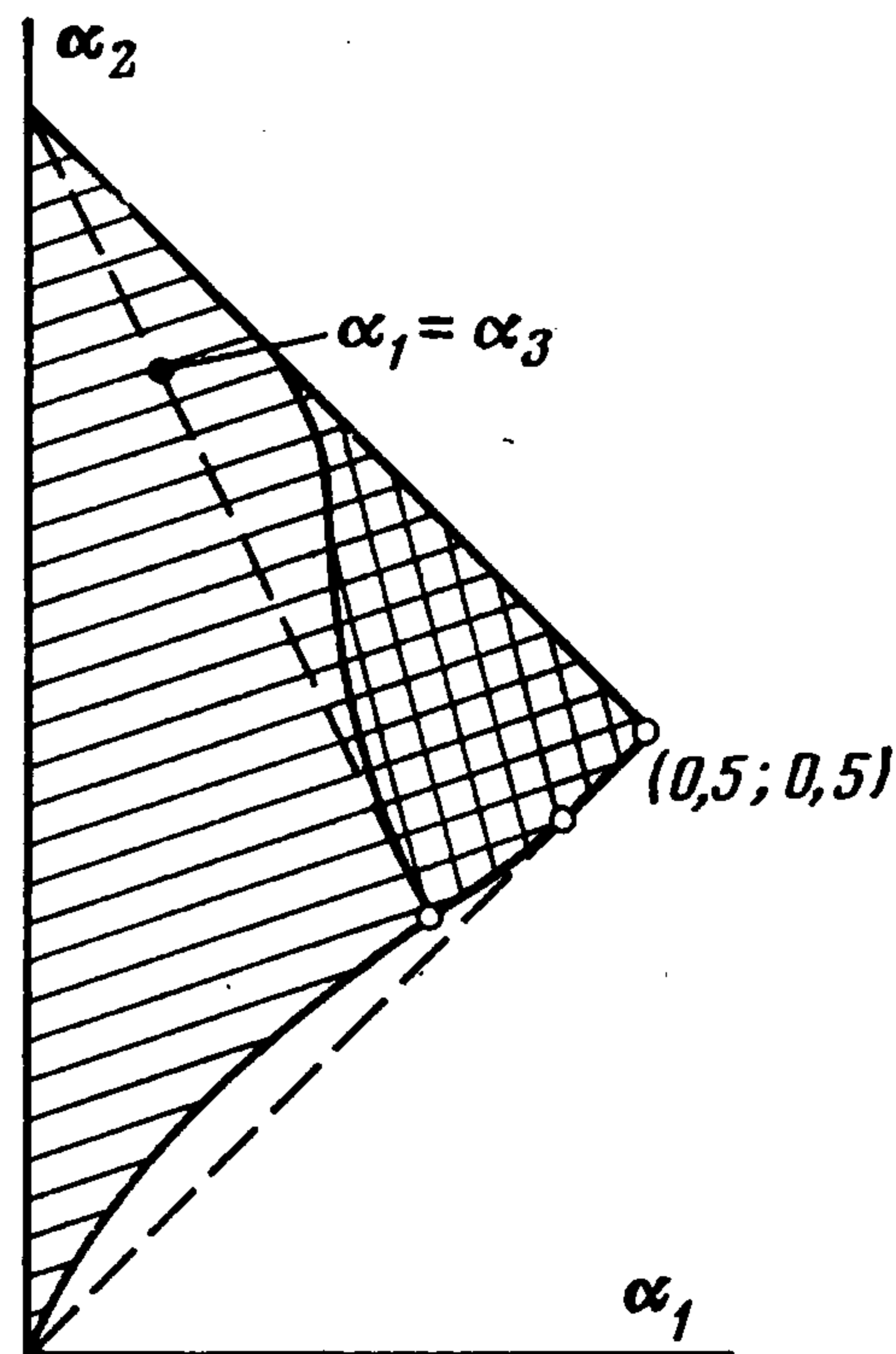
$$[(1-c)/c]^{1/2} + [c(1-c)]^{1/2} = \text{arcctg}[c/(1-c)]^{1/2}$$

Внутри области St отсутствуют резонансы первого и второго порядков, корни характеристического уравнения системы первого приближения просты и чисто мнимы. Поэтому существует линейное каноническое преобразование системы (1.1) вида $z = NZ$, приводящее квадратичную форму разложения (1.2) функции Гамильтона к виду

$$(4.2) \quad H_2(z) = H_2(NZ) = F_2(Z) = \omega_1(Q_1^2 + P_1^2)/2 - \omega_2(Q_2^2 + P_2^2)/2$$



Фиг. 3



Фиг. 4

(см., например, [6], с. 32). Можно проверить, что симплектическая матрица N имеет вид $N = (a_{ij})(i, j = 1, \dots, 4)$, где ненулевыми являются только элементы:

$$\begin{aligned} a_{13} &= (1 - g + \omega_1^2)/(-\omega_1 B_1)^{1/2}, & a_{14} &= (1 - g + \omega_2^2)/(\omega_2 B_2)^{1/2} \\ a_{21} &= -2(-\omega_1/B_1)^{1/2}, & a_{22} &= 2(\omega_2/B_2)^{1/2} \\ a_{31} &= (1 + g - \omega_1^2)(-\omega_1/B_1)^{1/2}, & a_{32} &= -(1 + g - \omega_2^2) \times \\ & \times (\omega_2/B_2)^{1/2} \\ a_{43} &= (1 - g - \omega_1^2)/(-\omega_1 B_1)^{1/2}, & a_{44} &= (1 - g - \omega_2^2)/(\omega_2 B_2)^{1/2} \\ B_i &= 3 - 2g - g^2 + 2(g - 1)\omega_i^2 - \omega_i^4 \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Преобразованная функция Гамильтона определится равенством (3.1). Далее приводим¹ к нормальной форме члены третьей степени в (3.1).

Перейдем к комплексным каноническим переменным по формулам

$$\begin{aligned} Q_1 &= -(\xi_1 + i\eta_1)/\sqrt{2}, & P_1 &= -(i\xi_1 + \eta_1)/\sqrt{2} \\ Q_2 &= -(-\xi_2 + i\eta_2)/\sqrt{2}, & P_2 &= -(i\xi_2 - \eta_2)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Получим новое представление функции Гамильтона (ее квадратичной части): $F_2(Z) = \Lambda_2(\xi, \eta) = i\omega_1 \xi_1 \eta_1 + i\omega_2 \xi_2 \eta_2$. Для нормализации членов третьего порядка нужно разрешить операторное уравнение: $DT_3 = G_3 - K_3$, где дифференциальный оператор определяется с помощью скобки Пуассона:

$$Df = \{f, \Lambda_2\} = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \eta_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \right), \quad G_3(\xi, \eta) = F_3(Z)$$

T_3 — форма третьего порядка в разложении функции — генератора преобразования Ли в методе Хори, K_3 — нормальная форма гамильтониана третьего порядка. В K_3 остаются только резонансные члены: $K_3(\xi, \eta) = K_{1002} \xi_1 \eta_2^2 + K_{0210} \xi_2^2 \eta_1$, причем $K_{1002} = i(f_{0012} - f_{0210} - f_{1101})$, $K_{0210} = iK_{1002}$.

Имеет место следующий результат ([6], с. 72): если функция Гамильтона такова, что $|K_{1002}| = |K_{0210}| \neq 0$, то точка либрации неустойчива.

¹ См. § 3 работы: Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. М.: Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1976, № 31. 64 с.

При $|K_{1002}| = 0$ и выполнении условий теоремы Арнольда — Мозера (см. п. 6) (резонанс третьего порядка не мешает в этом случае дальнейшей нормализации) имеет место устойчивость по Ляпунову.

Проверка на ЭВМ показала, что всюду в S_3 выполнено условие неустойчивости, за исключением кривой, проекция которой l показана на фиг. 3. На этой кривой резонансные члены, препятствующие устойчивости, отсутствуют в разложении гамильтониана, резонанс четвертого порядка не выполнен, и поэтому нормализация, требуемая в теореме Арнольда — Мозера [7], возможна. Проверка показала, что согласно этой теореме на кривой l точка либрации устойчива.

5. Резонанс четвертого порядка. Изучим устойчивость точки либрации на множестве параметров S_4 (см. п. 1). Как и в п. 4, интерпретацию результатов будем проводить не в Π^3 , а на плоскости (α_1, α_2) , куда поверхность S_4 взаимно однозначно проецируется (см. заштрихованную область на фиг. 4). При выполнении резонансного соотношения четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ (в рассматриваемой задаче в плоском движении другого резонансного соотношения этого порядка не существует) для анализа устойчивости необходимо привести H к нормальной форме до четвертого порядка включительно.

Предполагается, что функция Гамильтона приведена к виду (3.1), где $F_2(Z)$ имеет вид (4.2). Как замечено в п. 4, это можно сделать подходящим каноническим линейным преобразованием.

Перейдем к каноническим полярным переменным по формулам

$$(5.1) \quad Q_k = (2r_k)^{1/2} \sin \varphi_k, \quad P_k = (2r_k)^{1/2} \cos \varphi_k \quad (k = 1, 2)$$

В новых переменных гамильтониан представляется в виде

$$K(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k=2}^{\infty} K_k(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2), \quad K_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2$$

$$K_m = (1/2)^{(m-2)/2} \sum_{k_1+k_2=m} U_{k_1 k_2}(\varphi_1, \varphi_2) (r_1^{k_1} r_2^{k_2})^{1/2} \quad (m = 3, \dots)$$

где $U_{k_1 k_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ — тригонометрические полиномы, коэффициенты которых вычисляются через соответствующие коэффициенты форм F_m (см. ниже). В отсутствие резонансов третьего порядка, что в данном случае и выполнено, гамильтониан имеет следующую нормальную форму, получаемую после нелинейной канонической замены переменных $(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)$: $H = G_2 + G_4 + R + \dots$. Члены в разложении H порядка выше четвертого не выписаны, а

$$(5.2) \quad G_2 = \omega_1 \rho_1 - \omega_2 \rho_2, \quad G_4 = C_{20} \rho_1^2 + C_{11} \rho_1 \rho_2 + C_{02} \rho_2^2$$

Резонансный член для соизмеримости $\omega_1 = 3\omega_2$ имеет вид

$$R = [A_{13} \sin(\psi_1 + 3\psi_2) + B_{13} \cos(\psi_1 + 3\psi_2)] (\rho_1 \rho_2^3)^{1/2}$$

Определим величины: $a = C_{20} + 3C_{11} + 9C_{02}$, $b = 3 [3(A_{13}^2 + B_{13}^2)]^{1/2}$. Имеет место следующая теорема А. П. Маркеева ([6], с. 75): если гамильтониан возмущенного движения таков, что $|a| < b$, то положение равновесия неустойчиво, если же $|a| > b$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Для проверки этих условий устойчивости необходимо, очевидно, вычислить коэффициенты функций G_4 и R . Коэффициенты резонансного чле-

на должны вычисляться согласно следующей серии формул:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} A_{13} &= a_4^{13}/2 - \alpha_4^{13}/8, \quad B_{13} = b_4^{13}/2 - \beta_4^{13}/8 \\ \alpha_4^{13} &= 2d_{01}(\gamma_{1,03}^{3,12} + \gamma_{2,03}^{1,12}) + 2d_{12}(3\gamma_{3,12}^{1,03} + \gamma_{3,12}^{1,21}) + (d_{21} - d_{-1,2})\gamma_{2,12}^{3,21} \cdot 2 \\ \beta_4^{13} &= 2d_{01}(\delta_{1,03}^{3,12} + \delta_{2,03}^{1,12}) + 2d_{12}(3\delta_{3,12}^{1,03} + \delta_{3,12}^{1,21}) + (d_{21} - d_{-1,2})\delta_{2,12}^{3,21} \cdot 2 \\ \gamma_{i, k_1 k_2}^j &= a_i^{k_1 k_2} b_j^{n_1 n_2} + b_i^{k_1 k_2} a_j^{n_1 n_2}, \quad \delta_{i, k_1 k_2}^j = -a_i^{k_1 k_2} a_j^{n_1 n_2} + b_i^{k_1 k_2} b_j^{n_1 n_2} \end{aligned}$$

Определим величины $d_{n_1 n_2} = (n_1 \omega_1 - n_2 \omega_2)^{-1}$. Величины $a_i^{k_1 k_2}$ и $b_j^{n_1 n_2}$ — коэффициенты тригонометрических полиномов $U_{k_1 k_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $U_{n_1 n_2}(\varphi_1, \varphi_2)$ соответственно. Формулы для получения коэффициентов формы G_4 применяются также при нормализации до четвертого порядка включительно в нерезонансном случае. Поэтому они будут использованы при проверке условий выполнения теоремы Арнольда — Мозера в п. 6. Приведем эти формулы

$$(5.4) \quad \begin{aligned} C_{k_1 k_2} &= c_{2k_1, 2k_2} / 2 - \gamma_{2k_1, 2k_2} / 8 \\ \gamma_{40} &= 3d_{10}(\beta_{1,30} + \beta_{2,30}) + d_{01}\beta_{1,21} - d_{2,-1}\beta_{2,21} + d_{21}\beta_{3,21} \\ \gamma_{22} &= 4d_{10}\beta_{1,30}^{1,12} + 4d_{01}\beta_{1,03}^{1,21} + 4d_{2,-1}\beta_{2,21} + 4d_{21}\beta_{3,21} + \\ &+ 4d_{-1,2}\beta_{2,12} + 4d_{12}\beta_{3,12} \\ \gamma_{04} &= 3d_{01}(\beta_{1,03} + \beta_{2,03}) + d_{10}\beta_{1,12} - d_{-1,2}\beta_{2,12} + d_{12}\beta_{3,12} \\ \beta_{i, k_1 k_2} &= (a_i^{k_1 k_2})^2 + (b_i^{k_1 k_2})^2, \quad \beta_{i, k_1 k_2}^j = a_i^{k_1 k_2} a_j^{n_1 n_2} + b_i^{k_1 k_2} b_j^{n_1 n_2} \end{aligned}$$

Величины a_i^{30} , b_i^{30} , $c_{2k_1, 2k_2}$ — коэффициенты тригонометрических полиномов U_{30} , U_{40} , U_{22} , U_{04} .

Во всех равенствах (5.3), (5.4) величины $a_i^{k_1 k_2}$, $b_j^{n_1 n_2}$, $c_{2k_1, 2k_2}$ выражаются явным образом через коэффициенты степенного разложения гамильтониана по формулам

$$\begin{aligned} a_4^{13} &= f_{1003} + f_{0112} - f_{1201} - f_{0310}, \quad b_4^{13} = f_{1300} + f_{0013} - \\ &- f_{1102} - f_{0211} \\ a_1^{03} &= 3f_{0300} + f_{0102}, \quad b_3^{12} = -f_{0210} + f_{0012} - f_{1101} \\ b_1^{03} &= f_{0201} + 3f_{0003}, \quad a_3^{12} = -f_{1200} + f_{1002} + f_{0111} \\ a_2^{03} &= -f_{0300} + f_{0102}, \quad b_1^{12} = 2(f_{0210} + f_{0012}) \\ b_2^{03} &= -f_{0201} + f_{0003}, \quad a_1^{12} = 2(f_{1200} + f_{1002}) \\ b_1^{21} &= 2(f_{2001} + f_{0021}), \quad a_1^{21} = 2(f_{2100} + f_{0120}) \\ a_2^{12} &= f_{1200} - f_{1002} + f_{0111}, \quad b_3^{21} = -f_{2001} + f_{0021} - f_{1110} \\ b_2^{12} &= -f_{0210} + f_{0012} + f_{1101}, \quad a_3^{21} = -f_{2100} + f_{0120} + f_{1011} \\ c_{40} &= 3f_{4000} + f_{2020} + 3f_{0040} \\ c_{22} &= 2(f_{2200} + f_{0220} + f_{2002} + f_{0022}) \\ c_{04} &= 3f_{0400} + f_{0202} + 3f_{0004} \\ a_1^{30} &= 3f_{3000} + f_{1020}, \quad b_1^{30} = f_{2010} + 3f_{0030} \\ a_2^{30} &= -f_{3000} + f_{1020}, \quad b_2^{30} = -f_{2010} + f_{0030} \\ a_2^{21} &= f_{2100} - f_{0120} + f_{1011}, \quad b_2^{21} = -f_{2001} + f_{0021} + f_{1110} \end{aligned}$$

Результаты проверки выполнения условий теоремы А. П. Маркеева на ЭВМ представлены на фиг. 4. Область неустойчивости (точнее, ее взаимно-однозначная проекция на плоскость (α_1, α_2)) изображена двойной штриховкой. Для исследования устойчивости на кривой, отделяющей область неустойчивости от зоны устойчивости на поверхности S_4 , необходимо привлекать члены в разложении гамильтониана степени выше четвертой.

Приведенный анализ показывает, что при выполнении резонанса четвертого порядка в исследуемой задаче устойчивость теряется лишь при

условии $\alpha_3 < \alpha_1$, когда эллипсоид является сжатым. При этом с увеличением сжатия точка либрации остается неустойчивой.

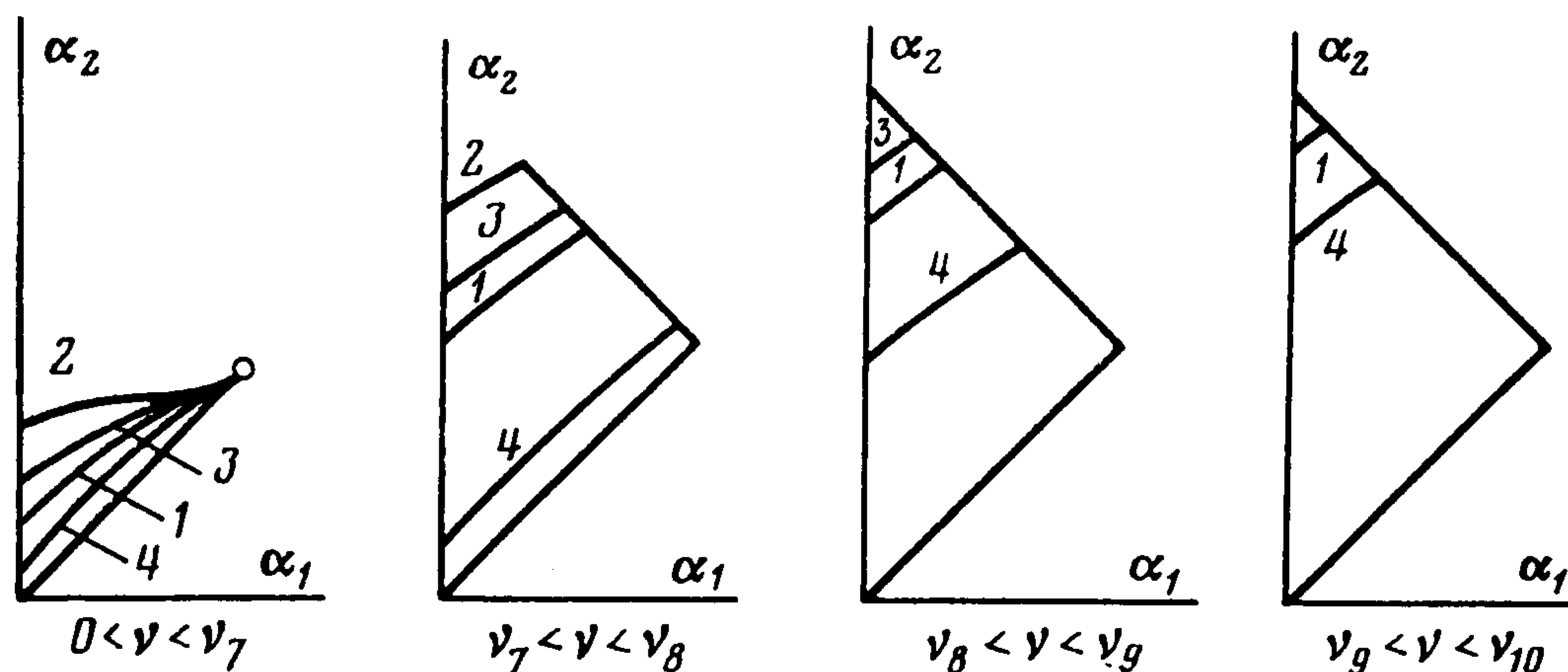
6. Нерезонансный случай. Этому случаю соответствует множество S_0 (см. п. 1). Заметим, что при $\nu \rightarrow \infty$ это множество не ограничено в Π^3 . Оно трехмерно, поэтому анализ устойчивости удобно проводить на сечениях S_0 плоскостями $\nu = \text{const}$ ($\nu > 0$) и следить, как меняются условия устойчивости с изменением ν . Основой этого анализа является теорема Арнольда — Мозера. В случае отсутствия резонансов до четвертого порядка включительно подходящей канонической нормализующей заменой переменных функцию Гамильтона можно привести к виду

$$G(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2) = G_2(\rho_1, \rho_2) + G_4(\rho_1, \rho_2) + \sum_{k=5}^{\infty} G_k(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)$$

где ρ_i, ψ_i ($i = 1, 2$) — канонические полярные координаты, а однородные формы G_2 и G_4 определяются посредством (5.2). Тогда в соответствии с теоремой Арнольда — Мозера положение равновесия гамильтоновой системы (точка либрации) устойчиво по Ляпунову, если

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = C_{20}\omega_2^2 + C_{11}\omega_1\omega_2 + C_{02}\omega_1^2 \neq 0$$

Проверка показала, что в отсутствие резонансов (в области S_0) устойчивость точки либрации в плоском движении имеет место для всех точек S_0 , кроме тех из них, что лежат на поверхности Γ . Множество Γ ограничено и заключено между множествами S_3 и S_4 . Вычисления показали, что на Γ функция $V = 0$, причем при переходе через Γ величина V меняет знак. Для исследования устойчивости на поверхности $\Gamma = \{(\alpha_1, \alpha_2, \nu): V(\alpha_1,$



Фиг. 5

$\alpha_2, \nu) = 0$ нужно привлекать члены выше четвертого порядка в степенном разложении гамильтониана. На множестве $\cup S_{k+1}$ ($1 < k < 2$) функция $V > 0$. При переходе через поверхность S_3 резонанса третьего порядка функция V меняет знак, терпя при этом на S_3 разрыв второго рода. В подобласти S_0 , ограниченной поверхностями S_3 и Γ , величина V отрицательна. Затем, при переходе через Γ , она снова меняет знак и остается положительной во всей остальной части S_0 .

Представление о расположении Γ в S_0 можно получить, рассмотрев несколько сечений $S_0^{(\nu)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \nu'): \nu' = \nu\}$. Возможны четыре типичных случая, соответствующих четырем диапазонам ν : $0 < \nu < \nu_7$, $\nu_7 < \nu < \nu_8$, $\nu_8 < \nu < \nu_9$, $\nu_9 < \nu < \nu_{10}$ ($i = 7, 8, 9, 10$) — параметры удаленности для точек Π^3 с номерами 7—10 (фиг. 1). Эти случаи представлены на фиг. 5, где цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены кривые пересечения $S_0^{(\nu)}$ с поверхностями Γ, S_2, S_3, S_4 соответственно. Заметим, что при $\nu > \nu_{10}$, когда в се-

чениях $S_0^{(v)}$ уже не содержится резонансных точек, пересечение $S_0^{(v)} \cap \Gamma$ также пусто. Итак, достаточно удаленная точка либрации в плоском движении всегда устойчива.

Автор благодарит В. Г. Демина за постановку задачи и поддержку в работе и А. Г. Сокольского — за предоставленные материалы, использованные в п. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косенко И. И. О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося эллипсоида.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 26—33.
2. Косенко И. И. Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде. Геометрия области устойчивости.— Космич. исследования, 1981, т. 19, № 2, с. 200—209.
3. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
4. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 5, с. 791—799.
5. Сокольский А. Г. Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс.— Письма в Астрон. ж., 1978, т. 4, № 3, с. 148—152.
6. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 168 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1983