

УДК 539.383 : 534.1

ВИБРАЦИЯ СИСТЕМЫ МАССИВНЫХ ШТАМПОВ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

Глушков Е. В.

Для решения динамических контактных задач с произвольными в плане областями контакта применяется вариационно-разностный метод, трудоемкость реализации которого существенно снижена, а сходимость улучшена за счет выбора в качестве координатных дельтаобразных функций специального вида. Приводятся результаты численных исследований колебаний системы массивных прямоугольных штампов на упругом слое. Выявлено наличие резонансных частот, значения которых зависят от размеров и массы штампов, наличие экранирующего эффекта при набегании поверхностных волн на систему штампов.

Ранее численно исследовались колебания массивного фундамента прямоугольной в плане формы [1] и вибрация системы двух массивных прямоугольных фундаментов [2]. Однако использованные подходы обладают худшей по сравнению с вариационно-разностным методом сходимостью¹ и требуют вычисления двукратных интегралов от сильноосциллирующих функций. Этот недостаток, как, в частности, отмечено в работе [3], присущ всем методам, основанным на разбиении области контакта на клетки с равномерным распределением напряжения в них.

1. Рассматривается упругое линейно-деформируемое основание, занимающее объем $-\infty \leq x, y \leq \infty, -\infty \leq -h \leq z < 0$, на поверхности которого ($z = 0$) расположено N массивных штампов с плоским основанием, занимающих область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \dots \cup \Omega_N$. Границы областей Ω_k — кусочно-гладкие с угловыми точками.

На штампы действуют некоторые заданные гармонические нагрузки $f_k(x, y) e^{-i\omega t}$, $k = 1, \dots, N$, кроме того, их колебания могут быть вызваны волнами, приходящими от нагрузки $g(x, y) e^{-i\omega t}$, приложенной непосредственно к поверхности среды; ω — круговая частота установившихся колебаний, t — время. Штампы в общем случае сцеплены со средой, т. е.

$$(1.1) \quad u(x, y, z) = u_k(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_k, \quad z = 0$$

(u, u_k — комплексные амплитуды перемещений среды и штампов). На бесконечности требуется выполнение условий излучения энергии, обеспечивающих единственность решения поставленной задачи [4].

Поверхностные напряжения $q(x, y) e^{-i\omega t} = \uparrow \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$ и коэффициенты Ламе среды λ, μ отнесены к характерному значению модуля сдвига μ_0 , плотность ρ — к характерной плотности ρ_0 , линейные размеры — к характерному линейному размеру l (в численных примерах — к толщине слоя h). В этом случае в качестве частоты берется обобщенная частота $\bar{\omega} = \omega l \sqrt{\rho_0/\mu_0}$, силы задаются в единицах $\mu_0 l^2$, массы — в $\rho_0 l^3$. В дальнейшем все выражения приведены в безразмерном виде; черта над $\bar{\omega}$ опущена.

Зависимость перемещений среды u от поверхностных нагрузок q , характеризующая ее податливость, выводится с использованием стан-

¹ Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1973, № 33. 55 с.

дартной техники интегральных преобразований Фурье и имеет вид [4]

$$\begin{aligned}
 & u(x, y, z) \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta, z) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
 & \mathbf{k}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z) \exp[-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)] d\alpha_1 d\alpha_2 \\
 (1.2) \quad \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z) = & \left\| \begin{array}{ccc} -i(\alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N) & -i\alpha_1 \alpha_2 (M - N) & -i\alpha_1 P \\ -i\alpha_1 \alpha_2 (M - N) & -i(\alpha_1^2 N + \alpha_2^2 M) & -i\alpha_2 P \\ \alpha_1 S & \alpha_2 S & R \end{array} \right\|
 \end{aligned}$$

Здесь Γ_1, Γ_2 — контуры интегрирования, вид которых диктуется принципом предельного поглощения [5]; M, N, P, R, S — функции $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ и z , определяемые из некоторых краевых задач для систем дифференциальных уравнений. В случае однородных сред этих функции могут быть выписаны в явном виде, для стратифицированных и многослойных сред разработаны численные методы их построения².

Если штампы недеформируемы, то перемещения $u_k(x, y)$ каждого из них удовлетворяют уравнениям движения твердого тела

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad & \begin{cases} \mathbf{u}_k = \mathbf{w}_k + \boldsymbol{\varphi}_k \times \mathbf{R}_k \\ -\omega^2 m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{P}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ -\omega^2 J_{k,l} \boldsymbol{\varphi}_{k,l} = M_{k,l}, \quad l = 1, 2, 3 \\ \mathbf{R}_k = \uparrow \{x - x_k, y - y_k, z - z_k\} \\ \mathbf{P}_k = \iint_{\Omega_k} (\mathbf{f}_k - \mathbf{q}) dx dy \\ \mathbf{M}_k = \iint_{\Omega_k} \mathbf{R}_k \times (\mathbf{f}_k - \mathbf{q}) dx dy \end{cases}
 \end{aligned}$$

Здесь m_k — масса, \mathbf{w}_k — перемещение центра массы k -го штампа, (x_k, y_k, z_k) — координаты его центра массы, $\boldsymbol{\varphi}_k$ — вектор углов поворота штампа вокруг осей, проходящих через его центр массы и параллельных осям Ox, Oy, Oz , J_k — вектор моментов инерции относительно тех же осей, \mathbf{P}_k — главный вектор, \mathbf{M}_k — главный момент сил, действующих на k -й штамп, $-\mathbf{q}$ — реакция среды на внедрение штампов, $J_{k,l}, M_{k,l}, \boldsymbol{\varphi}_{k,l}, w_{k,l}$ ($l = 1, 2, 3$) — компоненты соответствующих векторов.

Каждый вектор \mathbf{u}_k выражается через шесть неизвестных $w_{k,l}, \boldsymbol{\varphi}_{k,l}$ ($l = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_k &= \sum_{l=1}^3 (w_{k,l} \mathbf{e}_l + \boldsymbol{\varphi}_{k,l} (\mathbf{e}_l \times \mathbf{R}_k)) \\
 \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Интегральное соотношение, связывающее перемещения штампов с поверхностными напряжениями, в силу граничных условий (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad \mathbf{K}\mathbf{q} &\equiv \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta, 0) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\
 &= \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k(x, y) - \mathbf{u}_H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega
 \end{aligned}$$

² См. [5], а также: Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Расчет энергии упругих волн, возбуждаемых поверхностными источниками в стратифицированном полупространстве. Ростов-на-Дону, 1981.— 30 с. Деп. в ВИНТИ 24.12.81; № 5827-81.

(\mathbf{u}_H — перемещения поверхности, вызванные нагрузкой g). В соответствии с (1.4)

$$(1.5) \quad \mathbf{q} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^3 (w_{k,l} \mathbf{q}_{k,l} + \varphi_{k,l} \mathbf{q}_{k,l+3}) - \mathbf{q}_H$$

Векторы $\mathbf{q}_{k,m}$ ($m = 1, \dots, 6$), \mathbf{q}_H удовлетворяют системам интегральных уравнений

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{q}_{k,l} &= \chi_k \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{K} \mathbf{q}_{k,l+3} = \chi_k (\mathbf{e}_l \times \mathbf{R}_k), \quad l = 1, 2, 3 \\ \mathbf{K} \mathbf{q}_H &= \mathbf{u}, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ \chi_k(x, y) &= \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_k \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_k \end{cases} \end{aligned}$$

$6N$ неизвестных $w_{k,l}$, $\varphi_{k,l}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, возникающей после подстановки (1.5) в (1.3)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_k \mathbf{s}_k + \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_{kj} \mathbf{s}_j &= \mathbf{T}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{s}_k &= \uparrow \{w_{k,1}, w_{k,2}, w_{k,3}, \varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, \varphi_{k,3}\} \\ \mathbf{E}_k &= -\omega^2 \text{diag} (m_k, m_k, m_k, J_{k,1}, J_{k,2}, J_{k,3}) \\ \mathbf{R}_{kj} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,kj} \cdots \mathbf{A}_{6,kj} \\ \mathbf{B}_{1,kj} \cdots \mathbf{B}_{6,kj} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— матрица размером 6×6 .

$$\mathbf{A}_{m,kj} = \iint \mathbf{q}_{j,m} dx dy, \quad \mathbf{B}_{m,kj} = \iint (\mathbf{R}_k \times \mathbf{q}_{j,m}) dx dy, \\ m = 1, 2, \dots, 6$$

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} \iint (\mathbf{f}_k + \mathbf{q}_H) dx dy \\ \iint (\mathbf{R}_k \times (\mathbf{f}_k + \mathbf{q}_H)) dx dy \end{pmatrix}$$

(интегралы берутся по области Ω_k).

Системы (1.6) решаются вариационно-разностным методом [6]. Общая схема метода подробно изложена³, доказана его сходимость, дан вид координатных функций, показано, как уменьшить трудоемкость его реализации на ЭЦВМ. Расчет контактных напряжений под прямоугольным в плане штампом, контактирующим со средой без трения, проведенный методом фиктивного поглощения⁴, дал совпадение с результатами, полученными вариационно-разностным методом. Особенность контактных напряжений в окрестности угловых точек Ω_k изучена в работе [7].

2. Численные исследования проводились для следующей модели. Среда — упругий слой единичной толщины, жестко сцепленный с недеформируемым основанием, коэффициент Пуассона слоя $\nu = 0,3$. При этом в (1.2)

$$\begin{aligned} R(\alpha, 0) &= -\kappa_2^2 \gamma_1 (\alpha^2 \text{sh } \gamma_2 \text{ch } \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2 \text{sh } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2) / \Delta \\ M(\alpha, 0) &= -i \kappa_2^2 \gamma_2 (\alpha^2 \text{sh } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 \text{sh } \gamma_2 \text{ch } \gamma_1) / \Delta \\ N(\alpha, 0) &= i \text{sh } \gamma_2 / (\alpha^2 \gamma_2 \text{ch } \gamma_2) \\ \Delta(\alpha) &= 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^2 + \gamma_2^2) - \gamma_1 \gamma_2 [4\alpha^4 + (\alpha^2 + \gamma_2^2)^2] \text{ch } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 + \\ &+ \alpha^2 [(\alpha^2 + \gamma_2^2)^2 + 4\gamma_1^2 \gamma_2^2] \text{sh } \gamma_1 \text{sh } \gamma_2 \end{aligned}$$

³ Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Зинченко Ж. Ф. Установившиеся колебания массивных объектов на поверхности упругой среды. Ростов-на-Дону, 1981.— 87 с. Деп. в ВИНТИ 22.01.82; № 290-82.

⁴ Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Метод фиктивного поглощения в пространственных динамических контактных задачах теории упругости. Ростов-на-Дону, 1981.— 19 с. Деп. в ВИНТИ 10.04.81; № 1578-81.

$$\gamma_m = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_m^2}, \operatorname{Re} \gamma_m \geq 0, \operatorname{Im} \gamma_m \leq 0, m = 1, 2$$

$$\kappa_1^2 = \frac{\rho \omega^2 h^2}{\lambda + 2\mu}, \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2 h^2}{\mu} = \bar{\omega}^2 (\mu_0 = \mu)$$

Штампы считаются плоскими ($z_k = 0$, $\mathbf{R}_k = \uparrow \{x - x_k, y - y_k, 0\}$), прямоугольной в плане формы, размера 3×4 по отношению к h . Рассмотрен случай контакта без трения при заданных вертикальных нагрузках (случай А) и случай возникновения контактных напряжений только в направлении, параллельном оси Ox (случай Б, пленочный штамп).

В случае А отыскиваются $w_{k,3}$, $\Phi_{k,1}$, $\Phi_{k,2}$, σ_z , а $w_{k,1}$, $w_{k,2}$, $\Phi_{k,3}$, τ_{xz} , τ_{yz} тождественно равны нулю; в случае Б не равны нулю $w_{k,1}$, $\Phi_{k,3}$, τ_{xz} . При этом в системе (1.6) интегральный оператор становится одномерным, соответствующим одному элементу матрицы \mathbf{K} — K_{33} в случае А и K_{11} в случае Б. Кроме того, уменьшается размерность системы (1.7), в которой отбрасываются строки, соответствующие касательным составляющим сил в случае А и составляющим, не параллельным Ox , в случае Б.

В качестве набегающих волн взяты

$$(2.1) \quad u_{H,3} = c_3 \sum_{r=1}^p \operatorname{res} R(\alpha, 0) |_{\alpha=\zeta_r} \exp(i\zeta_r x) \quad (\text{А})$$

$$u_{H,1} = c_1 \left(\sum_{r=1}^p \operatorname{res} M(\alpha, 0) |_{\alpha=\zeta_r} \left(\sqrt{\zeta_r} + \frac{i}{r_0 \sqrt{\zeta_r}} \right) \exp(i\zeta_r x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^q \operatorname{res} N(\alpha, 0) |_{\alpha=\zeta'_s} \frac{1}{r_0 \sqrt{\zeta'_s}} \exp(i\zeta'_s x) \right) \quad (\text{Б})$$

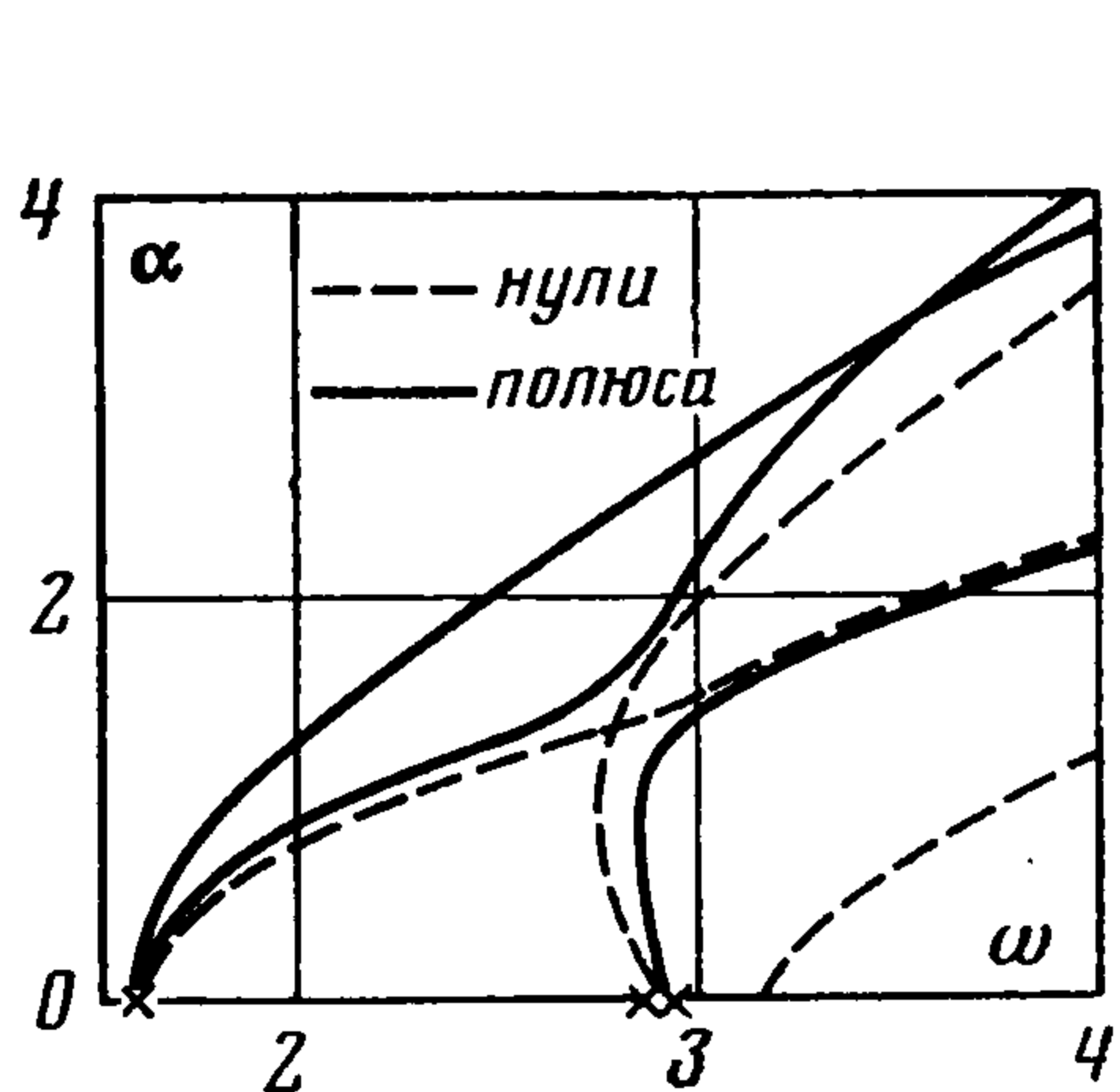
т. е. асимптотика поверхностных волн, приходящих от источника колебаний, расположенного на расстоянии $r_0 \gg 1$. Здесь ζ_r ($r = 1, \dots, p$), ζ'_s ($s = 1, \dots, q$) — вещественные полюса функций R , M и N ; $c_1, c_3 = \text{const}$ (в расчетах $c_1 = c_3 = 1$, $r_0 = 40$).

Замечание. Реальные нагрузки, отнесенные к μh^2 , — величины порядка 10^{-8} — 10^{-12} , поэтому при переходе к конкретным параметрам результаты, приведенные ниже, которые были получены для единичных сил, уменьшатся на много порядков.

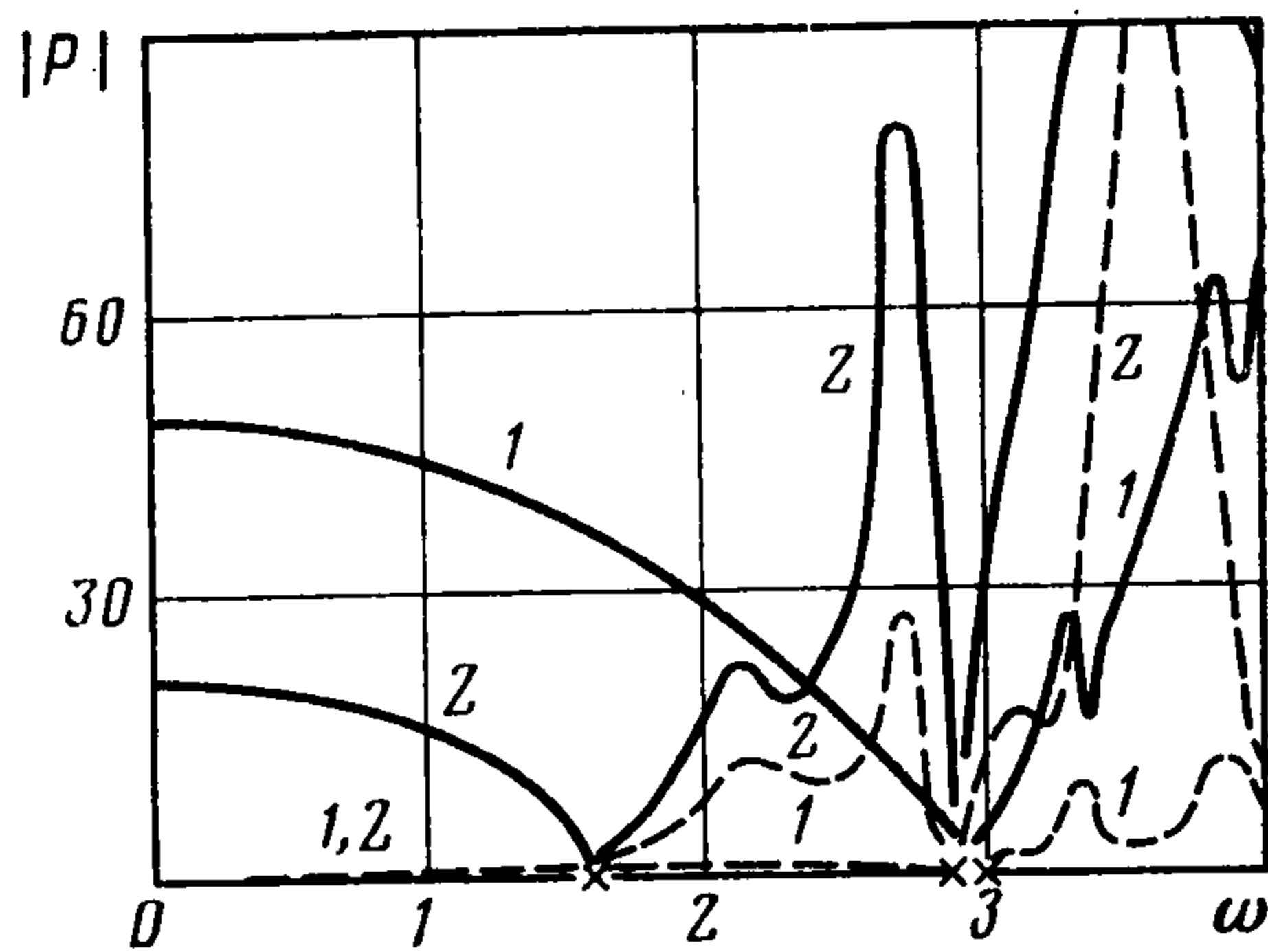
На фиг. 1 даны зависимости нулей (штриховые линии) и полюсов (сплошные линии) функций R , M , N от частоты. Частоты, при которых полюса становятся неустраиваемыми, двукратными (частоты собственных колебаний слоя), здесь и далее отмечены звездочками ($\omega = 2,88; 2,92$ в случае А и $\omega = 1,57; 2,88$ в случае Б).

На фиг. 2 приведена зависимость от ω амплитуды усилий P , возникающих под штампом, колеблющимся поступательно с единичной амплитудой, в случаях А (линии 1) и Б (линии 2): штрихами нанесены амплитуды усилий под покоящимся штампом, расположенным рядом с вибрирующим. Видно, что на собственных частотах слоя, соответствующих двукратным полюсам, равным нулю, амплитуда усилий обращается в нуль. Этот результат совпадает с полученным ранее для полосового штампа [8] и удовлетворяет требованиям теории в силу известной теоремы ([4] с. 239).

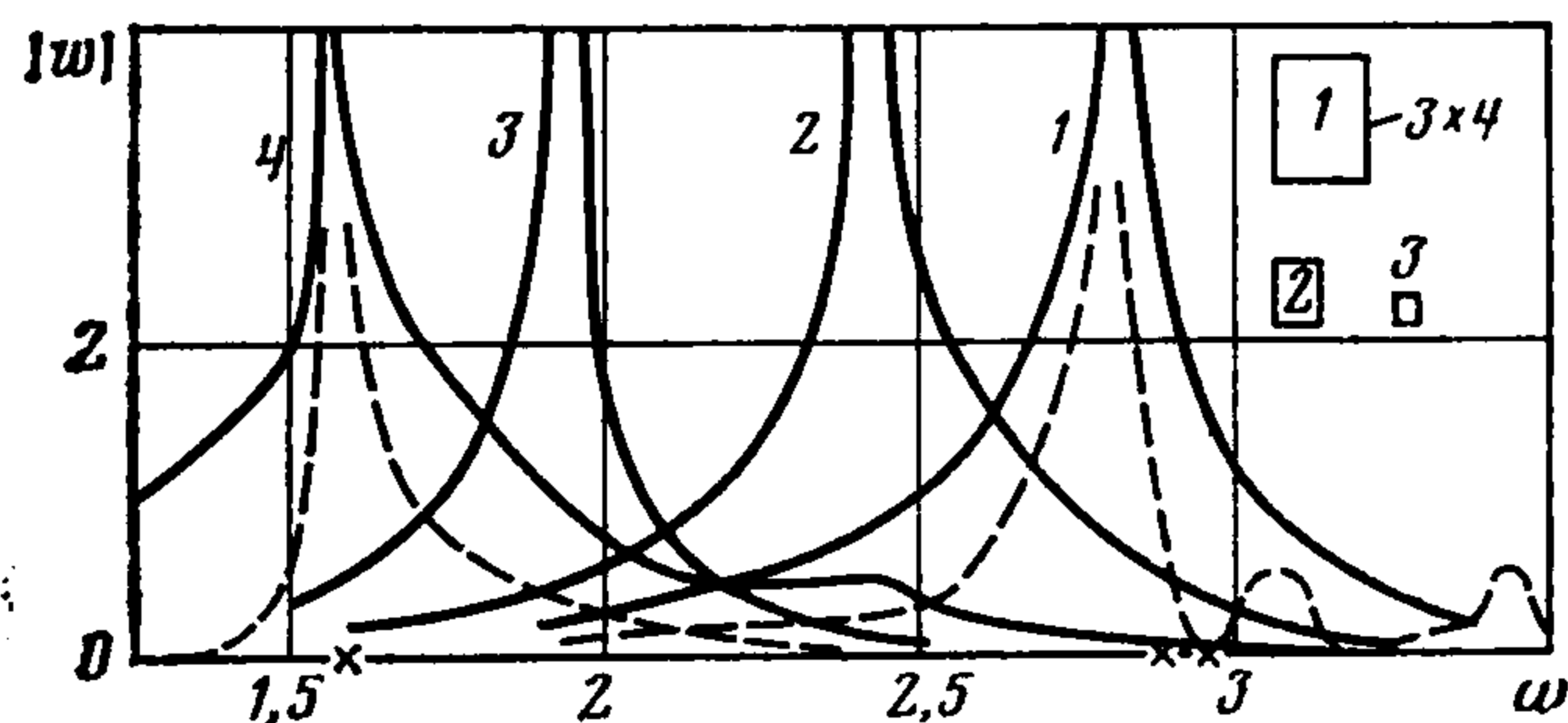
На фиг. 3 сплошными линиями 1—3 даны амплитуды вертикальных перемещений центра масс w_3 (случай А) одиночного штампа единичной массы различных размеров, колеблющегося под действием единичной нагрузки (номер линии соответствует номеру штампа). Приведены также результаты расчетов вибрации системы двух штампов размера 3×4 , один



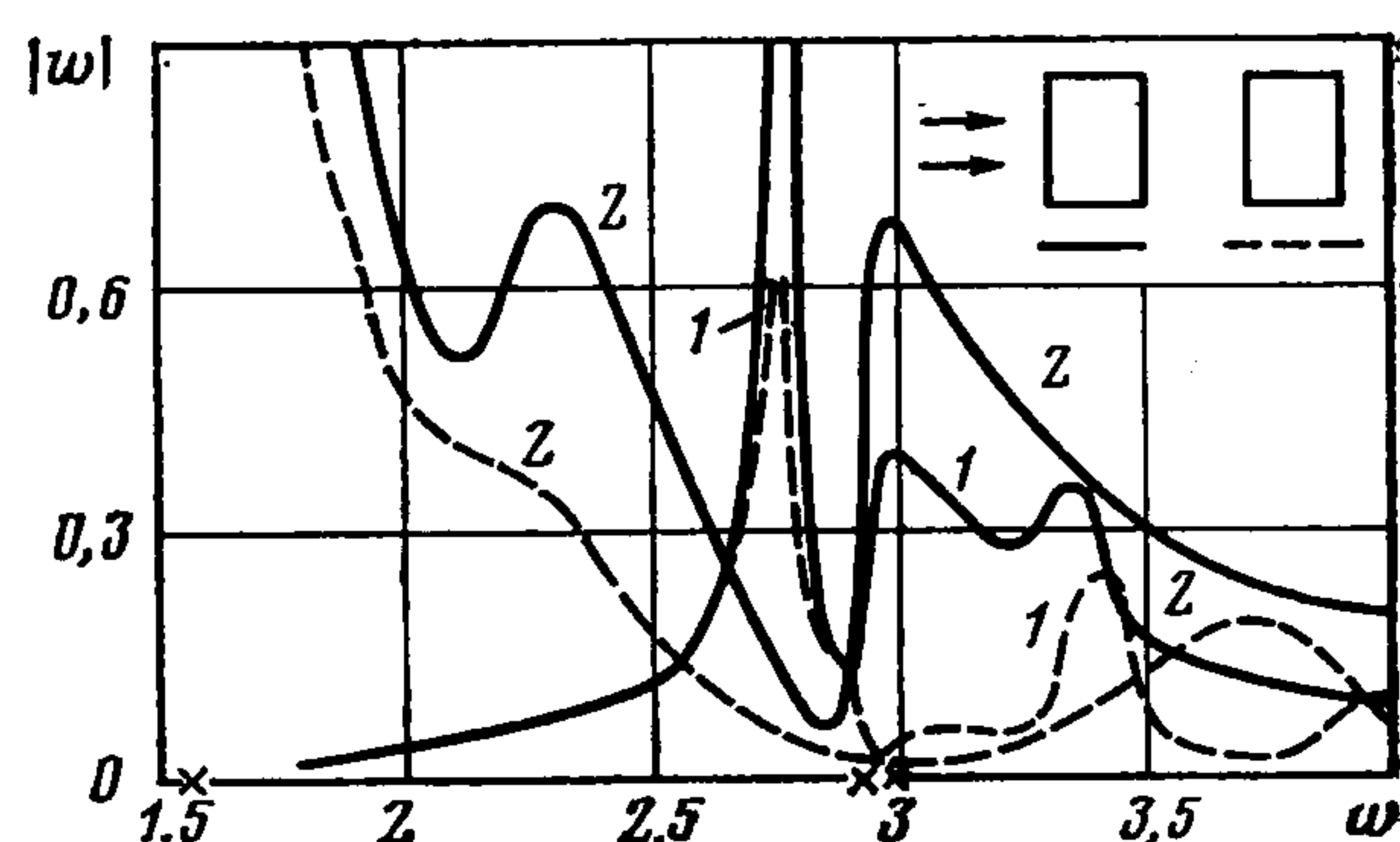
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

из которых нагружен (сплошные линии), а второй свободен от нагрузок (штриховые линии). Перемещения нагруженного штампа практически совпадают с перемещениями одиночного (линия 1, случай А); линии 4 — результат для системы пленочных штампов, случай Б.

Видны резонансные частоты, положение которых меняется при изменении размеров или массы штампа. Существование таких дискретных резонансных частот системы штамп — слой в диапазоне частот до появления сплошного спектра показано в [9]. Ясно, что резонансными могут быть только те частоты, на которых обращается в нуль определитель системы (1.7).

На фиг. 4 представлены перемещения двух ненагруженных штампов под действием набегающих на них поверхностных волн; в случаях А (линии 1) и Б (линии 2); сплошные линии — левый штамп, штриховые — правый. Видно, что экранирующий эффект — уменьшение амплитуды колебаний правого штампа по сравнению с колебаниями левого — сильнее на более высоких частотах, особенно начиная с первой собственной. Очевидно, для его проявления необходимо, чтобы размеры перекрывающей области были достаточно велики по сравнению с длиной волны. Так, для штампов вчетверо меньших размеров ($0,75 \times 1$) экранирование на этих же частотах практически незаметно.

Автор благодарит В. А. Бабешко, Ж. Ф. Зинченко и Н. В. Глушкову за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wong H. L., Luco J. E. Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape. — Internat. J. Earthquake Eng. and Struct. Dyn., 1976, v. 4, No. 6, p. 579—587.
2. Savidis S. A., Richter J. Dynamic interaction of rigid foundations. — Proc. 9th Int. Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. V. 2, Tokyo, 1977, p. 369—374.
3. Kitamura J., Sakurai S. Dynamic stiffness for rectangular rigid foundations on a semi-infinite elastic medium. — Internat. J. Numer. and Anal. Meth. Geomech., 1979, No. 2, p. 159—171.

4. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* К расчету динамической прочности вязкоупругого неоднородного по глубине полупространства при произвольной форме в области контакта.— В кн.: Тез. докл. 7-й Всес. конф. по прочности и пластичности. Горький; Изд-е Горьк. ун-та, 1978, с. 12.
6. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* К проблеме динамических контактных задач в произвольных областях.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 61—67.
7. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 2, с. 289—294.
8. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Плоская задача о колебании штампа на слое.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высшей школы. Естеств. н., 1979, № 1, с. 23—25.
9. *Ворович И. И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 5, с. 1076—1079.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
11.II.1983