Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 539.3 : 534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ИЗ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Жуховицкий Д. М.

На основании теории ползучести для неоднородно-стареющих материалов выводится уравнение изгиба тонких пластин в полярной системе координат. Это уравнение используется для доказательства энергетическим методом достаточного условия устойчивости кольцевых пластин. Рассматривается случай жесткого закрепления обеих кромок пластины и неодинаковых по интенсивности сжимающих усилий вдоль этих кромок. Оцениваются напряжения в плоскости пластины, благодаря чему получается ограничение на сжимающие усилия в явном виде. Проводится обобщение на иные типы опирания пластины.

В одномерном случае были получены уравнения прогиба и достаточные условия устойчивости неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается деформация кольцевой пластины постоянной толщины h и радиусов R_0 и R ($R_0 < R$), изготовленной из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Введем цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$ с началом в центре срединной плоскости пластины в недеформированном состоянии и осью Oz, перпендикулярной этой плоскости.

Предположим, что модуль упругомгновенной деформации E и коэффициент Пуассона ν материала пластины постоянны и в момент времени $t = 0$ к пластине приложена нагрузка, состоящая из поперечной распределенной нагрузки интенсивности $q(r, \varphi)$ и сжимающих усилий интенсивностью p_0 и p на внутреннем и внешнем краях пластины соответственно. Обозначим через $\rho(r, \varphi)$ возраст элемента вязкоупругого материала пластины в окрестности точки с координатами r, φ в момент приложения внешней нагрузки, а через L — оператор, определяющий свойства старения материала, т. е. [1]

$$Lw(t, r, \varphi) = \int_0^t L(t + \rho(r, \varphi), \tau + \rho(r, \varphi))\, w(\tau, r, \varphi)\, d\tau$$

где $L(t, \tau)$ — ядро ползучести. Оператор, обратный к $I + L$, обозначим через $I - N$: $I - N = (I + L)^{-1}$, где оператор N имеет такой же вид, как и оператор L, и определяет свойства релаксации материала; подынтегральная функция $N(t, \tau)$ называется ядром релаксации.

Пусть выполняются следующие свойства ядер ползучести и релаксации.

1°. Существуют функции $L_1(t, \tau)$, $N_1(t, \tau)$, такие, что для любых $(r, \varphi) \in [R_0, R] \times [0, 2\pi]$, $\tau \in [0, t]$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant L(t + \rho(r, \varphi), \tau + \rho(r, \varphi)) \leqslant L_1(t, \tau), \quad 0 \leqslant N(t + \rho(r, \varphi), \tau + \rho(r, \varphi)) \leqslant N_1(t, \tau)$$

2°. $$|L_1| = \sup_t \int_0^t L_1(t, \tau)\, d\tau < \infty, \quad |N_1| < 1$$

3°. Существует функция $N_0(t, \tau)$ для всех $\varepsilon > 0$, такая, что начиная с некоторого момента $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ для всех $t \geqslant \tau \geqslant t_0$

$$\int_{t_0}^{t} \max_{r,\varphi} |N(t+\rho(\tau, \varphi), \tau+\rho(r, \varphi)) - N_0(t, \tau)|\, d\tau < \varepsilon$$

Обозначим через N_0 оператор, порожденный функцией $N_0(t, \tau)$, а через L_0 — соответствующий оператор, определяемый из соотношения $I - N_0 = (I + L_0)^{-1}$.

Устойчивость пластины по Ляпунову на бесконечном интервале времени состоит в том, что малые возмущения начального плоского состояния приводят к малым значениям прогиба $w(t, r, \varphi)$.

Определение. Пусть $w(t, r, \varphi)$ — прогиб срединной плоскости пластины, а $q(r, \varphi)$ — поперечная нагрузка, действующая на нее. Пластина называется устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, как только $\sup_\Omega |q(r, \varphi)| < \delta$, то $\sup_t \max_\Omega |w(t, r, \varphi)| < \varepsilon$, где Ω — область изменения координат.

Определим достаточные условия устойчивости рассматриваемой пластины, обе кромки которой жестко защемлены. Для этого сначала выведем уравнение для прогиба w. Далее оценим прогиб w, предполагая решенной задачу определения напряжений в пластине через сжимающие усилия p_0, p. На основании этой оценки получим искомые условия. Выводя ограничение на норму напряжений через p_0, p и используя эти условия, получим критическое значение для сжимающих усилий.

2. Уравнение для прогиба пластины. Пусть σ_r, σ_φ, $\sigma_{r\varphi}$ — компоненты напряжений, а ε_r, ε_φ, $\varepsilon_{r\varphi}$ — компоненты деформаций в полярной системе координат. Частные производные будем обозначать знаком δ_k, где индекс показывает, по какой переменной берутся эти производные ($k = r, \varphi$). Реологические соотношения для описанного материала можно получить в виде [1]

(2.1) $$\sigma_r = [E/(1-\nu^2)](I - N)(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi), \quad \sigma_{r\varphi} = [E/(2+2\nu)](I - N)\,\varepsilon_{r\varphi}$$
$$\sigma_\varphi = [E/(1-\nu^2)](I - N)(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r)$$

Деформации выражаются через прогиб w и расстояние z точки пластины до срединной поверхности ее следующим образом [2, 3]:

(2.2) $$\varepsilon_r = -z\partial_{rr}^{2} w, \quad \varepsilon_{r\varphi} = -2z\partial_r (r^{-1}\partial_\varphi w)$$
$$\varepsilon_\varphi = -z(r^{-1}\partial_r w + r^{-2}\partial_{\varphi\varphi}^{2} w)$$

Если h — толщина пластины, то изгибающие моменты M_r, M_φ и кручение $M_{r\varphi}$ будут

(2.3) $$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z\, dz, \quad M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi z\, dz, \quad M_{r\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\varphi} z\, dz$$

В рассматриваемом случае на пластину помимо поперечных усилий действуют сжимающие. Возникающие при этом напряжения в плоскости пластины создают «добавочное» поперечное усилие. Используя уравнения равновесия плоской пластины, можно показать [4, 5], что это усилие (обозначим его через $F(\boldsymbol{\sigma}^\circ, w)$) описывается выражением

(2.4) $$F(\boldsymbol{\sigma}^\circ, w) = h[\delta_r(\sigma_r^\circ \delta_r w) + \delta_r(\sigma_{r\varphi}^\circ r^{-1}\delta_\varphi w) + \sigma_r^\circ r^{-1}\delta_r w + r^{-1}\delta_\varphi(\sigma_{r\varphi}^\circ \delta_r w) + r^{-1}\delta_\varphi(\sigma_\varphi^\circ r^{-1}\delta_\varphi w) + \sigma_{r\varphi}^\circ r^{-2}\delta_\varphi w]$$

Умножим все соотношения (2.1) на z и проинтегрируем по z в пределах от $-h/2$ до $+h/2$. Учитывая (2.2) и (2.3), получим

$$
\begin{aligned}
(2.5)\qquad & M_r = -D\,(I - N)\,m_r, \quad m_r = \delta_{rr}{}^2 w + \nu r^{-1}\delta_r w + \nu r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 w\\
& M_\varphi = -D\,(I - N)\,m_\varphi, \quad m_\varphi = \nu\delta_{rr}{}^2 w + r^{-1}\delta_r w + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 w\\
& M_{r\varphi} = -D\,(I - N)\,m_{r\varphi}, \; m_{r\varphi} = (1 - \nu)\,(r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2 w - r^{-2}\delta_\varphi w)\\
& D = Eh^3\,[12\,(1 - \nu^2)]^{-1}
\end{aligned}
$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины.

Уравнения равновесия элемента круглой пластины будут [2]:

для моментов

$$
\begin{aligned}
&\delta_r\,(rM_r) + \delta_\varphi M_{r\varphi} - M_\varphi - rQ_r = 0\\
&\delta_r\,(rM_{r\varphi}) + \delta_\varphi M_\varphi + M_{r\varphi} - rQ_\varphi = 0
\end{aligned}
$$

для вертикальных проекций сил

$$
\delta_r\,(rQ_r) + \delta_\varphi Q_\varphi + r\,[q\,(r,\ \varphi) + F\,(\sigma^\circ,\ w)] = 0
$$

Исключая из этих уравнений поперечные (пререзывающие) силы Q_r и Q_φ, получим уравнение равновесия в моментах

$$
\begin{aligned}
&\delta_{rr}{}^2 M_r + 2r^{-1}\delta_r M_r + 2r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2 M_{r\varphi} - r^{-1}\delta_r M_\varphi +\\
&+ 2r^{-2}\delta_\varphi M_{r\varphi} + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 M_\varphi + q\,(r,\ \varphi) + F\,(\sigma^\circ,\ w) = 0
\end{aligned}
$$

Подставим сюда выражения (2.5). Выделяя слагаемые при тождественном операторе I, получим

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad & D\Delta\Delta w + DG\,(-N,\ w) = q\,(r,\ \varphi) + F\,(\sigma^\circ,\ w)\\
& G\,(-N, w) = \delta_{rr}{}^2\,(-Nm_r) + 2r^{-1}\delta_r\,(-Nm_r) + 2r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2(-Nm_{r\varphi}) +\\
& + 2r^{-2}\delta_\varphi\,(-Nm_{r\varphi}) - r^{-1}\delta_r\,(-Nm_\varphi) + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2\,(-Nm_\varphi)
\end{aligned}
$$

(Δ — оператор Лапласа в полярных координатах).

3. Оценка прогиба $w\,(t,\ r,\ \varphi)$. Из связи операторов ползучести и релаксации получим

$$
\begin{aligned}
&-N_0 = (I + L_0)^{-1} - I = -\,(I + L_0)^{-1}L_0,\\
&-N = (N_0 - N) - N_0 = (N_0 - N) - (I + L_0)^{-1}L_0
\end{aligned}
$$

Подставляя последнее выражение для $-N$ в (2.6), будем иметь

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & D\Delta\Delta w + D\,(I + L_0)\,G\,(N_0 - N,\ w) = (I + L_0)\,[q\,(r,\ \varphi) +\\
& + F\,(\sigma^\circ,\ w)]
\end{aligned}
$$

Жесткое закрепление кромок пластины дает краевые условия для прогиба w

$$
(3.2)\qquad w\,(t,\ r,\ \varphi) = \delta_r w\,(t,\ r,\ \varphi) = 0 \text{ при } r = R_0,\ R;\ \forall t \geqslant 0,\ \varphi \in \Omega
$$

Действие сжимающих усилий аналитически запишется в виде

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad & \sigma_r{}^\circ\,(t,\ R_0,\ \varphi) = -p_0,\ \sigma_r{}^\circ\,(t,\ R,\ \varphi) = -p\\
& \sigma_{r\varphi}{}^\circ\,(t,\ R_0,\ \varphi) = \sigma_{r\varphi}{}^\circ\,(t,\ R,\ \varphi) = 0,\ \forall t \geqslant 0,\ \varphi \in \Omega
\end{aligned}
$$

Предположим, что известна оценка тензора напряжений σ° из (2.4) по норме при условии (3.3), т. е. оценка величины

$$
(3.4)\qquad \|\,\sigma^\circ\,\|^2 = \iint (\sigma_r{}^{\circ 2} + 2\sigma_{r\varphi}{}^{\circ 2} + \sigma_\varphi{}^{\circ 2})\,d\omega
$$

Здесь и в дальнейшем под двойным интегралом понимается интегрирование по плоскости недеформированной пластины в полярных координатах, т. е. по r в пределах от R_0 до R, по φ — от 0 до 2π; $d\omega = rdrd\varphi$.

Умножим (3.1) на $w\,(t,\ r,\ \varphi)$ и проинтегрируем по частям. В силу (3.2) и непрерывности и однозначности по φ функции прогибов $w\,(t,\ r,\ \varphi)$ и всех необходимых ее производных, возникающие интегралы по границе обратятся в нуль. Окончательно будем иметь

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & \iint (\Delta w)^2 d\omega = (I + L_0) \iint (N - N_0)(\mathbf{W},\ \mathbf{W}_1)\, d\omega + \\
& + \nu (I + L_0) \iint (N - N_0)(\mathbf{W},\ \mathbf{W}_2)\, d\omega + hD^{-1}(I + L_0)\times \\
& \times \iint [(-\sigma_r^\circ)\delta_r w \delta_r w_1 + (-\sigma_{r\varphi}^\circ)(\delta_r w r^{-1}\delta_\varphi w_1 + r^{-1}\delta_\varphi w \delta_r w_1) + \\
& + (-\sigma_\varphi^\circ) r^{-2}\delta_\varphi w \delta_\varphi w_1]\, d\omega + D^{-1}(I + L_0) \iint wq d\omega \\
& \mathbf{W} = (\delta_{rr}{}^2 w,\ \sqrt{2} r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2 w - \sqrt{2} r^{-1}\delta_\varphi w,\ r^{-1}\delta_r w + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 w) \\
& w = w(t, r, \varphi),\ w_1 = w(\tau, r, \varphi)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{W}_1 \equiv \mathbf{W}(\tau)$, $\mathbf{W}_2$ — вектор с компонентами вектора $\mathbf{W}_1$, взятыми в обратном порядке и со знаком минус у второй из них; $(\mathbf{W},\ \mathbf{W}_i)$ — скалярные произведения $(i = 1,\ 2)$.

Обозначим через $|\ \mathbf{W}\ |$ модуль вектора, $\|\ w\ \|^2$ — интеграл от квадрата w по Ω, $\|\ w\ \|_i{}^2$ — интеграл от суммы квадратов i-х производных $(i = 1, 2)$, I_j — j-е слагаемое правой части (3.5), взятое по модулю $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Оценим правую часть (3.5). Для этого воспользуемся неравенствами: Коши $|\ (\mathbf{W},\ \mathbf{W}_i)\ | \leqslant |\ \mathbf{W}\ |\ |\ \mathbf{W}_i\ |$, Коши — Буняковского $|\ (w,\ w_1)_2\ | \leqslant \|\ w\ \|_2 \|w_1\|_2$ ([6], с. 45, 135), Бернштейна $\|\ w\ \|_2 \leqslant \|\ \Delta w\ \|$ ([7], с. 39), Фридрихса — Пуанкаре $\|\ w\ \| \leqslant C\ (\Omega)\ \|\ w\ \|_1$ ([8], с. 62) записанными в полярной системе координат, а также неравенствами

$$
\begin{aligned}
& -2\,(r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2 w - r^{-2}\delta_\varphi w)(r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2 w_1 - r^{-2}\delta_\varphi w_1) \leqslant \\
& \leqslant \varepsilon\,(r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2 w - r^{-2}\delta_\varphi w)^2 + \varepsilon^{-1}(r^{-1}\delta_{r\varphi}{}^2 w_1 - r^{-2}\delta_\varphi w_1)^2 \\
& \delta_{rr}{}^2 w\,(r^{-1}\delta_r w_1 + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 w_1) \leqslant {}^1/_2\varepsilon\,(\delta_{rr}{}^2 w)^2 + (2\varepsilon)^{-1}(r^{-1}\delta_r w_1 + \\
& + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 w_1)^2 \\
& (r^{-1}\delta_r w + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 w)\delta_{rr}{}^2 w_1 \leqslant {}^1/_2\varepsilon\,(r^{-1}\delta_r w + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}{}^2 w)^2 + \\
& + (2\varepsilon)^{-1}(\delta_{rr}{}^2 w)^2
\end{aligned}
$$

Разбивая интеграл по времени на два (от 0 до t_0 и от t_0 до t) и пользуясь свойствами 1° — 3°, получим оценки

$$
\begin{aligned}
& I_1 \leqslant \|\ \Delta w\ \|\ (1 + |\ L_0\ |)\ [(\ |\ N_1\ | + |\ N_0\ |)\ \|\ Z_{t_0}\ \| + \varepsilon_0\ \|\ Z_t\ \|] \\
& I_2 \leqslant \varepsilon\ \|\ \Delta w\ \|^2\ {}^1/_2\nu\ (1 + |\ L_0\ |)\ (|\ N_1\ | + |\ N_0\ |) + \\
& + \nu\ (2\varepsilon)^{-1}(1 + |\ L_0\ |)\ [(\ |\ N_1\ | + |\ N_0\ |)\ \|\ Z_{t_0}\ \|^2 + \varepsilon_0\ \|\ Z_t\ \|^2] \\
& Z_t = \sup_\tau |\ \mathbf{W}\ (\tau,\ r,\ \varphi)\ |
\end{aligned}
$$

Аналогично, следуя рассуждениям С. Г. Михлина ([9], с. 185), имеем

$$
\begin{aligned}
& I_3 \leqslant h\ |\ \sigma^\circ\ |_s\ (2D\lambda)^{-1}(1 + |\ L_0\ |)\ \|\ \Delta w\ \|^2 + \\
& + h\ |\ \sigma^\circ\ |_s\ (2D\lambda)^{-1}(1 + |\ L_0\ |)\ \|\ \Delta w_1\ \|^2
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
(3.6)\qquad & \lambda = \inf_w \iint w\Delta\Delta w d\omega\ \{\iint [(\delta_r w)^2 + (r^{-1}\delta_\varphi w)^2]^2 d\omega\}^{-1/2} \\
& |\ \sigma^\circ\ |_s = \sup_\tau \|\ \sigma^\circ\ \|,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t
\end{aligned}
$$

Наконец, после двукратного применения неравенства Фридрихса — Пуанкаре получим

$$
\begin{aligned}
& I_4 \leqslant \varepsilon C\ (\Omega)\ (2D)\ (1 + |\ L_0\ |)\ \|\ \Delta w\ \|^2 + (2D\varepsilon)^{-1}(1 + \\
& + |\ L_0\ |)\ \|\ q\ \|^2
\end{aligned}
$$

Постоянная $C\ (\Omega)$ зависит только от области, по которой ведется интегрирование. Нет смысла выписывать ее в явном виде, главное — она ограниченная константа. Значение же этого члена благодаря ε можно сделать сколь угодно малым. О выборе ε и ε_0 в оценке I_2 скажем ниже.

Подставляя полученные оценки интегралов I_j в (3.5), имеем

$$(3.7)\qquad A \| \Delta w \|^2 - B \| \Delta w \| - C \leqslant 0$$
$$A = 1 - h \mid \sigma^\circ \mid_s (2D\lambda)^{-1} (1 + \mid L_0 \mid) -$$
$$- \varepsilon (1 + \mid L_0 \mid) [{}^1/{}_2\nu (\mid N_1 \mid + \mid N_0 \mid) + C (\Omega) (2D)^{-1}]$$
$$B = (1 + \mid L_0 \mid) [(\mid N_1 \mid + \mid N_0 \mid) \| Z_{t_0} \mid + \varepsilon_0 \| Z_t \|]$$
$$C = h \mid \sigma^\circ \mid_s (2D\lambda)^{-1} (I + L_0) \| \Delta w_1 \|^2 + (2D\varepsilon)^{-1} (1 +$$
$$+ \mid L_0 \mid) \| q \|^2 + \nu (2\varepsilon)^{-1} (1 + \mid L_0 \mid) [(\mid N_1 \mid +$$
$$+ \mid N_0 \mid) \| Z_{t_0} \| + \varepsilon_0 \|Z_t \|]$$

Постоянные ε и ε_0 подбираются таким образом, чтобы величины и знаки выражений A, B и C определялись членами, не содержащими ε и ε_0.

Обозначим $h \mid \sigma^\circ \mid_s (1 + \mid L_0 \mid)/D = \alpha$. Если $1 - \alpha /(2\lambda) > 0$, т. е. $A > 0$, то из (3.7) имеем

$$(3.8)\qquad \| \Delta w \| \leqslant B/A + (C/A)^{1/2}$$

Для Z_t согласно неравенству Бернштейна [7] получим $\| Z_t \| \leqslant \leqslant \sup_\tau \|\Delta w_1 \|^2$. Тогда, учитывая неравенство $(a + b)^{1/2} \leqslant a^{1/2} + b^{1/2}$, для a, $b > 0$ имеем

$$B/A \leqslant (1 + \mid L_0 \mid) (\mid N_1 \mid + \mid N_0 \mid)/A \| Z_{t_0} \| + \varepsilon_0 (1 +$$
$$+ \mid L_0 \mid)/A \sup_\tau \| \Delta w_1 \|$$
$$(C/A)^{1/2} \leqslant [\alpha/(2\lambda A) + \varepsilon_0\nu (1 + \mid L_0 \mid)/(2\varepsilon A)]^{1/2} \sup_\tau \| \Delta w_1 \| +$$
$$+ [\nu (1 + \mid L_0 \mid) (\mid N_1 \mid + \mid N_0 \mid)/(2\varepsilon A)]^{1/2} \| Z_{t_0} \| + [(1 +$$
$$+ \mid L_0 \mid)/(2AD\varepsilon)]^{1/2} \| q \|$$

или, вводя переобозначения

$$B/A \leqslant C_2 \| Z_{t_0} \| + \varepsilon_0 A_2 \sup_\tau \| \Delta w_1 \|$$
$$(C/A)^{1/2} \leqslant A_1 \sup_\tau \| \Delta w_1 \| + C_1 \| Z_{t_0} \| + B_1 \| q \|$$

С учетом последних неравенств условие (3.8) запишем в виде

$$\| \Delta w \| \leqslant (A_1 + \varepsilon_0 A_2) \sup_\tau \| \Delta w_1 \| + B_1 \| q \| + (C_1 +$$
$$+ C_2) \| Z_{t_0} \|$$

Так как это неравенство выполняется для всех $t \geqslant 0$, то можно получить

$$(3.9)\qquad (1 - A_1 - \varepsilon_0 A_2) \sup_\tau \| \Delta w_1 \| \leqslant B_1 \| q \| + (C_1 + C_2) \| Z_{t_0}\|$$

Теорема. Пусть для задачи (2.6), (3.2) выполнены условия 1° — 3°. Тогда, если $1 - [\alpha/(2\lambda A)]^{1/2} > 0$, то условие (3.9) гарантирует устойчивость кольцевой пластины по Ляпунову.

Доказательство. В определении устойчивости фигурирует $\max \mid w \mid$, а получена оценка сверху для $\| \Delta w \|$. Следовательно, осталось оценить $\max \mid w \mid$ сверху величиной $\| \Delta w \|$. Для финитных функций получено неравенство ([8], с. 84)

$$(3.10)\qquad \max_\Omega \mid w \mid \leqslant C (\Omega) \| D^l w \|_{m, \Omega},\ lm > n$$

В рассматриваемом случае любое опирание пластины (не свободные кромки) означает, что на границах пластины $w = 0$, т. е. прогибы w — финитные функции. Далее n — размерность пространства равна двум (плоский случай), l — порядок дифференцирования тоже равен двум, интегрирование во всех выкладках велось с квадратом (норма бралась в L_2), т. е. и $m = 2$, следовательно, выполняется неравенство (3.10). Здесь $C (\Omega)$ определяется по области интегрирования, т. е. по размерам пластины. Наконец, воспользовавшись неравенством Бернштейна [7], получим

$\max_\Omega |w| \leqslant C(\Omega) \|\Delta w\|$. Последнее и (3.9) гарантируют устойчивость по Ляпунову рассматриваемой пластины.]

Условие теоремы определяет ограничение на сжимающие усилия, так как из $1 - [\alpha/(2\lambda A)]^{1/2} > 0$ следует $\lambda > \alpha$, или

(3.11) $$\|\sigma^\circ\| \leqslant |\sigma^\circ|_s \leqslant D\lambda\, [h(1 + |L_0|)]^{-1}$$

Замечание. Для того чтобы выяснить смысл параметра λ в (3.11), обратимся к выражению (3.6). Неравенство Коши — Буняковского [6] дает

$$\iint [(\delta_r w)^2 + (r^{-1}\delta_\varphi w)^2]\, d\omega \leqslant \{\pi (R^2 - R_0^2) \iint [(\delta_r w)^2 + (r^{-1}\delta_\varphi w)^2]^2 d\omega\}^{1/2}$$

Выводя отсюда неравенство для обратных величин, получим

$$\lambda \leqslant [\pi (R^2 - R_0^2)]^{1/2} \inf_w \iint w\Delta\Delta w d\omega \, \{\iint [(\delta_r w)^2 + (r^{-1}\delta_\varphi w)^2]\, d\omega\} =$$
$$= \lambda_0 [\pi (R^2 - R_0^2)]^{1/2}$$

λ_0 — наименьшее собственное число соответствующей упругой задачи. С другой стороны, $\lambda > 0$. Действительно, в силу [8, с. 84] и неравенства Фридрихса — Пуанкаре существует такая постоянная $C_3 > 0$, зависящая только от области Ω, что

$$\{\iint [(\delta_r w)^4 + (r^{-1}\delta_\varphi w)^4]\, d\omega\}^{1/2} \leqslant C_3 \iint (\Delta w)^2\, d\omega$$

Это и доказывает, что $\lambda > 0$.

4. Априорные оценки напряжений в кольце. Если прогиб пластины равен нулю, то в ней реализуется напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тензором напряжений σ° из (2.4). Уравнения равновесия элемента пластины в этом случае имеют вид [2]

(4.1) $$\delta_r (r\sigma_r^\circ) + \delta_\varphi \sigma_{r\varphi}^\circ - \sigma_\varphi^\circ = 0, \quad \delta_r (r\sigma_{r\varphi}^\circ) + \delta_\varphi \sigma_\varphi^\circ + \sigma_{r\varphi}^\circ = 0$$

Граничными условиями для них будут соотношения (3.3).

Оценим $\|\sigma^\circ\|$ через p_0 и p. Для этого вначале $\|\sigma^\circ\|$ оценивается через $\|\varepsilon^\circ\|$, затем $\|\varepsilon^\circ\|$ — через p_0 и p. Первая оценка получается подстановкой в $\|\sigma^\circ\|$ выражений (3.1) компонент тензора напряжений

$$\|\sigma^\circ\|^2 = E (1 + \nu)^{-1} J_1 + \nu (1 + \nu)^{-1} \|\sigma^\circ\|_1$$
$$J_1 = \iint [\sigma_r^\circ (I - N)\, \varepsilon_r^\circ + 2\sigma_{r\varphi}^\circ (I - N)\, \varepsilon^\circ_{r\varphi} + \sigma_\varphi^\circ (I - N)\, \varepsilon_\varphi^\circ]\, d\omega$$
$$\|\sigma^\circ\|_1^2 = \iint (\sigma_r^\circ + \sigma_\varphi^\circ)^2\, d\omega = E (1 - \nu)^{-1} \iint (\sigma_r^\circ + \sigma_\varphi^\circ)(I - N)(\varepsilon_r^\circ + \varepsilon_\varphi^\circ)\, d\omega$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$(1 - \nu)(1 + \nu)^{-1} \|\sigma^\circ\|^2 \leqslant \|\sigma^\circ\|^2 - \nu (1 + \nu)^{-1} \|\sigma^\circ\|_1^2 = E (1 + \nu)^{-1} J_1$$

аналогично предыдущему получим

(4.2) $$|\sigma^\circ|_s \leqslant E (1 - \nu)^{-1} (1 + |N_1|)\, |\varepsilon^\circ|_s, \quad |\varepsilon^\circ|_s = \sup_t \|\varepsilon^\circ\|$$

Обратимся теперь к оценке $|\varepsilon^\circ|_s$ через p_0 и p. Обозначим через $u(t, r, \varphi)$ радиальное, а через $v(t, r, \varphi)$ дуговое перемещения точек пластины. Умножим первое уравнение (4.1) на u, второе — на v, сложим и проинтегрируем по области Ω. Интегрируя по частям с учетом (3.3), будем иметь

$$(\sigma^\circ, \varepsilon^\circ) \equiv \iint (\sigma_r^\circ \varepsilon_r^\circ + 2\sigma_{r\varphi}^\circ \varepsilon_{r\varphi}^\circ + \sigma_\varphi^\circ \varepsilon_\varphi^\circ)\, d\omega = J_2$$
$$(\varepsilon_r^\circ = \delta_r u,\ 2\varepsilon_{r\varphi}^\circ = r^{-1}\delta_\varphi u + \delta_r v - r^{-1} v,\ \varepsilon_\varphi^\circ = r^{-1} u + r^{-1}\delta_\varphi v)$$
$$J_2 = -\int_0^{2\pi} [pRu(R) - p_0 R_0 u(R_0)]\, d\varphi$$

Заменяя здесь компоненты тензора напряжений по формулам (2.1), получим

(4.3) $$J^2 \equiv (1-\nu)\iint (\varepsilon_r^{\circ 2} + 2\varepsilon_{r\varphi}^{\circ 2} + \varepsilon_\varphi^{\circ 2})\, d\omega + \nu \iint (\varepsilon_r^\circ + \varepsilon_\varphi^\circ)^2\, d\omega =$$
$$= (1-\nu)\iint (\varepsilon_r^\circ N \varepsilon_r^\circ + 2\varepsilon_{r\varphi}^\circ N \varepsilon_{r\varphi}^\circ + \varepsilon_\varphi^\circ N \varepsilon_\varphi^\circ)\, d\omega +$$
$$+ \nu \iint (\varepsilon_r^\circ + \varepsilon_\varphi^\circ) N (\varepsilon_r^\circ + \varepsilon_\varphi^\circ)\, d\omega + (1-\nu^2) E^{-1} J_2$$

Величину J_2 преобразуем следующим образом:

$$J_2 = -\int_0^{2\pi}\left[\left(p\int_0^R - p_0\int_0^{R_0}\right)(\delta_r u + r^{-1}u)\, r\, dr\right] d\varphi =$$
$$= -\int_0^{2\pi}\left\{\left[p\int_{R_0}^R + (p-p_0)\int_0^{R_0}\right](\delta_r u + r^{-1}u + r^{-1}\delta_\varphi v)\, r\, dr\right\} d\varphi =$$
$$= -p\iint (\varepsilon_r^\circ + \varepsilon_\varphi^\circ)\, d\omega - (p-p_0)\int_0^{2\pi}\int_0^{R_0}(\varepsilon_r^\circ + \varepsilon_\varphi^\circ)\, r\, dr\, d\varphi$$

Тогда согласно неравенству Коши — Буняковского из (4.3) можно получить, что

$$J^2 \leqslant J\int_0^t N_1(t, \tau)\, J\, d\tau + E^{-1}(1-\nu^2)(2\pi)^{1/2}\zeta\, \|\varepsilon^\circ\|$$
$$\zeta = p\,(R^2 - R_0^2)^{1/2} + |p - p_0|\, R_0$$

Откуда, учитывая неравенство $J^2 \geqslant (1-\nu)\|\varepsilon^\circ\|^2$, будем иметь

$$(1 - |N_1|)\, |\varepsilon^\circ|_s \leqslant (1+\nu)\, E^{-1}\, (2\pi)^{1/2}\zeta$$

Это вместе с (4.2) дает оценку

(4.4) $$|\sigma^\circ|_s \leqslant P = (2\pi)^{1/2}(1+\nu)(1+|N_1|)\,[(1-\nu)(1 - |N_1|)]^{-1}\zeta$$

Используя (4.4) для оценки I_3 из (3.5) и результат теоремы, заключаем, что пластина будет устойчивой при следующем условии на сжимающие нагрузки:

(4.5) $$P \leqslant D\lambda\, [h\,(1 + |L_0|)]^{-1}$$

Замечания. 1°. Если материал пластины обладает только свойствами 1°—2°, то условия (3.11), (4.5) примут соответственно вид

$$\|\sigma^\circ\| \leqslant |\sigma^\circ|_s \leqslant D\lambda h^{-1}(1 - |N_1|),\quad P \leqslant D\lambda h^{-1}(1 - |N_1|)$$

Для доказательства этого факта используется уравнение (2.6).

2°. Полученные условия устойчивости (3.11) и (4.5) сохраняют свой вид и при других типах опирания пластин. Только параметр λ находится из (3.6) с граничными условиями, соответствующими типу опирания.

3°. Предположим, что пластина нагружена таким образом, что напряжения внутри ее постоянны [2.3]. Тогда условия устойчивости упрощаются и имеют следующий вид. Обозначим через $\lambda_1 - \lambda_4$ минимальные собственные значения краевых задач

$$\Delta\Delta w + \lambda\Delta w = 0,\quad \Delta\Delta w + \lambda\delta_{rr}^2 w = 0$$
$$\Delta\Delta w + \lambda\,(r^{-1}\delta_r w + r^{-2}\delta_{\varphi\varphi}^2 w) = 0,\quad \Delta\Delta w + 2\lambda\delta_r\,(r^{-1}\delta_\varphi w) = 0$$

с краевыми условиями, соответствующими типу опирания. Если $\sigma_r^\circ = \sigma_\varphi^\circ$, $\sigma_{r\varphi}^\circ = 0$, то пластина устойчива при $|\sigma_r^\circ| \leqslant f(\lambda_1)$; если $\sigma_\varphi^\circ = \sigma_{r\varphi}^\circ = 0$, то при $|\sigma_r^\circ| \leqslant f(\lambda_2)$; если $\sigma_r^\circ = \sigma_{r\varphi}^\circ = 0$, то при $|\sigma_\varphi^\circ| \leqslant f(\lambda_3)$; если $\sigma_r^\circ = \sigma_\varphi^\circ = 0$, то при $|\sigma_{r\varphi}^\circ| < f(\lambda_4)$. Здесь $f(\lambda) = D\lambda\,[h\,(1 + |L_0|)]^{-1}$.

При $|L_0| \equiv 0$ и $p_0 = p$ полученные условия совпадают с условиями устойчивости упругих кольцевых пластин [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.
4. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.— М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
5. *Brayan G. H.* On the stability of a Plane Plate under Thrusts in its owin Plane, with Application to the «Buckling» of the Sides of a Ship.— Proce. London Mathe. Sos., 1891, v. 22, p. 54—67.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
7. *Кошелев А. И.* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем.— Успехи мат. наук АН СССР, 1958, т. 13, в. 4, с. 29—88.
8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
9. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.I.1984