

УДК 539.383

## О СИММЕТРИЧНЫХ И НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Александров В. М., Сметанин Б. И.

Контактные задачи теории упругости можно подразделить на два больших класса: симметричные контактные задачи, для которых ядра интегральных уравнений типа свертки задаются четными или нечетными функциями, и несимметричные контактные задачи, для которых ядра задаются суммой четной и нечетной функций. Некоторые задачи последнего класса, по-видимому, впервые были рассмотрены в [1—3]. В данной работе излагается общий подход к их изучению и строится приближенное решение, результаты демонстрируются на двух новых задачах.

1. Как известно [4—6], многие плоские и осесимметричные контактные задачи теории упругости приводятся к определению контактных усилий из интегрального уравнения первого рода с разностным ядром вида

$$(1.1) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \quad (|x| \leq 1)$$

$$(1.2) \quad k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} K(\zeta) e^{i\zeta t} d\zeta$$

Здесь  $\varphi(x)$  — безразмерное контактное усилие,  $\lambda$  — безразмерный геометрический или физико-механический параметр,  $f(x)$  — функция, определяемая контактным условием,  $K(\zeta)$  — аналитическая функция комплексного переменного  $\zeta = u + iv$ , четная и вещественная на вещественной оси.

Большинство встречающихся статических контактных задач по поведению символа  $K(\zeta)$  ядра (1.2) на вещественной оси в нуле и в бесконечности можно разбить на три группы:

$$(1.3) \quad K(u) \rightarrow |u|^{-1} (|u| \rightarrow \infty), \quad K(u) \rightarrow A (u \rightarrow 0)$$

$$(1.4) \quad K(u) \rightarrow |u|^{-1} (|u| \rightarrow \infty), \quad K(u) \rightarrow B |u|^{-1} (u \rightarrow 0)$$

$$(1.5) \quad K(u) \rightarrow |u|^{-1} (|u| \rightarrow \infty), \quad K(u) \rightarrow Cu^{-2} (u \rightarrow 0)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные. Случаи (1.3) и (1.4) достаточно хорошо изучены [4, 7]. В данной работе подробно исследуем случай (1.5).

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$(1.6) \quad J_\varepsilon(t) = \int_{\Gamma} \frac{H(\zeta)}{\zeta^2 - \varepsilon^2} e^{i\zeta t} d\zeta \quad (\varepsilon > 0)$$

по контуру  $\Gamma$  в плоскости комплексного переменного  $\zeta$ ,  $H(\zeta)$  — аналитическая функция, возрастающая как  $|\zeta|$  на правильной системе контуров  $C_n \subset C_{n+1}$  при  $n \rightarrow \infty$  [4, 8], четная и вещественная на вещественной оси.

Пусть контур  $\Gamma$  имеет вид, изображенный на фиг. 1 ( $c > 0$ ). Тогда, предполагая, что внутри области, очерченной контуром  $\Gamma$ , функция  $H(\zeta)$  регулярна, и используя теорию вычетов, найдем

$$(1.7) \quad J_\varepsilon(t) = \pi \varepsilon^{-1} H(\varepsilon) \sin \varepsilon t$$

С другой стороны, устремляя  $l$  к бесконечности и замечая, что интегралы по отрезкам  $AB$  и  $CD$  исчезают, будем иметь

$$(1.8) \quad J_\varepsilon(t) = \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{H(\zeta)}{\zeta^2 - \varepsilon^2} e^{i\zeta t} d\zeta - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(u)}{u^2 - \varepsilon^2} e^{iut} du$$

На основании (1.7) и (1.8) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$(1.9) \quad k(t) = \int_0^\infty K(u) \cos ut du + \frac{\pi}{2} H(0) t$$

где принято  $H(u) = u^2 K(u)$ . Аналогично, если  $c < 0$ , то

$$(1.10) \quad k(t) = \int_0^\infty K(u) \cos ut du - \frac{\pi}{2} H(0) t$$

Пусть теперь в (1.6) контур  $\Gamma$  совпадает с действительной осью ( $c = 0$ ). Тогда интеграл (1.6) будем понимать в смысле главного значения по Коши. При этом, устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получим

$$(1.11) \quad k(t) = \int_0^\infty K(u) \cos ut du$$

Заметим, что интеграл в (1.9)–(1.11) определен с точностью до бесконечной постоянной  $D$ , которую можно выделить, например, следующим образом:

$$(1.12) \quad \int_0^\infty K(u) \cos ut du = \int_0^\infty K(u) (\cos ut - e^{-u^2}) du + D$$

Наличие этой постоянной в ядре  $k(t)$  не позволяет в задачах группы (1.5) (как, впрочем, и в задачах группы (1.4)) определить связь между жестким поступательным перемещением штампа и действующим на него усилием.

2. С учетом (1.9) и (1.10) интегральное уравнение (1.1) можно записать в виде

$$(2.1) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[ \int_0^\infty K(u) \cos u \frac{\xi - x}{\lambda} du \pm \frac{\pi}{2} H(0) \frac{\xi - x}{\lambda} \right] d\xi = \pi f(x) \\ (|x| \leq 1)$$

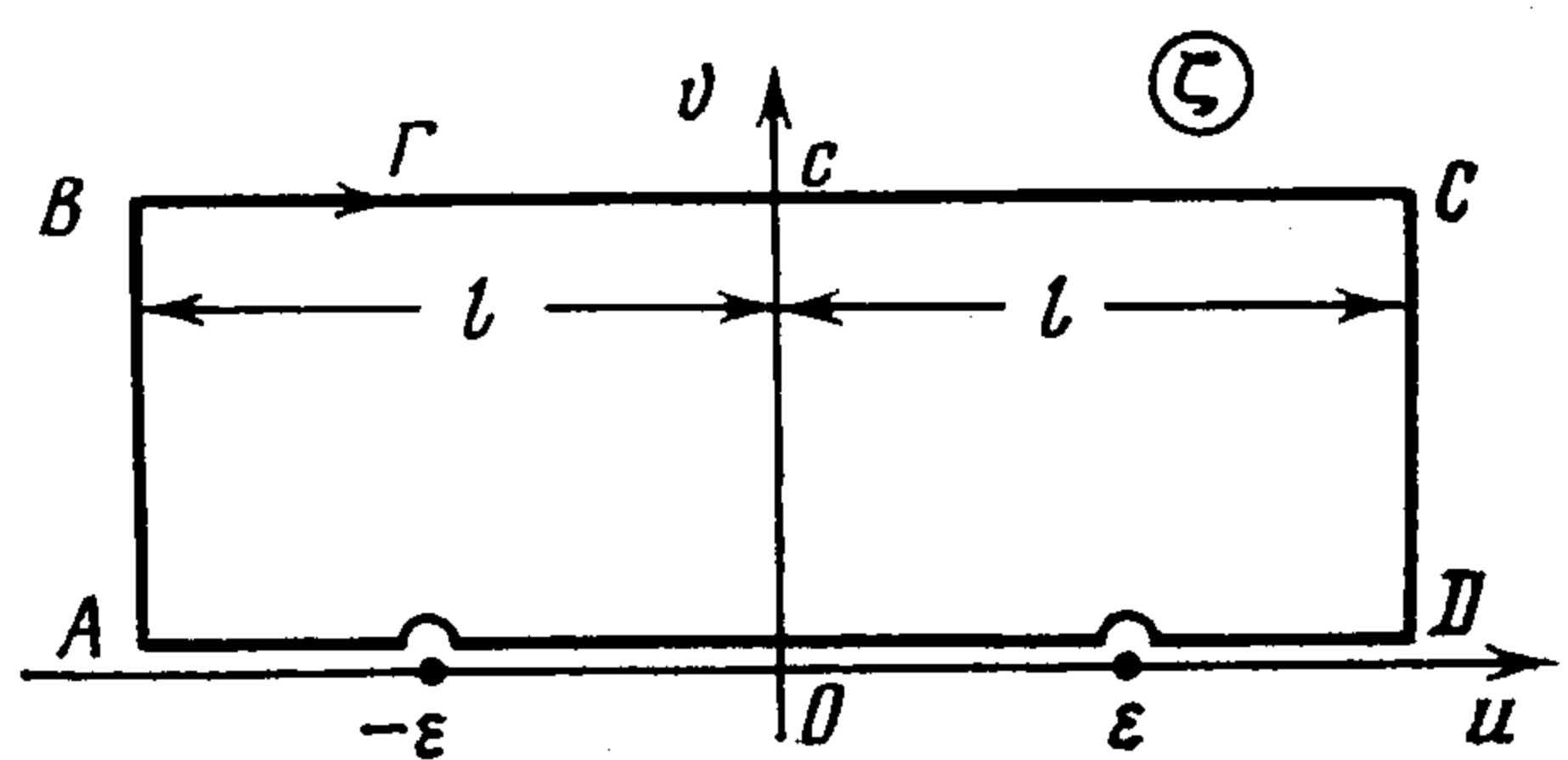
Здесь и далее в случае двойного знака верхний знак соответствует  $c > 0$ , нижний знак —  $c < 0$  в (1.2).

Из (2.1) после дифференцирования по  $x$  получим

$$(2.2) \quad F(x) = \pi \lambda f'(x) \quad (|x| \leq 1) \\ \left( F(x) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[ \int_0^\infty \frac{H(u)}{u} \sin u \frac{\xi - x}{\lambda} du \mp \frac{\pi}{2} H(0) \right] d\xi \right)$$

В (2.2) и далее при  $c = 0$  слагаемое с двойным знаком следует опускать. Введем обозначение

$$(2.3) \quad f_*'(x) = (\pi \lambda)^{-1} F(x) \quad (|x| > 1)$$



Фиг. 1

На основании теоремы 5 § 3 главы 1 [9] можно установить

$$(2.4) \quad \int_0^{\infty} \frac{H(u)}{u} \sin ut \, du \rightarrow \begin{cases} 1/2\pi H(0), & t \rightarrow +\infty \\ -1/2\pi H(0), & t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Из (2.3) и (2.4) следует

$$(2.5) \quad f'_*(x) \rightarrow \begin{cases} 1/2P\lambda^{-1}H(0)(1 \mp 1), & x \rightarrow -\infty \\ -1/2P\lambda^{-1}H(0)(1 \pm 1), & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

где постоянная  $P$  считается известной и определяется интегралом

$$(2.6) \quad P = \int_{-1}^1 \varphi(x) \, dx$$

Таким образом, положение контура интегрирования в (1.2) может определяться в соответствии с (2.5) условиями на бесконечности для функции  $f'_*(x)$ .

Эффективное решение уравнения (2.2) может быть получено асимптотическими методами «больших и малых  $\lambda$ » [4, 10].

Ограничимся построением приближенного решения интегрального уравнения (2.2), основанного на аппроксимации функции  $H(u)$  выражением

$$(2.7) \quad H(u) = u \operatorname{cth} Au \quad (H(0) = A^{-1})$$

Аппроксимация (2.7) соответствует основным свойствам (1.5) функции  $K(u) = u^{-2}H(u)$ . С использованием (2.6), (2.7) и обобщенного значения интеграла

$$(2.8) \quad \int_0^{\infty} \operatorname{cth} Au \sin ut \, du = \frac{\pi}{2A} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2A}$$

перепишем уравнение (2.2) в виде

$$(2.9) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \operatorname{cth} \frac{\gamma(\xi-x)}{2} \, d\xi = 2A\lambda f'(x) \pm P \quad (|x| \leq 1, \gamma = \frac{\pi}{A\lambda})$$

Путем введения новых переменных и обозначений по формулам

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \rho &= e^{\gamma\xi}, \quad r = e^{\gamma x}, \quad \varphi(\xi) \equiv \psi(\rho) \\ f'(x) &\equiv u(r), \quad \alpha = e^{-\gamma}, \quad \beta = e^{\gamma} \end{aligned}$$

уравнение (2.9) преобразуется к сингулярному интегральному уравнению, формула обращения которого известна [11]. Применяя эту формулу и возвращаясь затем к исходным переменным и обозначениям (2.10), получим

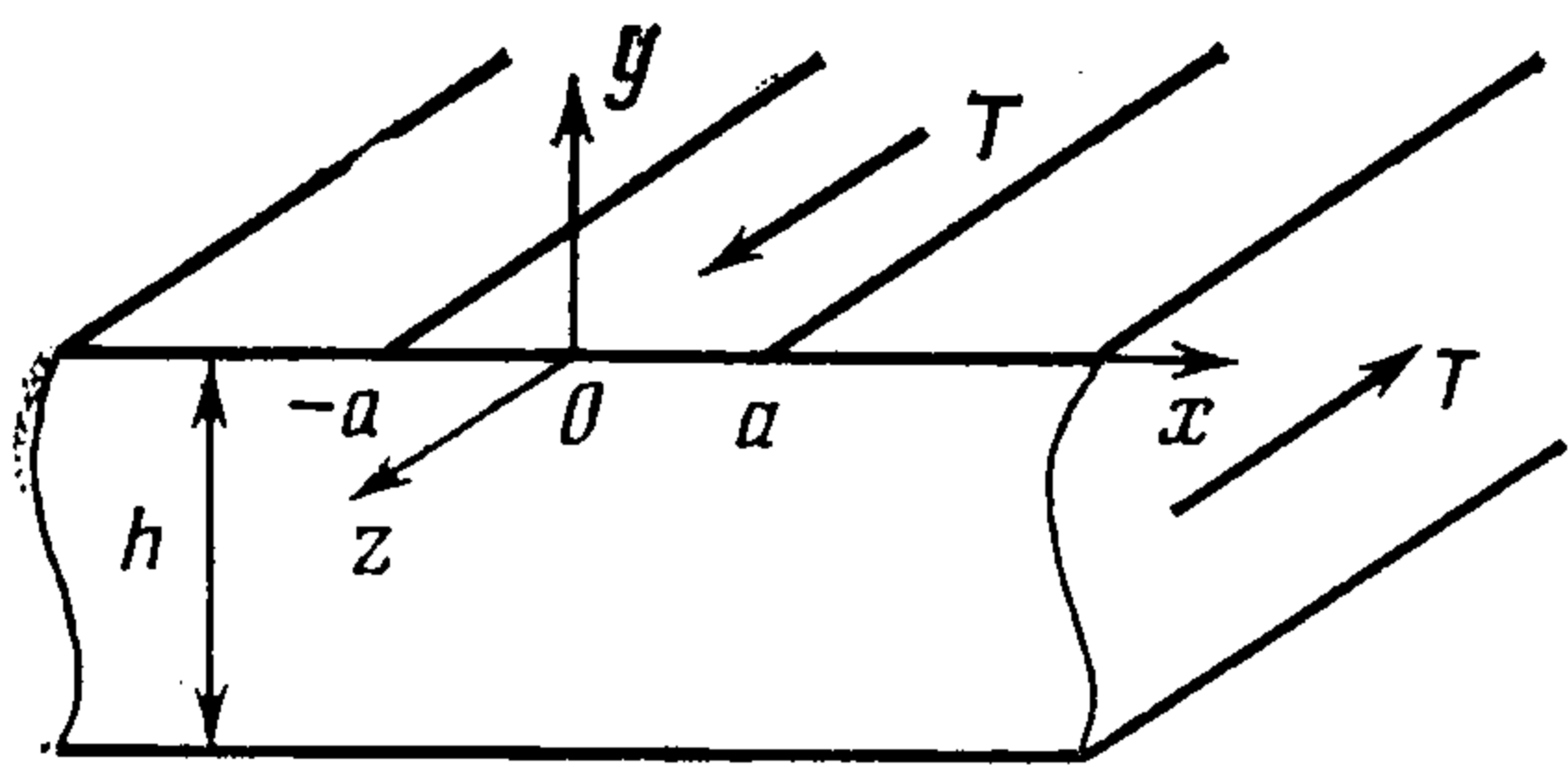
$$(2.11) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\pi\Delta(x)} \left[ Q - \frac{P\gamma}{2} (1 \pm 1) (\operatorname{ch} \gamma - e^{\gamma x}) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma \int_{-1}^1 \frac{e^{\gamma\xi} f'(\xi) \Delta(\xi)}{e^{\gamma\xi} - e^{\gamma x}} \, d\xi \right], \quad \Delta(x) = [(\beta - e^{\gamma x})(e^{\gamma x} - \alpha)]^{1/2} \end{aligned}$$

Постоянная  $Q$  на основании (2.6) и (2.11) может быть выражена через  $P$ .

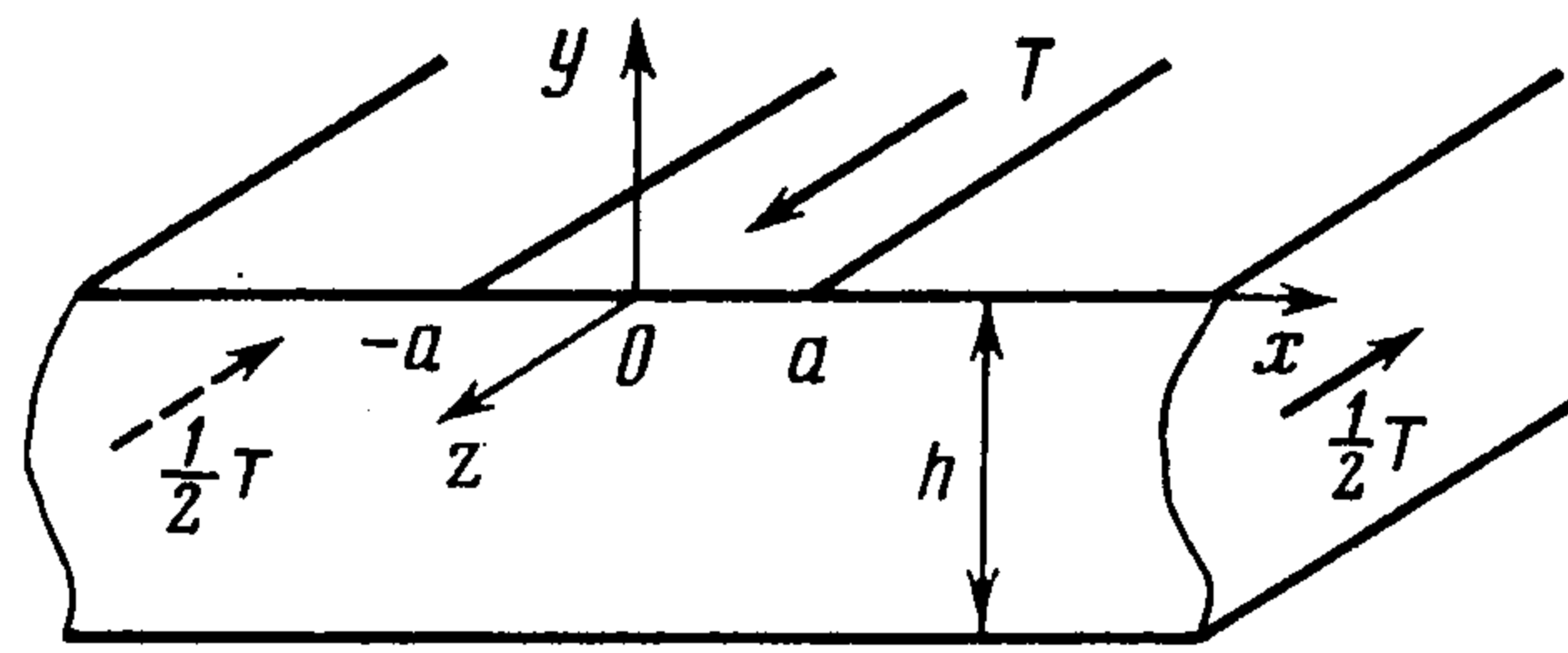
Пусть, например,  $f(x) = f = \text{const}$ . В этом случае

$$(2.12) \quad \varphi(x) = \frac{P}{A\lambda\Delta(x)} \left[ 1 - \frac{1 \pm 1}{2} (1 - e^{\gamma x}) \right]$$

Можно показать, что точность приближенного решения (2.12) интегрального уравнения (2.2) не ниже точности аппроксимации (2.7).



Фиг. 2



Фиг. 3

3. В качестве примеров рассмотрим две задачи.

*Задача о сдвиге упругого слоя полосовым штампом.* Упругий слой толщиной  $h$  занимает область  $-h \leq y \leq 0$ ,  $|x| < \infty$ ,  $|z| < \infty$ , где  $x, y, z$  — декартовы прямоугольные координаты. Верхняя грань слоя скреплена с жесткой полосой (штампом) бесконечной длины постоянной ширины  $2a$ . Область контакта полосы со слоем определяется условиями:  $y = 0$ ,  $|x| \leq a$ ,  $|z| < \infty$ . Верхняя грань слоя вне области контакта и его нижняя грань свободны от нагрузки (можно также считать, что нижняя грань опирается без трения на жесткое основание). Слой закреплен на бесконечности при  $x = +\infty$  (фиг. 2), либо при  $x = -\infty$ , либо при  $x = \pm\infty$  (фиг. 3). Полоса сдвинута в направлении оси  $z$  силой  $T$ , отнесенной к единице длины полосы.

В случае чистого сдвига функция  $w$ , характеризующая проекцию вектора перемещения на ось  $z$ , удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Будем использовать решение уравнения (3.1) в форме обобщенного преобразования Фурье

$$(3.2) \quad w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} D(\zeta, y) e^{-i\zeta x} d\zeta, \quad D(\zeta, y) = D_1(\zeta) \operatorname{sh} \zeta y + D_2(\zeta) \operatorname{ch} \zeta y$$

При помощи формул закона Гука из (3.2) найдем ( $\mu$  — модуль сдвига)

$$(3.3) \quad \tau_{xz}(x, y) = -\frac{i\mu}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \zeta D(\zeta, y) e^{-i\zeta x} d\zeta$$

$$(3.4) \quad \tau_{yz}(x, y) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \zeta [D_1(\zeta) \operatorname{ch} \zeta y + D_2(\zeta) \operatorname{sh} \zeta y] e^{-i\zeta x} d\zeta$$

Представим функцию  $\tau_{yz}(x, 0)$  в виде

$$(3.5) \quad \tau_{yz}(x, 0) \equiv \tau(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \tau_*(\zeta) e^{-i\zeta x} d\zeta$$

Учитывая представления (3.4), (3.5) и граничное условие  $\tau_{yz}(0, -h) = 0$ , выразим функции  $D_1$  и  $D_2$  через  $\tau_*$

$$(3.6) \quad D_1(\zeta) = (\mu\zeta)^{-1} \tau_*(\zeta), \quad D_2(\zeta) = (\mu\zeta)^{-1} \operatorname{cth} \zeta h \tau_*(\zeta)$$

Используя затем развитую в п. 1 методику и формулу обращения преобразования Фурье

$$\tau_*(\zeta) = \int_{-a}^a \tau(\xi) e^{i\zeta \xi} d\xi$$

из (3.2), (3.3), (3.6) определим

$$(3.7) \quad w(x, y) = \frac{1}{\pi\mu} \int_{-a}^a \tau(\xi) \left[ \int_0^\infty \frac{U_1(u, y)}{u} \cos u \frac{\xi-x}{h} du \pm \frac{\pi}{2} \frac{\xi-x}{h} \right] d\xi$$

$$(3.8) \quad \tau_{xz}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a \tau(\xi) \left[ \int_0^\infty U_1(u, y) \sin u \frac{\xi-x}{h} du \mp \frac{\pi}{2} \right] d\xi$$

При этом

$$(3.9) \quad U_1(u, y) = \operatorname{sh} \frac{uy}{h} + \operatorname{cth} u \operatorname{ch} \frac{uy}{h}, \quad T = \int_{-a}^a \tau(x) dx$$

Из (3.7) после перехода к безразмерным переменным по формулам  $x = ax'$ ,  $\xi = a\xi'$  может быть получено интегральное уравнение исследуемой задачи в виде (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), где

$$(3.10) \quad \tau(x) \equiv \varphi(x'), \quad K(u) = u^{-1} \operatorname{cth} u, \quad H(0) = 1 \\ f(x') = \mu\varepsilon/a = \operatorname{const}, \quad \lambda = h/a$$

$\varepsilon$  — постоянное смещение точек области контакта (штрихи в указанных формулах опущены). Из (3.8) определим силу  $T_*$ , которой статически эквивалентны напряжения  $\tau_{xz}$  в любом сечении слоя высоты  $h$  и единичной ширины, ортогональном к оси  $x$ , причем

$$(3.11) \quad T_*(x) = \int_{-h}^0 \tau_{xz} dy$$

Внося  $\tau_{xz}$  в форме (3.8) в (3.11), после преобразований получим

$$(3.12) \quad T_*(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \tau(\xi) \operatorname{sign}(\xi - x) d\xi \mp \frac{1}{2} T$$

Из (3.12) следует, что

$$(3.13) \quad T_* = \begin{cases} -T, & c > 0 \\ 0, & c < 0 \\ -1/2T, & c = 0 \end{cases} \quad \text{при } x > a \\ T_* = \begin{cases} 0, & c > 0 \\ T, & c < 0 \\ 1/2T, & c = 0 \end{cases} \quad \text{при } x < -a$$

Отсюда вытекает, что случай расположения контура интегрирования в (1.2) выше действительной оси,  $c > 0$  (ниже действительной оси,  $c < 0$ ) соответствует закреплению слоя при  $x = +\infty$  ( $x = -\infty$ ). Случай совпадения контура интегрирования в (1.2) с действительной осью ( $c = 0$ ) соответствует симметричному закреплению слоя при  $x = \pm\infty$ .

Для рассматриваемого случая  $\varphi(x)$  в форме (2.12) при  $A = 1$  есть точное решение интегрального уравнения (2.2). Из (2.12) с учетом (2.6), (3.9) и (3.10) получим выражение, определяющее напряжения  $\tau_{yz}$  в области контакта полосы со слоем в виде

$$(3.14) \quad \tau(x) = \frac{T}{h\Delta(x/a)} \left[ 1 - \frac{1 \pm 1}{2} (1 - e^{\gamma x/a}) \right] \quad \left( \gamma = \frac{\pi a}{h} \right)$$

*Задача о кручении цилиндра жестким бандажом.* Пусть упругий бесконечный круговой цилиндр занимает область  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $|z| < \infty$ , где  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  — цилиндрические координаты,  $R$  — радиус цилиндра. На цилиндр насажен без натяга жесткий бандаж, цилиндр и бандаж скреплены между собой. Область контакта бандажа и цилиндра определяется условиями:  $|z| \leq a$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $r = R$ . Поверхность цилиндра вне области контакта с бандажом свободна от нагрузки. Цилиндр закреплен на бесконечности при  $z = +\infty$ , либо при  $z = -\infty$ , либо при  $z = \pm\infty$ . К бандажу приложен крутящий момент величиной  $M$ . Момент  $M$  связан с касательными напряжениями  $\tau(z) \equiv \tau_{r\theta}(R, z)$  ( $|z| \leq a$ ), возникающими в области контакта бандажа и цилиндра, формулой

$$(3.15) \quad M = 2\pi R^2 T, \quad T = \int_{-a}^a \tau(z) dz$$

С использованием интегрального преобразования Фурье могут быть получены следующие формулы, связывающие проекцию  $v$  вектора перемещения на ось  $\theta$  и напряжение  $\tau_{\theta z}$  с неизвестными контактными напряжениями  $\tau(z)$

$$(3.16) \quad v(r, z) = \frac{1}{\pi\mu} \int_{-a}^a \tau(\xi) \left[ \int_0^\infty U_2(u, r) \cos u \frac{\xi - z}{R} du \pm 2\pi \frac{r}{R} \frac{\xi - z}{R} \right] d\xi.$$

$$(3.17) \quad \tau_{\theta z}(r, z) = \frac{1}{\pi R} \int_{-a}^a \tau(\xi) \left[ \int_0^{\infty} u U_2(u, r) \sin u \frac{\xi - z}{R} du \mp 2\pi \frac{r}{R} \right] d\xi$$

$$U_2(u, r) = I_1(ur/R) [uI_0(u) - 2I_1(u)]^{-1}$$

Здесь  $I_n(z)$  — цилиндрическая функция мнимого аргумента.

Из (3.16) после перехода к безразмерным переменным по формулам  $z = ax$ ,  $\xi = a\xi'$  может быть получено интегральное уравнение рассматриваемой задачи в виде (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), где

$$(3.18) \quad \tau(\xi) \equiv \varphi(\xi'), \quad f(x) = \mu\lambda\varepsilon = \text{const}, \quad \lambda = R/a$$

$$K(u) = U_2(u, R), \quad H(0) = 4$$

$\varepsilon$  — угол поворота бандажа (в указанных формулах штрихи опущены). Пусть  $M_*$  — крутящий момент, возникающий в любом сечении цилиндра, ортогональном к его оси. В этом случае

$$(3.19) \quad M_*(z) = 2\pi \int_0^R r^2 \tau_{\theta z}(r, z) dr$$

Внося  $\tau_{\theta z}$  в форме (3.17) в (3.19), после вычисления интегралов получим

$$(3.20) \quad M_*(z) = \pi R^3 \int_{-a}^a \tau(\xi) [\text{sign}(\xi - z) \mp 1] d\xi$$

В частности, из (3.20) следуют соотношения, аналогичные (3.13) (при замене  $T_*$  на  $M_*$ ,  $T$  на  $2\pi R^2 T$ ,  $x$  на  $z$ ), а также вывод относительно расположения контура интегрирования в (1.2), аналогичный сделанному при исследовании задачи о сдвиге упругого слоя.

В данном случае  $\varphi(x)$  в форме (2.12) есть приближенное решение интегрального уравнения (2.2). При этом в силу (3.18)  $A = H^{-1}(0) = 1/4$ , погрешность аппроксимации (2.7) при  $0 \leq u < \infty$  не превышает 16%. Из (2.12), (3.15) и (3.18) получим приближенное выражение для определения касательных напряжений  $\tau(z)$  в области контакта бандажа с цилиндром в виде

$$\tau(z) = \frac{2M}{\pi R^3 \Delta(z/a)} \left[ 1 - \frac{1 \pm 1}{2} (1 - e^{\gamma z/a}) \right] \left( \gamma = \frac{4\pi a}{R} \right)$$

Отметим, что аналогично изложенному может быть рассмотрена задача о растяжении упругой полосы со свободной нижней гранью (или опирающейся без трения на жесткое основание) жесткой на растяжение, но абсолютно гибкой накладкой, приваренной к верхней грани, а также задача о растяжении цилиндра жесткой на растяжение, но абсолютно гибкой кольцевой накладкой, приваренной к его поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. — Изв. АН СССР МТТ, 1967, № 2, с. 120—131.
2. Белокопъ А. В., Грунтфест Р. А. К задаче глассирования пластинки по поверхности тяжелой идеальной жидкости конечной глубины. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 934—941.
3. Сметанин Б. И. О расклинивании упругого бесконечного клина. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 935—940.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, вып. 5, с. 91—94.
6. Александров В. М., Чебаков М. И. Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 494—504.
7. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 1, с. 148—158.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 660 с.
10. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 672—683.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
17.X.1983