

УДК 624.07 : 534.1

ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОДОЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЖЕСТКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПРОГИБ

Михайловский Е. И., Тарасов В. Н., Холмогоров Д. В.

Развивается подход, основанный на применении методов оптимизации для определения напряженно-деформированного состояния тел и конструкций с заданными ограничениями на перемещения. Рассматривается модельная задача о плоском продольном изгибе шарнирно опертого стержня с жесткими ограничениями на прогиб. Получено аналитическое решение этой задачи, обобщающее на нелинейный случай известное решение [1]. Затем, путем применения метода Ритца к вариационной проблеме и замены непрерывных ограничений дискретными, вариационная задача трансформируется в задачу нелинейного программирования. Результаты численных расчетов хорошо согласуются с аналитическим решением. Дается простое доказательство используемой при получении последнего гипотезы полного прилегания. Численным экспериментом подтвержден механизм образования многоволновой формы изгиба при увеличении осевой сжимающей силы, описанный в [1].

Рассматриваемая задача представляет интерес в связи с необходимостью выявления устойчивых динамических форм изгиба колонны бурительных труб в скважине. Один из приемов решения этой проблемы основан на допущениях о характере прилегания колонны к стенке скважины или о форме изгиба колонны. Исследованию формы изогнутой оси на основании предположения о полном прилегании посвящена, например, работа [2].

Рассмотрим плоский изгиб продольно сжатого стержня, первоначально расположенного вдоль оси цилиндрической полости (радиус $\Delta = \text{const}$) с абсолютно жесткими стенками. Пусть шарнирно закрепленные концы стержня в процессе деформирования остаются на оси полости, а продольная сжимающая сила P сохраняет свою величину и направление. При таких предположениях определение формы плоского изгиба стержня сводится к решению следующей вариационной задачи:

$$(1) \quad \Pi[w] = \int_0^l L(w', w'') ds \rightarrow \min_{\|w\| \leq \Delta}$$

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w''(0) = w''(l) = 0$$

$$\left(L(w', w'') = \frac{EI}{2} \frac{w''^2}{1-w'^2} - P(1 - \sqrt{1-w'^2}) \right)$$

где w, w', w'' — функция прогиба, ее первая и вторая производные по s , EI — изгибная жесткость стержня, l — длина стержня.

Предположим далее, что сила P больше первой критической ($P > P_*^{(1)} \equiv \pi^2 EI/l^2$) и больше силы, при которой произошло касание стержня со стенкой. Допустим при этом, что стержень полностью прилегает к стенке полости в некоторой своей средней части длиной $l_2 = l - 2l_1$ (фиг. 1). Назовем это допущение гипотезой полного прилегания. При наличии участка полного спрямления определение прогиба на каждом из криволинейных участков (от шарнирного конца до первой точки касания) сводится к решению вариационной задачи

$$(2) \quad \int_0^{l_1} L(w', w'') ds \rightarrow \min_{w, l_1}$$

при граничных условиях

$$(3) \quad w(0) = w''(0) = 0, \quad w(l_1) = \Delta, \quad w'(l_1) = 0$$

Необходимое условие минимума (2) по l_1 при граничных условиях (3) имеет вид

$$(4) \quad w''(l_1) = 0$$

Если $w''^2 \ll 1$, то соответствующая (2) — (4) вариационная задача имеет следующее решение:

$$(5) \quad w(s) = \frac{\Delta}{\pi} \sin ks + \frac{k\Delta}{\pi}, \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

Подставляя решение (5) в соотношение (4) и полагая $l_1 = l/2$, получаем $P = 4\pi^2 EI/l^2$. Это означает, что (по линейной теории) при

$$(6) \quad P_*^{(1)} < P \leq P_*^{(2)}, \quad P_*^{(2)} = 4\pi^2 EI/l^2$$

стержень может касаться стенки не более чем в одной точке и лишь при $P > P_*^{(2)}$ происходит прилегание стержня к стенке полости.

Исследуем решение задачи (2), (3). Первый интеграл уравнения Эйлера для функционала (2) имеет вид

$$(7) \quad \frac{d}{ds} \frac{w''}{1-w'^2} - \frac{w'w''^2}{(1-w'^2)^2} + k^2 \frac{w'}{\sqrt{1-w'^2}} = r = \text{const}$$

Первый интеграл уравнения (7) с учетом того, что $w' = \sin \theta$ (θ — угол наклона касательной к оси стержня), можно записать так:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\theta'^2 &= A \cos(\theta + \beta) + C \\ A &= \sqrt{k^4 + r^2}, \quad \sin \beta = -r/A, \\ \cos \beta &= k^2/A \end{aligned}$$

В силу условий (3) $\theta'(0) = 0$, поэтому $C = A \cos(\theta_0 + \beta)$ и уравнение (8) приводится к виду

$$(9) \quad \frac{1}{2}\theta'^2 = 2A \left(\sin^2 \frac{\theta_0 + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\theta + \beta}{2} \right), \quad \beta = -\frac{\theta_0}{2}$$

учтено, что $\theta(l_1) = 0$, $\theta'(l_1) = 0$ (см. (3), (4)). Выполняя далее подстановку Эйлера

$$(10) \quad \sin \frac{\theta + \beta}{2} = -\sin \frac{\theta_0 + \beta}{2} \sin \psi$$

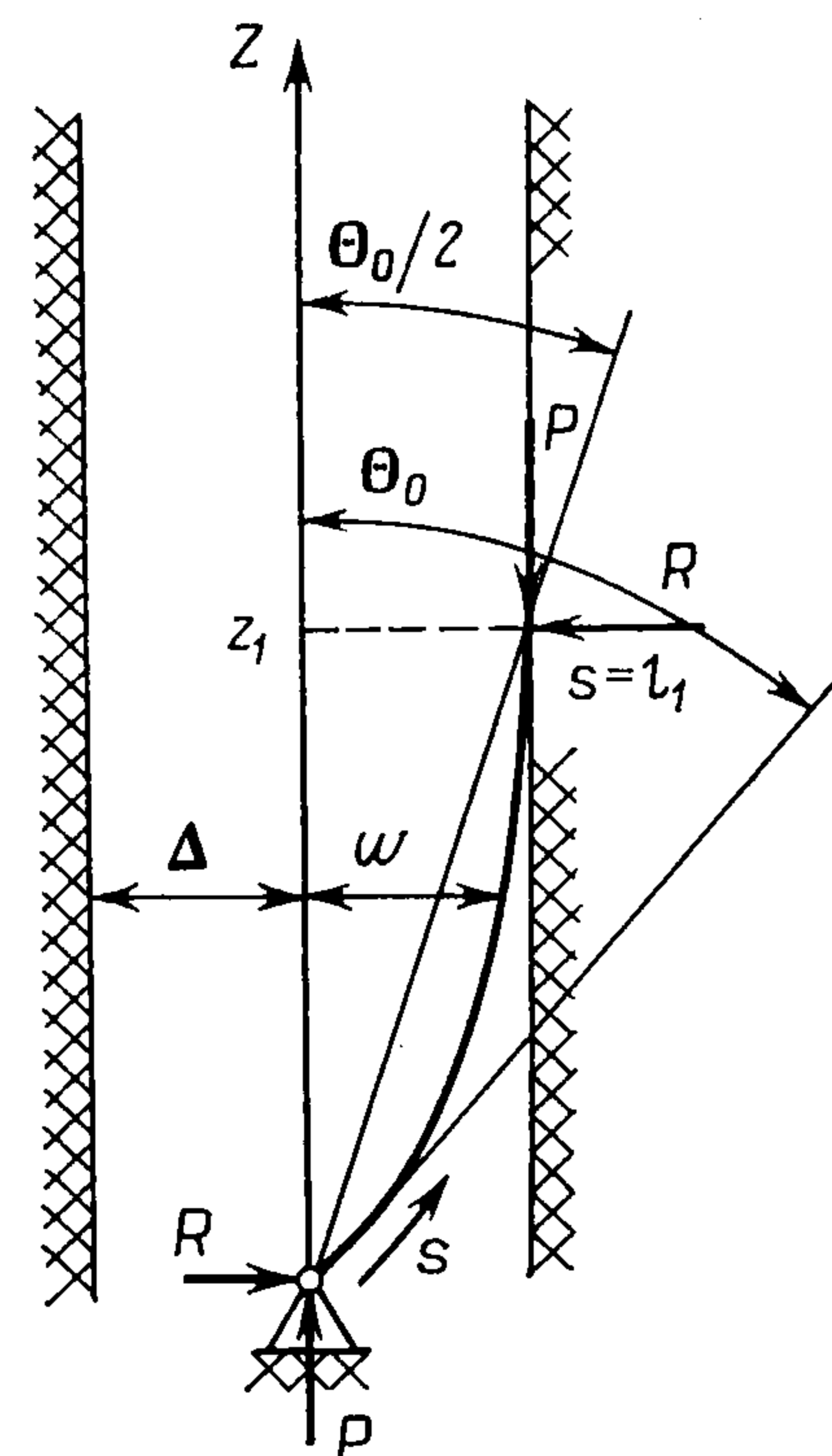
и учитывая вытекающие из (10) условия $\psi_0 = \psi(0) = -\pi/2$, $\psi_1 = \psi(l_1) = \pi/2$, получим

$$(11) \quad ks = \cos^{1/2} \frac{\theta_0}{2} [F(m, \psi) + K(m)]; \quad m^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{4}$$

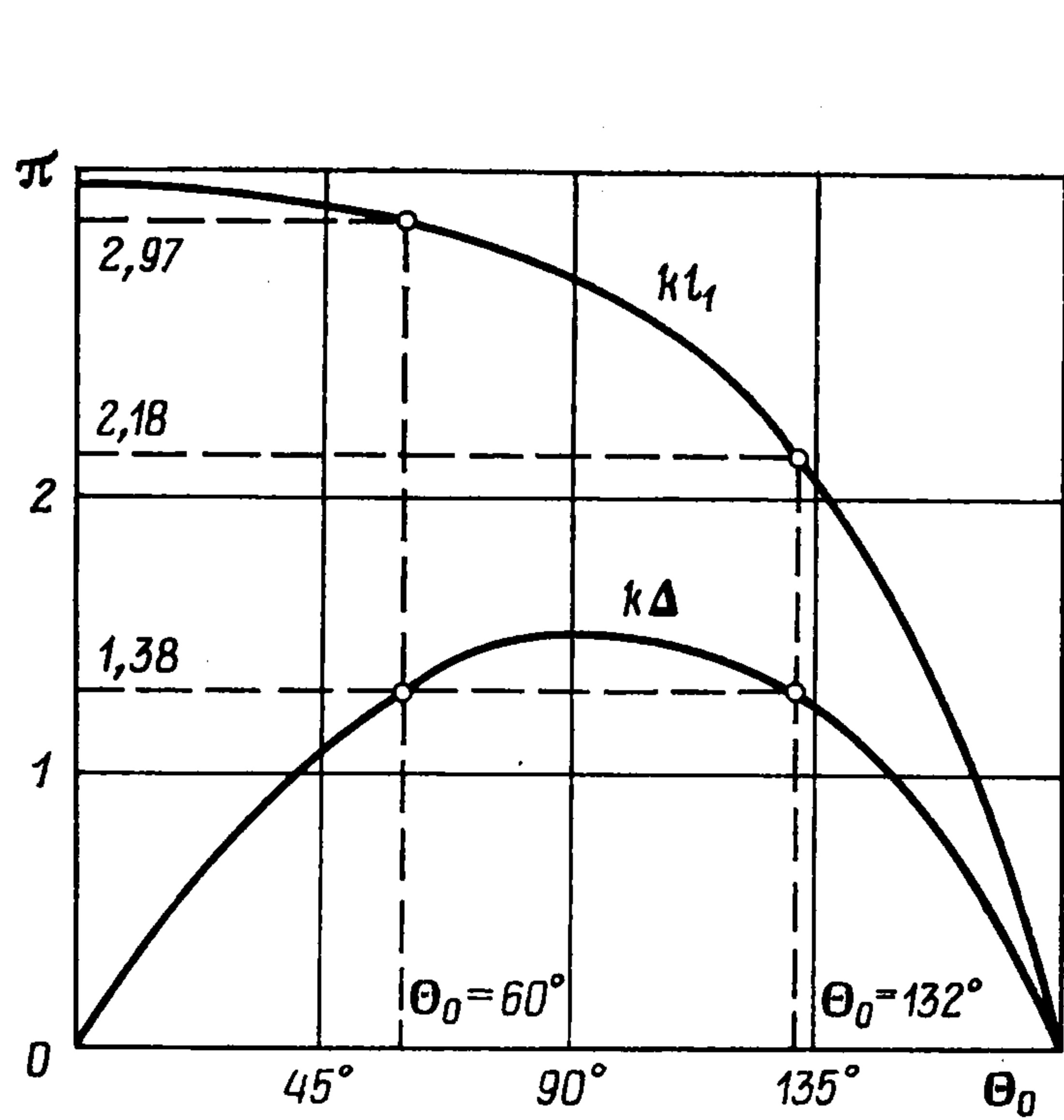
($F(m, \psi)$ — эллиптический интеграл первого рода, $K(m) = F(m, \pi/2)$).

Из (11) вытекает, в частности, формула для длины криволинейного участка

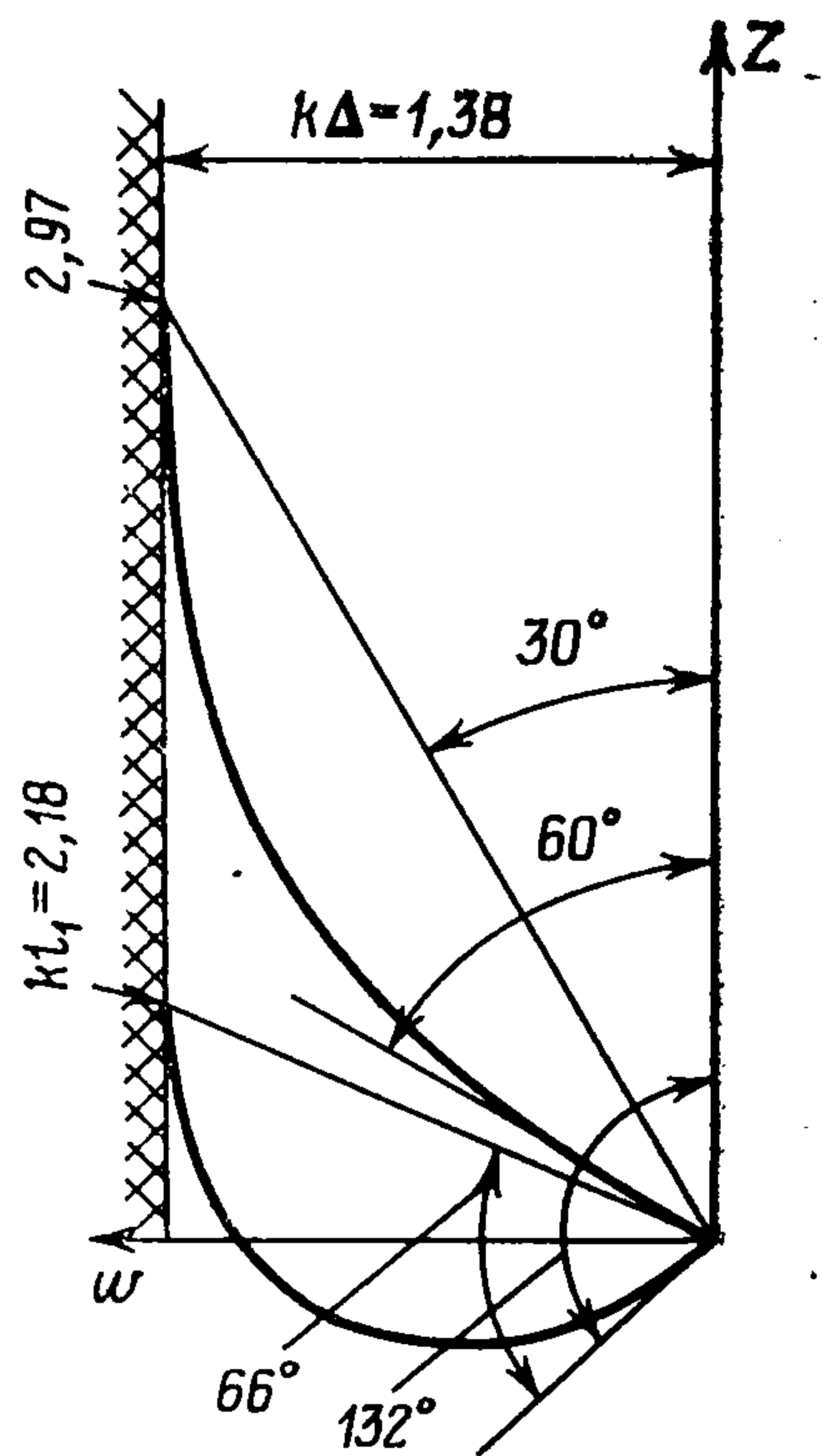
$$(12) \quad kl_1 = 2 \cos^{1/2} \frac{\theta_0}{2} K(m)$$



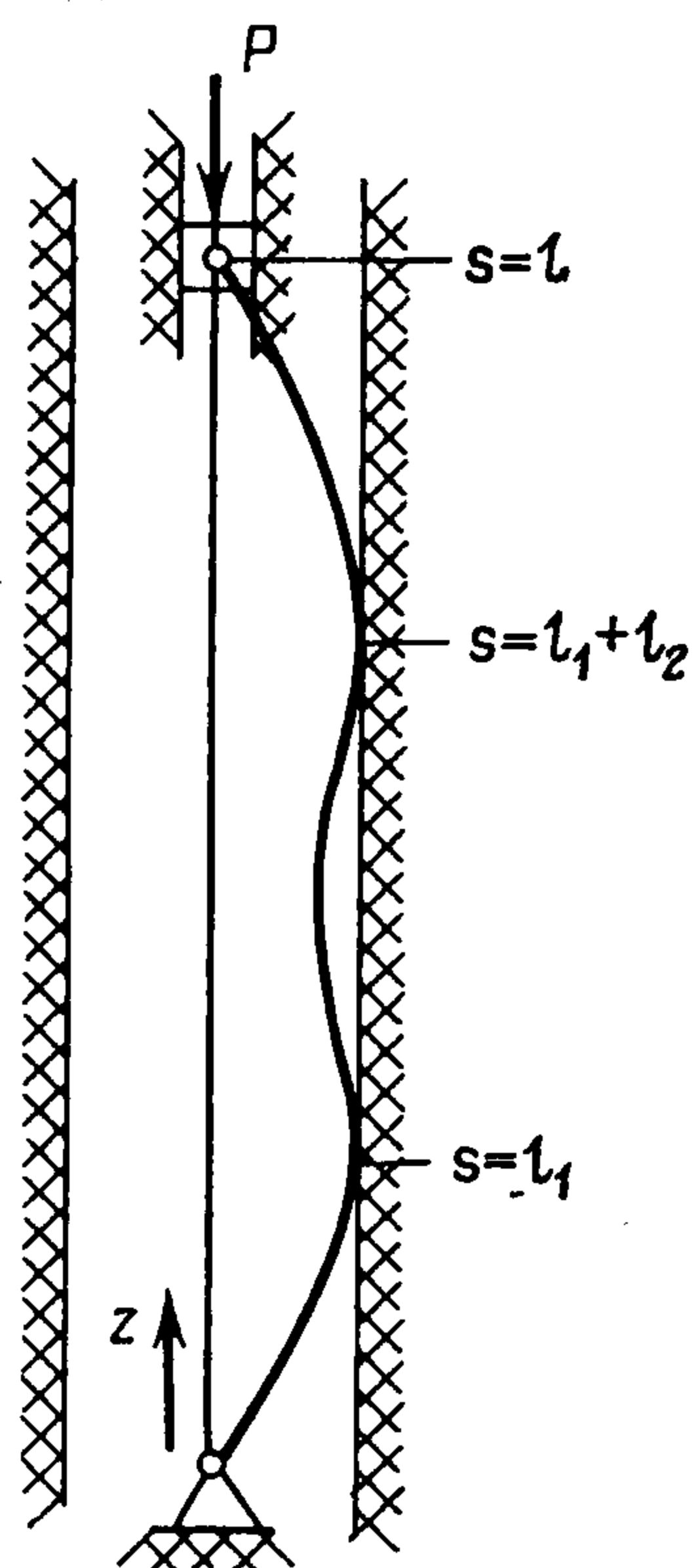
Фиг. 1



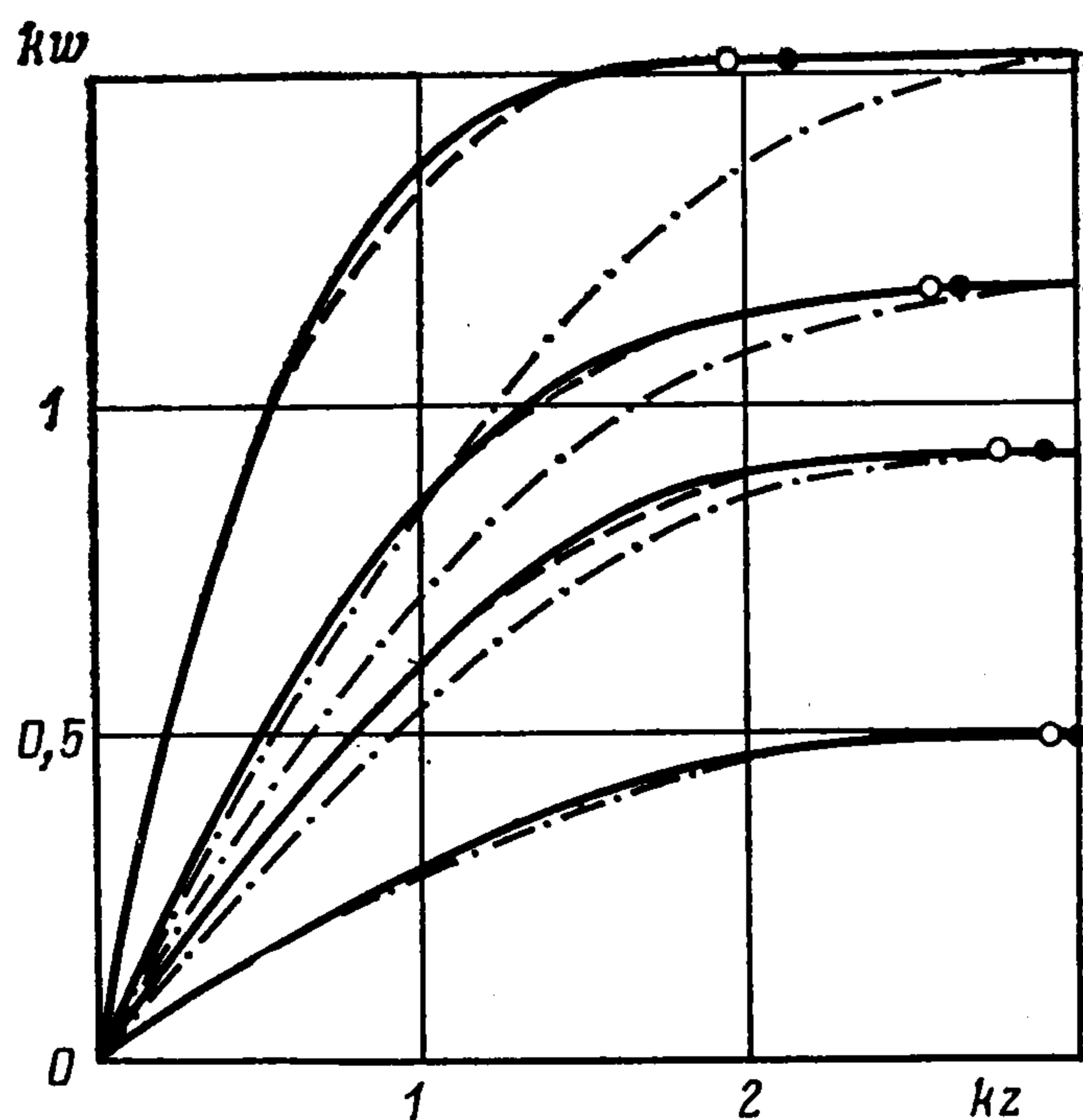
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Учитывая обозначения (10), находим

$$(13) \quad kw(\psi) = k \int_0^s \sin \theta ds = \cos^{1/2} \frac{\theta_0}{2} \left\{ \sin \frac{\theta_0}{2} [2E(m) - K(m)] + \right. \\ \left. + \sin \frac{\theta_0}{2} [2E(m, \psi) - F(m, \psi)] + 2 \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{4} \cos \psi \right\}$$

($E(m, \psi)$ — эллиптический интеграл второго рода, $E(m) = E(m, \pi/2)$).

Из (13) вытекает следующее основное уравнение задачи:

$$(14) \quad k\Delta(\theta_0) = 2 \cos^{1/2} \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} [2E(m) - K(m)]$$

На фиг. 2 изображен график функции $k\Delta(\theta_0)$, из которого видно, что каждому значению критериального параметра $k\Delta = \Delta \sqrt{P/(EI)}$ отвечают две предполагаемые формы равновесия, пока $k\Delta < \max k\Delta(\theta_0) \approx 1,66$, $\theta_0 \in [0, \pi]$. Там же представлен график функции $kl_1(\theta_0)$.

Используя в качестве исходного соотношения $z' = \cos \theta$ и производя

выкладки, аналогичные проделанным при выводе формулы (13), получим

$$(15) \quad kz(\psi) = \cos^{1/2} \frac{\theta_0}{2} \left\{ \cos \frac{\theta_0}{2} [2E(m) - K(m)] + \right. \\ \left. + \cos \frac{\theta_0}{2} [2E(m, \psi) - F(m, \psi)] + 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{4} \cos \psi \right\}$$

Полагая в (15) $\psi = \pi/2$ и принимая во внимание формулы (14), приходим к соотношению ($z_1 = z(\pi/2)$)

$$(16) \quad \Delta = z_1 \operatorname{tg}(\theta_0/2)$$

означающему, что начало участка выстилания находится в точке пересечения биссектрисы угла θ_0 с ограничивающей стенкой (см. фиг. 1, 3).

Необходимые условия существования формы прогиба с выстиланием записываются следующим образом:

$kl > \pi$ или $P > P_*^{(1)}$ — условие возможности существования непрямолинейной формы равновесия стержня длиной l ;

$kl_2 > 0$ — условие существования участка выстилания;

$kl_2 < 2\pi$ — условие устойчивости участка выстилания

$$(kl_2 \equiv kl - 4K \cos^{1/2} \theta_0/2)$$

Отсюда следует, что касание возможно при

$$(17) \quad P = v^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \left(v = \frac{4K}{\pi} \cos^{1/2} \frac{\theta_0}{2} \right)$$

Видно, что с увеличением θ_0 значение P , соответствующее началу выстилания, снижается от $P = P_*^{(2)}$ (при $\theta_0 \ll 1$) до $P = P_*^{(1)}$ (при $\theta_0 \approx \approx 156^\circ$).

Замечание. Выше, как и в работе [1], делалось предположение о наличии участка выстилания (гипотеза полного прилегания). Приведем доказательство существования такого участка. Пусть стержень имеет форму равновесия, изображенную на фиг. 4. В местах контакта со стенкой стержень не может иметь участков выстилания. В противном случае задача для среднего участка оказалась бы переопределенной: на конце стержня необходимо было бы удовлетворять трем условиям $w = w' = w'' = 0$. Уберем мысленно средний участок стержня, а крайние участки соединим в один стержень. Тогда получим изогнутую форму равновесия шарнирно опертого стержня длиной $2l_1$. Эта форма равновесия может иметь место лишь при $2kl_1 > \pi$. Средний же участок представляет собой изогнутую форму равновесия жестко заземленного на концах стержня длиной l_2 . Такая форма равновесия возможна при $kl_2 > 2\pi$. Отсюда получим

$$k(2l_1 + l_2) \equiv kl > 3\pi$$

Таким образом, рассматриваемая форма равновесия возможна лишь при $P > P_*^{(3)}$. Это значит, что при любом θ_0 между второй и третьей критическими силами стержня длиной l ($P_*^{(2)} < P < P_*^{(3)}$) возможна лишь одна форма равновесия для среднего участка — выстилание.

Пример. Пусть $l = 1$ м, $EI = 10^{-3}$ кН·м², $\Delta = 0,11$ м. Тогда для $P = P_*^{(4)} = 0,158$ кН имеем $k\Delta = \Delta \sqrt{P/(EI)} = 1,38$. Из графика на фиг. 2 находим $(\theta_0)_1 = 60^\circ$, $(\theta_0)_2 = 132^\circ$. Этим значениям θ_0 соответствуют $(kl_1)_1 = 2,97$, $(kl_1)_2 = 2,18$, или $(l_1)_1 = 0,174$ м, $(l_1)_2 = 0,236$ м. Длины соответствующих участков выстилания: $(l_2)_1 = 0,652$ м, $(l_2)_2 = 0,528$ м (фиг. 3).

Численное решение задачи (1). Граничные условия шарнирного опирания будут выполнены, если функцию прогиба искать в виде

$$(18) \quad w(s) \approx w(x; s) = x_n \sin \frac{\pi s}{l} + \left(\frac{2}{l} \right)^6 (s^2 - ls)^3 \sum_{i=0}^{n-2} x_{i+1} \left(\frac{2}{l} \right)^{2i} \left(s - \frac{l}{2} \right)^{2i}$$

(Заметим, что при численном решении задачи (1) первоначально функция прогиба искалась в виде частичной суммы тригонометрического ряда по собственным функциям линейной задачи продольного изгиба $w(s) = \sum_{i=1}^n x_i \sin i\pi s/l$. При такой аппроксимации функции прогиба форма изгиба с участком выстилания оказалась неустойчивой в

вычислительном отношении, что и побудило рассмотреть полиномиальное представление искомой функции.)

Подставляя $w(s)$, определяемое формулой (18), в функционал (1), получим

$$(19) \quad f(x) = \int_0^l L[w_s'(x; s), w_{ss}''(x; s)] ds \rightarrow \min_x$$

$$h(x; s) \equiv |w(x; s)| - \Delta \leq 0$$

Заменяя непрерывное ограничение в (19) набором дискретных, приходим к следующей задаче нелинейного программирования:

$$(20) \quad f(x) \rightarrow \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega = \{x \in E_n \mid h_j(x) \leq 0, j \in 0 : N_1\}$$

$$h_j(x) = h(x; s_j), s_j = jl/N_1$$

Функция $f(x)$ и ее градиент вычислялись по квадратичной формуле Гаусса с 32 узлами. Задача (20) решалась методом ϵ -наискорейшего спуска [3] при $n = 15$, $N_1 = 50$. Особенностью формы изгиба, найденной при помощи нелинейного программирования, является отход стержня от стенки в той части, где теоретически должен быть участок выстилания. Однако при увеличении точности решения задачи нелинейного программирования (что эквивалентно увеличению машинного времени счета) наблюдается тенденция к выпрямлению среднего участка. Таким образом, численное решение также согласуется с гипотезой полного прилегания.

На фиг. 5 приведены графики функции прогиба при $P = 0,97 P_*^{(3)}$ и $k = 9,29 \text{ м}^{-1}$ для разных значений Δ . Сплошной линией с темной точкой показано] аналитическое решение, штрихами со светлой точкой (соответствующей первой точке касания) — численное решение, штрихпунктиром — решение [1]. Сопоставляя названные решения, приходим к выводу, что, задаваясь погрешностью 5%, линейную теорию в расчетах можно применять при $\Delta/l \leq 0,06$.

Исследовалась также эволюция прогиба при увеличении нагрузки. Выявлено, что при силе большей $P_*^{(4)}$ происходит изменение формы равновесия в виде одной полуволны на форму с тремя полуволнами. Таким образом, путем численного эксперимента подтвержден механизм образования многоволновой формы изгиба при увеличении осевой сжимающей силы, описанный в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
2. *Михайловский Е. И.* О стационарных формах динамического равновесия сжатой части бурильной колонны.— В кн.: Актуальные проблемы механики сплошных сред. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980, с. 32—40.
3. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Сыктывкар

Поступила в редакцию
27.1.1984