

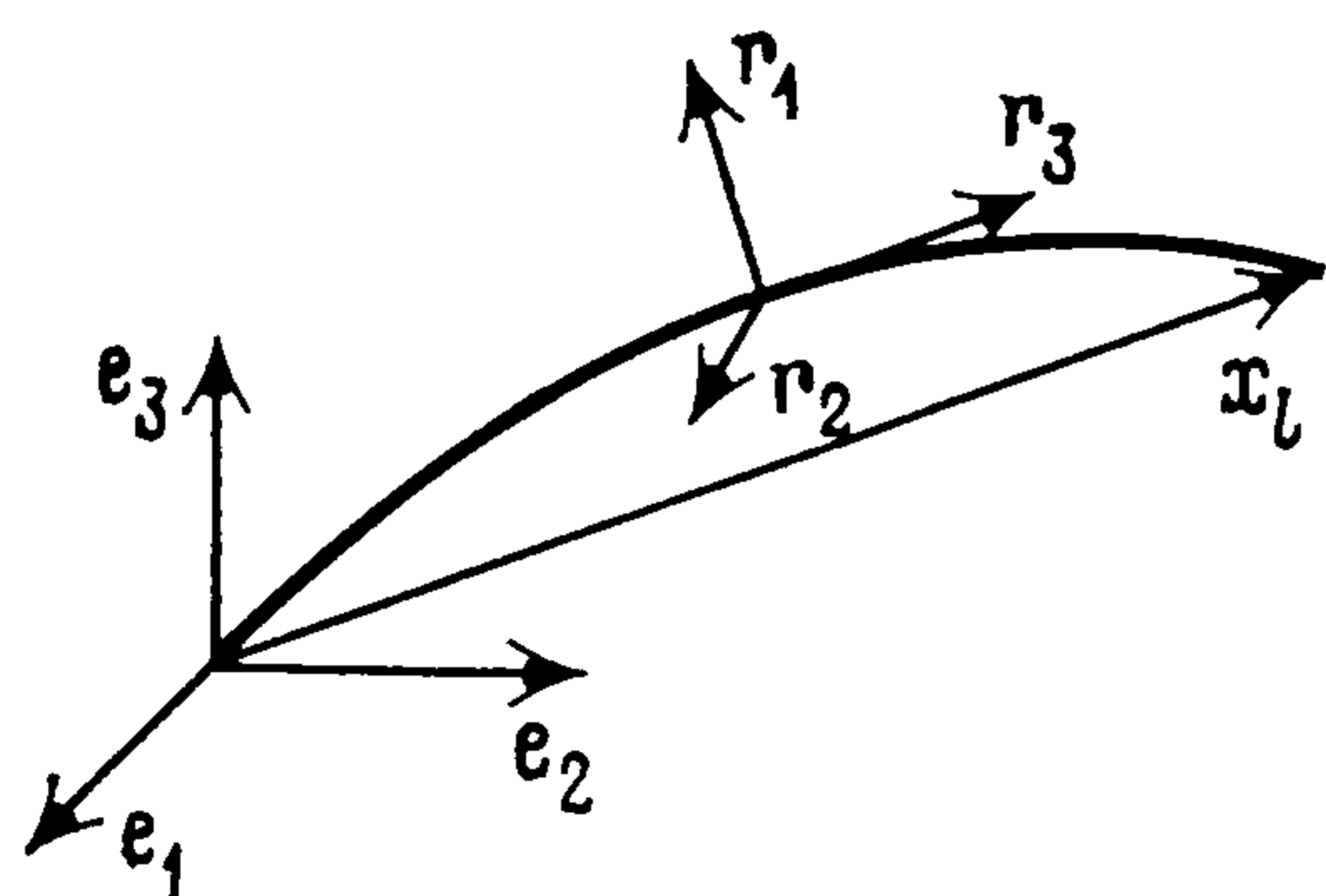
УДК 539.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ УПРУГОЙ ЛИНИИ

Николаева Е.А., Петухов Л.В.

Исследуется существование оптимального решения в задаче минимизации или максимизации энергии деформации упругого стержня. Установлено, что для любой формы упругой линии при рассматриваемых граничных условиях существует единственное решение в теории Тимошенко, в то время как в теории Кирхгофа для нерастяжимого стержня имеется случай, когда решение неединственное. В задаче оптимизации существует обобщенное оптимальное управление. Исследуется случай, когда существует измеримое оптимальное управление. Приводятся примеры обобщенного управления.

1. Пусть в R^3 фиксированы две точки: 0 и x_l . Требуется соединить их упругой линией заданной длины l так, чтобы энергия упругой деформации была экстремальной. Для этой задачи нагрузка может быть как распределенная $p(\Gamma)$, $m(\Gamma)$ (векторы сил и моментов), так и сосредоточенная на концах 0 и l . Обозначим через e_i орты неподвижной системы координат, а через r_i — орты подвижной системы координат, связанной с упругой



Фиг. 1

линией (фиг. 1). Здесь и везде далее, если не оговорено противное, индексы пробегают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам в произведениях предполагается суммирование от 1 до 3.

Определим компоненты тензора поворота γ соотношениями $\gamma_{ij} = e_i^T \cdot r_j$, где индексом T обозначена операция транспонирования. Тензор поворота $\gamma = \gamma(\Gamma)$, где $\Gamma \in [0, l]$, определяет искомую упругую линию.

Уравнения, описывающие равновесие упругой линии, можно записать в виде [1] (теория Тимошенко)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} P_i \dot{} &= -p_i, \quad M_i \dot{} = -m_i - e_{ijk} \gamma_{jz} P_k \\ \Phi_i \dot{} &= A_k \gamma_{ik} \gamma_{jk} M_j, \quad u \dot{} = -e_{ijk} \gamma_{jz} \Phi_k + B_k \gamma_{ik} \gamma_{jk} P_j \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x_i \dot{} &= \gamma_{iz}, \quad \Pi \dot{} = \pi = 1/2 (A_k \gamma_{ik} \gamma_{jk} M_i M_j + B_k \gamma_{ik} \gamma_{jk} P_i P_j) \\ \left(A_k &= \frac{1}{E j_k}, \quad B_k = \frac{1}{G s i_k} (k = 1, 2), \quad A_3 = \frac{1}{Gc}, \quad B_3 = \frac{1}{Es} \right) \end{aligned}$$

Точкой обозначена производная $d/d\Gamma$; P , M , Φ , u — соответственно векторы усилий, моментов, углов поворота и перемещений, x — вектор, определяющий положение упругой линии, π — удельная энергия упругой деформации, e_{ijk} — тензор Леви-Чивита, E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, s — площадь, j_1, j_2 — главные моменты инерции, i_1, i_2 — главные коэффициенты сдвига, c — жесткость на кручение сечения стержня. Будем считать, что $p_i(\Gamma)$, $m_i(\Gamma)$, $\gamma_{ik}(\Gamma)$ — измеримые функции $\Gamma \in [0, l]$, причем γ_{ik} удовлетворяют естественным ограничениям (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$(1.3) \quad \gamma_{ik} \gamma_{jk} = \delta_{ij}$$

Рассмотрим для простоты пять видов граничных условий на концах стержня

$$(1.4) \quad u(0) = \varphi(0) = u(l) = \varphi(l) = 0$$

$$(1.5) \quad u(0) = u(l) = \varphi(l) = 0, \quad M(0) = -M_0$$

$$(1.6) \quad \varphi(0) = u(l) = \varphi(l) = 0, \quad P(0) = -P_0$$

$$(1.7) \quad u(l) = \varphi(l) = 0, \quad P(0) = -P_0, \quad M(0) = -M_0$$

$$(1.8) \quad \varphi(0) = u(l) = 0, \quad P(0) = -P_0, \quad M(l) = M_l$$

Для уравнений (1.2) следует задать условия

$$(1.9) \quad x_i(0) = 0, \quad x_i(l) = x_{li}, \quad \Pi(0) = 0$$

В качестве задачи оптимизации рассмотрим

$$(1.10) \quad \inf \mu \Pi(l)$$

где $\mu = 1$ или $\mu = -1$. Задачу оптимизации (1.1)–(1.3), (1.9), (1.10) с одним из граничных условий (1.4)–(1.8) будем называть задачей А. Для плоского случая аналогичная задача рассмотрена в работе [2].

Наряду с задачей А рассмотрим расщепленную задачу [3, 4]

$$(1.11) \quad \begin{aligned} P_i^* &= -p_i, \quad M_i^* = -m_i - \sum \lambda_t \gamma_{j3}^{(t)} e_{ijk} P_k \\ \varphi_i^* &= \sum \lambda_t A_k \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} M_j, \quad u_i^* = \sum \lambda_t (-e_{ijk} \gamma_{j3}^{(t)} \varphi_k + \\ &+ B_k \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{j3}^{(t)} P_j) \end{aligned}$$

$$(1.12) \quad x_i^* = \sum \lambda_t \gamma_{i3}^{(t)}, \quad \Pi^* = \sum \lambda_t \pi^{(t)}$$

$$(1.13) \quad \lambda_t \geq 0, \quad \sum \lambda_t = 1, \quad \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} = \delta_{ij}, \quad t = 0, \dots, 16$$

Здесь и далее Σ означает суммирование по t от $t = 0$ до $t = 16$, $\lambda_t(\Gamma)$ — новые управляющие функции, $\gamma_{ik}^{(t)}(\Gamma)$ — расщепленные управления, а выражение $\pi^{(t)}$ совпадает с π (правая часть второго уравнения (1.2)), в которое вместо γ_{ik} подставлены $\gamma_{ik}^{(t)}$. Будем считать $\lambda_t, \gamma_{ik}^{(t)}$ измеримыми на $[0, l]$ функциями.

Задачу оптимизации (1.11) — (1.13), (1.9), (1.10) с одним из граничных условий (1.4) — (1.8) будем называть задачей В.

2. Исследуем существование решения краевых задач (1.1) и (1.11) с одним из граничных условий (1.4) — (1.8). Уравнения (1.11) переходят в (1.1) при $\gamma_{ik}^{(0)} = \dots = \gamma_{ik}^{(16)}$, поэтому будем исследовать (1.11).

Заменим краевую задачу эквивалентной — минимизацией дополнительной работы

$$(2.1) \quad \Pi(l) = \frac{1}{2} \langle \sum \lambda_t \pi^{(t)} \rangle \quad \left(\langle F \rangle \equiv \int_0^l F d\Gamma \right)$$

на всех P_i, M_i , удовлетворяющих первым двум уравнениям (1.11) и силовым и моментным граничным условиям (1.4) — (1.8) в зависимости от вида закрепления.

Решения первых двух уравнений (1.11) можно представить в виде (Q_i, N_i — произвольные постоянные)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} P_i &= Q_i - \xi_i(\Gamma), \quad M_i = N_i - e_{ijk} x_j Q_k - \eta_i(\Gamma) \\ \xi_i &= \int_0^\Gamma p_i d\Gamma, \quad \eta_i = \int_0^\Gamma (m_i - \sum e_{ijk} \gamma_{j3}^{(t)} \xi_k) d\Gamma \end{aligned}$$

При получении (2.2) было использовано первое дифференциальное уравнение (1.12) с первым условием (1.9). Подставляя P_i и M_i из (2.2) в (2.1), получим

$$(2.3) \quad \Pi(l) = 1/2 \langle \sum \lambda_t [A_k \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} (N_i - e_{ijk} x_j Q_k - \eta_i) (N_j - e_{jsq} x_s Q_q - \eta_j) + B_k \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} (Q_i - \xi_i) (Q_j - \xi_j)] \rangle$$

Теперь минимум (2.3) следует разыскивать для тех векторов $N_i, Q_i \in U \subset R^6$, которые удовлетворяют равенствам:

$$Q_i = -P_{0i} \quad \text{для граничных условий (1.6) — (1.8);}$$

$$N_i = -M_{0i} \quad \text{для граничных условий (1.5), (1.7);}$$

$$N_i + e_{ijk} x_{ij} Q_k - \eta_i(l) = M_{li} \quad \text{для граничных условий (1.8).}$$

Для граничных условий (1.7), (1.8) задача называется статически определенной, так как N_i, Q_i определяются силовыми и моментными граничными условиями (множество U состоит из одной точки).

Приступим теперь к анализу $\Pi(l)$. Правая часть (2.3) — квадратичная функция относительно N_i, Q_i , причем так как $\Pi(l) \geq 0$, то $\Pi(l)$ — выпуклая функция N_i, Q_i . Выделим из (2.3) квадратичные относительно N_i, Q_i слагаемые, которые обозначим через $\Pi^\circ(N, Q)$. Из (1.2) следует, что $0 < \alpha \leq A_k, 0 \leq \beta \leq B_k$. Учитывая (1.13), получим оценку

$$\Pi^\circ(N, Q) \geq 1/2 \alpha \langle (N_i - e_{imn} x_m Q_n) (N_i - e_{isq} x_s Q_q) \rangle + 1/2 \beta l Q_i Q_i$$

и представим ее в матричной форме

$$(2.4) \quad \Pi^\circ(N, Q) \geq 1/2 \| N^T Q^T \| \cdot D \cdot \| N^T Q^T \|^T$$

$$D = \begin{vmatrix} y & w \\ w^T & z \end{vmatrix}, \quad w = \| -e_{ijk} w_k \|, \quad z = \| z_{ij} \|, \quad y = \| \alpha l \delta_{ij} \|^T$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} w_i &= \alpha \langle x_i \rangle, \quad z_{ii} = \beta l + \alpha \langle x_j x_j - x_i^2 \rangle \\ z_{ij} &= -\alpha \langle x_i x_j \rangle \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть: 1) $p_i, m_i, \gamma_{ij}^{(t)}, \lambda_t$ — измеримые в промежутке $[0, l]$ функции, которые удовлетворяют (1.13); 2) $\alpha > 0, \beta > 0$. Тогда существует единственное абсолютно непрерывное решение уравнения (1.11) с одним из граничных условий (1.4) — (1.8).

Доказательство. Применим теорему о минимизации коэрцитивного функционала на выпуклом множестве [5] к (2.3). Множество U для граничных условий (1.4) — (1.8) является либо подпространством, либо состоит из одной точки. Для того чтобы функционал (2.3) был коэрцитивным, необходимо и достаточно, чтобы $\det D > 0$.

Выполним в $\det D$ три шага исключения по методу Гаусса для элементов D_{11}, D_{22}, D_{33} . В результате получим

$$\begin{aligned} \det D &= \det \| Z_{ij} \|, \quad Z_{ii} = \alpha l z_{ii} + w_i^2 - w_j w_j \\ Z_{ij} &= \alpha l z_{ij} + w_i w_j \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

Из (2.5) следует, что $\| Z_{ij} \|$ — симметричный тензор второго ранга, поэтому выберем e_i так, чтобы он стал диагональным. Тогда $\det D = Z_{11} Z_{22} Z_{33}$.

Из неравенства Коши—Буняковского

$$(2.6) \quad \langle x_i \rangle^2 \leq l \langle x_i^2 \rangle$$

следует, что

$$(2.7) \quad Z_{ii} = \alpha \beta l^2 + \alpha l \langle x_j x_j - x_i^2 \rangle + \alpha^2 (\langle x_i \rangle^2 - \langle x_j \rangle \langle x_j \rangle) > 0$$

Если эти неравенства выполняются, то $\det D > 0$ и существуют единственные N_i°, Q_i° , на которых достигается минимум (2.3). Подставляя их в (2.2), получим абсолютно непрерывные M_i, P_i , после чего, подставляя

M_i и P_i в третье и четвертое уравнения (1.11) и интегрируя их, найдем

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_{0i} + \int_0^\Gamma \Sigma \lambda_t A_k \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} M_j d\Gamma \\ u_i &= u_{0i} + \int_0^\Gamma \Sigma \lambda_t (-e_{ijk} \gamma_{jz}^{(t)} \varphi_k + B_k \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} P_i P_j) d\Gamma \end{aligned}$$

где φ_{0i} , u_{0i} — произвольные постоянные, которые находятся из кинематических условий (1.4) — (1.8). Ясно, что φ_i , u_i — также абсолютно непрерывные функции. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполнено условие 1 теоремы 1, $\alpha > 0$, $B_k = 0$ и упругая линия не лежит на прямой. Тогда существует единственное абсолютно непрерывное решение рассматриваемой краевой задачи.

Доказательство. Следует показать, что $\det D > 0$. Остальные рассуждения остаются без изменения. Действительно, неравенство (2.6) переходит в равенство только в случае $x_i = \text{const}$, а это в силу (1.9) возможно, если $x_i \equiv 0$. Из (2.7) следует, что правая часть (2.7) для некоторого индекса i может обратиться в нуль, если две компоненты вектора x тождественно равны нулю, например $x_1 = x_2 \equiv 0$ (при этом тензор $\|Z_{ij}\|$ имеет диагональную форму). Но при $x_1 = x_2 \equiv 0$ стержень лежит на прямой, что противоречит условию 2, следовательно, $\det D > 0$.

Следствие 2. Пусть выполнено условие 1 теоремы 1, $\alpha > 0$, $B_k = 0$ и упругая линия лежит на прямой. Тогда существует абсолютно непрерывное решение краевой задачи для рассматриваемых краевых условий, единственное для граничных условий (1.6) — (1.8) и неединственное для граничных условий (1.4), (1.5).

Доказательство. Если выбрать $g_3 = \pm e_3$, то можно убедиться, что $\Pi(l)$ (2.3) не зависит от Q_3 . В этом случае

$$w_1 = w_2 = z_{33} = z_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad w_3 = \alpha \int_0^\Gamma x_3 d\Gamma, \quad z_{11} = z_{22} = \alpha \int_0^\Gamma x_3^2 d\Gamma$$

и (2.4) переходит в неравенство $\Pi^\circ(N, Q) \geq 1/2 \|N^T Q_1 Q_2\| \cdot D^\circ \cdot \|N^T Q_1 Q_2\|^T$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\det D^\circ = \alpha l (l \langle x_3^2 \rangle - \langle x_3 \rangle^2)^2.$$

Так как $x_3 \not\equiv 0$, то $\det D^\circ > 0$ и, следовательно, существуют единственные N_i° , Q_1° , Q_2° , которые сообщают $\Pi(l)$ (2.3) минимум. Постоянная Q_3° для граничных условий (1.4), (1.5) может быть выбрана произвольной. Дальнейшие рассуждения остаются такими же, как и в теореме 1.

3. Рассмотрим теперь вопрос существования решения оптимальных задач A и B .

Введем для задачи A множество

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Omega &= \{y \in R^{16} \mid y_i = -p_i, y_{3+i} = -m_i - e_{ijk} \gamma_{jz} P_k, \\ y_{6+i} &= A_k \gamma_{ik} \gamma_{jk} M_j, y_{9+i} = -e_{ijk} \gamma_{jz} \varphi_k + B_k \gamma_{ik} \gamma_{jk} P_j, \\ y_{12+i} &= \gamma_{iz}, y_{16} = \pi, \gamma_{ik} \gamma_{jk} = \delta_{ij}\} \end{aligned}$$

Достаточные условия существования измеримого оптимального управления в задаче A связаны с выпуклостью множества Ω [6]. Множество Ω не выпуклое, так как не выпуклое даже множество управлений. Для задачи B множество, аналогичное (3.1), совпадает с выпуклой оболочкой Ω (со Ω). В связи с этим можно показать существование решения лишь для задачи B .

Теорема 2. Пусть p_i, m_i — непрерывные функции в промежутке $[0, l]$, тогда в задаче B существует измеримое оптимальное управление $\lambda_t^\circ(\Gamma)$, $\gamma_{ik}^{(t)\circ}(\Gamma)$, $t = 0, \dots, 16$.

Доказательство. Так как $A_k \leq C_1, B_k \leq C_1$, то из теоремы 1, следствия 1, 2 (для граничных условий (1.4), (1.5) Q_3° можно положить равным нулю) и соотношений (2.2), (2.8) получим оценки

$$(3.2) \quad |P_i| \leq C_2, |M_i| \leq C_2, |\varphi_i| \leq C_2, |u_i| \leq C_2, \Pi(l) \leq C_3$$

где постоянные C_i не зависят от управлений $\lambda_t, \gamma_{ik}^{(t)}$, $t = 0, \dots, 16$. Следовательно, множество $\text{co } \Omega$ — выпуклое, ограниченное, непрерывное при любом $\Gamma \in [0, l]$. Условия теоремы существования измеримого оптимального управления [6] выполнены, следовательно, справедлива и теорема.

Оптимальное управление $\lambda_t^\circ, \gamma_{ik}^{(t)\circ}$, $t = 0, \dots, 16$ называется обобщенным оптимальным управлением (скользящий режим). В случае, когда $\gamma_{ik}^{(0)\circ} = \dots = \gamma_{ik}^{(16)\circ}$, обобщенное оптимальное управление является обычным оптимальным управлением.

Для задачи A гамильтониан приводится к виду

$$(3.3) \quad H(\gamma) = \mu(u_i p_i + \varphi_i m_i) + \mu \pi + \mu \gamma_{iz} e_{ijk} \varphi_j P_k + \rho_i \gamma_{iz}$$

где ρ_i — постоянные множители Лагранжа. Для задачи B гамильтониан равен

$$(3.4) \quad H^\circ(\lambda, \gamma) = \sum \lambda_t H(\gamma^{(t)})$$

где гамильтониан $H(\gamma^{(t)})$ определен выражением (3.3), куда вместо γ подставлено $\gamma^{(t)}$. Принцип максимума Л. С. Понтрягина для задачи B заключается в разыскании таких $\lambda^\circ, \gamma^{(t)\circ}$, для которых

$$H^\circ(\lambda^\circ, \gamma^\circ) = \sup_{\lambda_t \geq 0, \lambda_0 + \dots + \lambda_{16} = 1, \gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} = \delta_{ij}}$$

откуда с учетом $\lambda_t \geq 0$ получим

$$(3.5) \quad H(\gamma^{(t)\circ}) = \sup_{\gamma_{ik}^{(t)} \gamma_{jk}^{(t)} = \delta_{ij}} H(\gamma^{(t)})$$

Из (3.5) следует, что если для всех $0 \leq \Gamma \leq l$ (за исключением, может быть, конечного числа точек Γ_n) значение $\gamma^{(t)\circ}$ единственное, то обобщенное оптимальное управление является обычным.

4. Рассмотрим кирхгофовский нерастяжимый стержень. В этом случае $B_k = 0$. Обозначим $R_i = \rho_i + \mu e_{ijk} \varphi_j P_k$. Для анализа условия (3.5) возьмем произвольную точку $\Gamma \in [0, l]$. Совместим e_3 с M или с $-M$, а R поместим в плоскость e_2, e_3 так, чтобы $R_2 \geq 0, R_3 \geq 0$ (фиг. 2). Тогда

$$(4.1) \quad H = 1/2 \mu M_i M_i A_j \gamma_{zj}^2 + R_i \gamma_{iz}$$

Ясно, что орт r_3 должен лежать в плоскости e_2, e_3 между векторами e_2 и e_3 . Действительно, если это не так, то, поворачивая триэдр r_j вокруг e_3 и помещая r_3 между e_2, e_3 , получим большее значение H , чем до поворота.

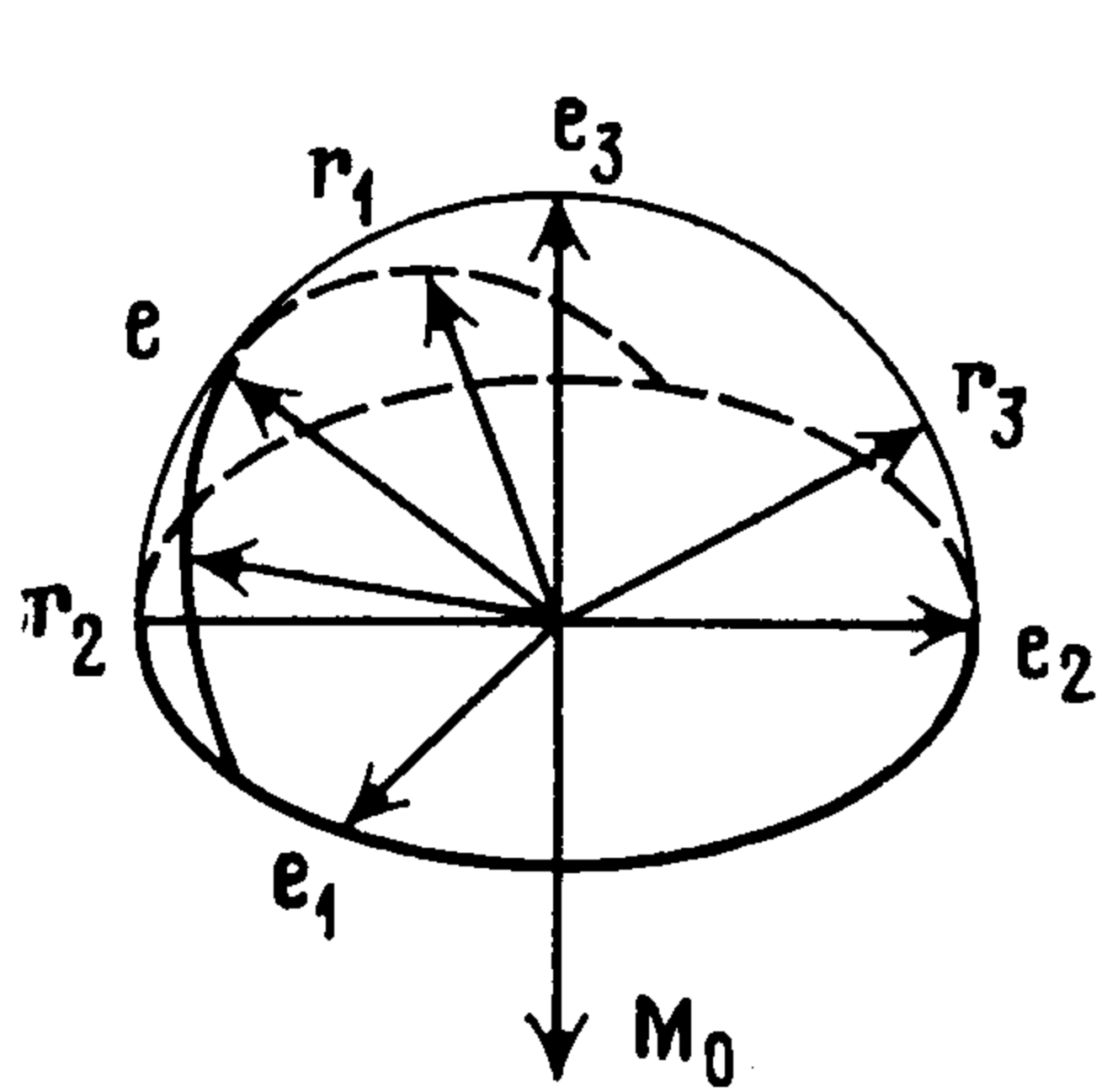
Введем вектор e (фиг. 2) и обозначим

$$r_3 \cdot e_3 = \cos \theta, e \cdot e_3 = \sin \theta, r_1 \cdot e = \cos \chi, r_2 \cdot e = \sin \chi$$

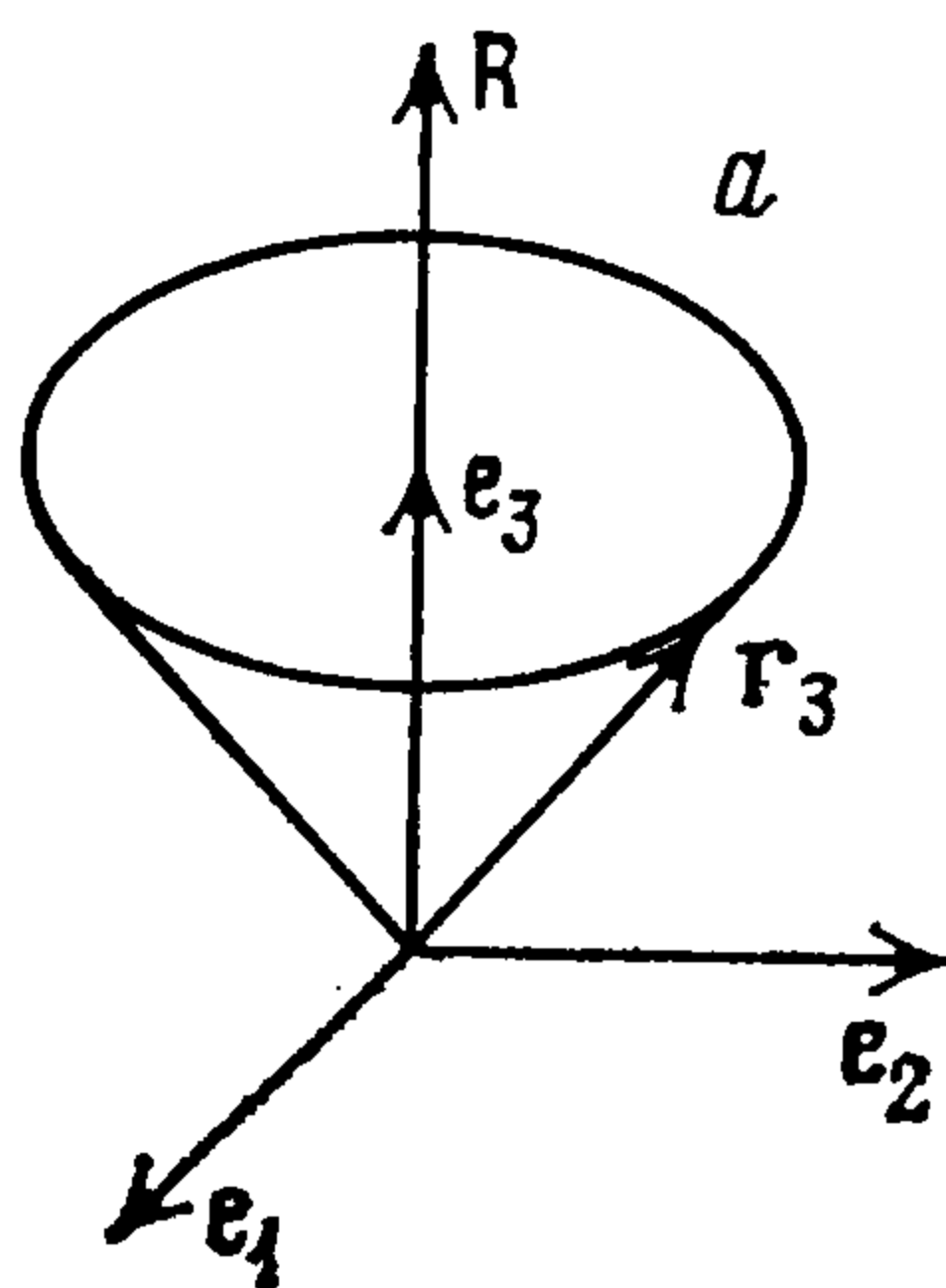
Тогда из (4.1) получим

$$(4.2) \quad H = 1/2 \mu M_i M_i (A_1 \cos^2 \chi \sin^2 \theta + A_2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta + A_3 \cos \theta + R_2 \sin \theta + R_3 \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \chi \leq \pi/2$$

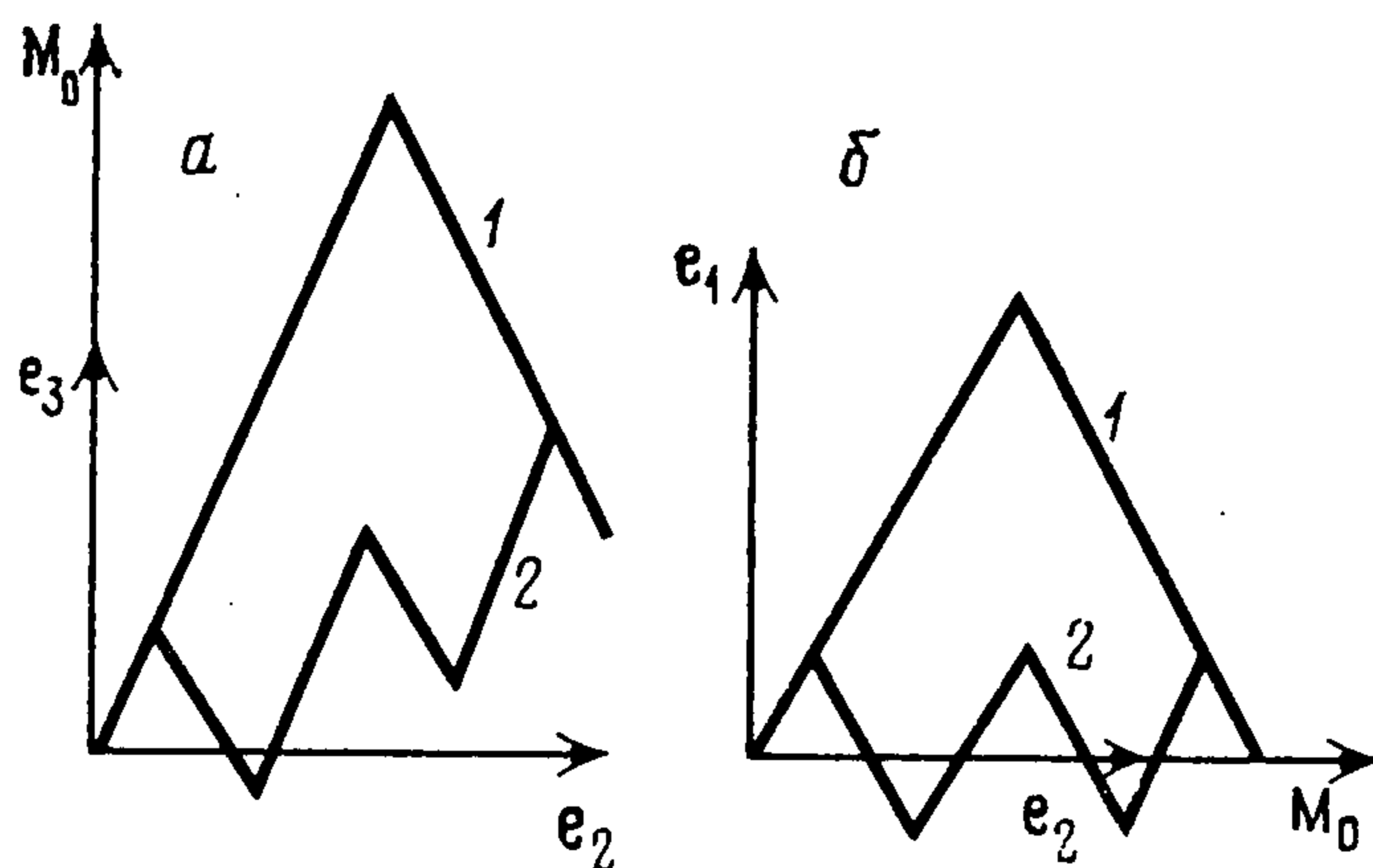
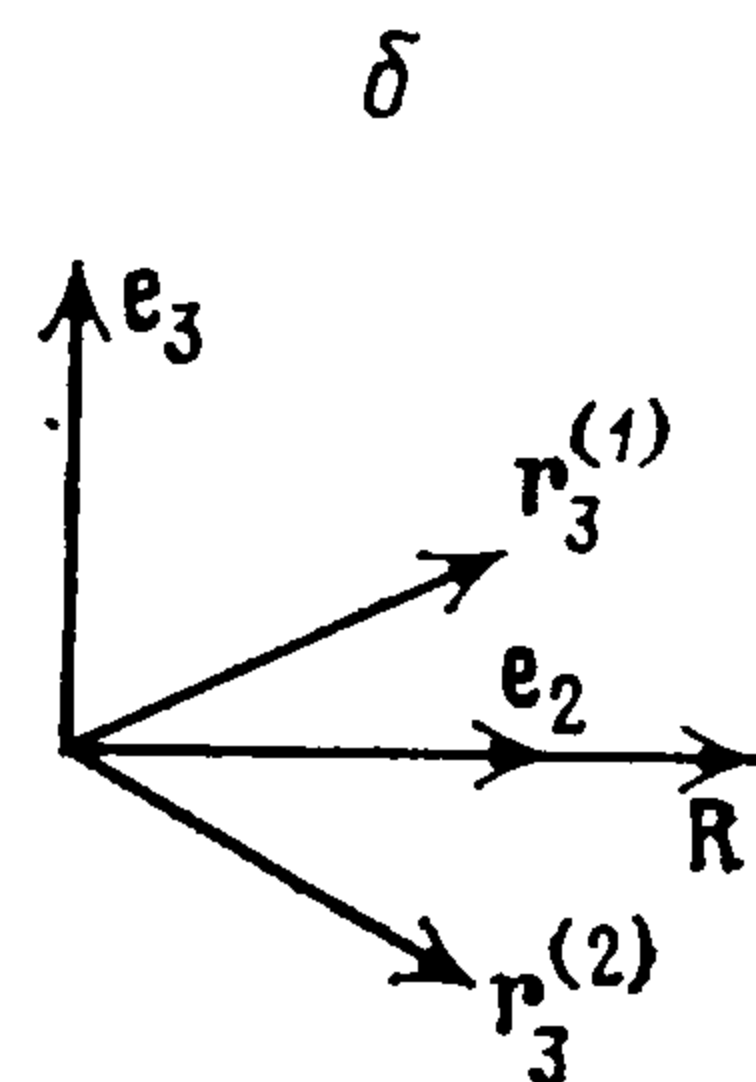
Будем разыскивать максимум функции H в зависимости от χ и θ . Из условия $\partial H / \partial \chi = 0$ следует, что максимум H достигается всегда в точке $\chi = 0$ или $\chi = \pi/2$. Подставляя эти значения в (4.2), найдем



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$(4.3) \quad H = \frac{1}{2}\mu A_0 M_i M_i + \frac{1}{2}\mu (A_3 - A_0) M_i M_i \cos^2 \theta + \\ + R_3 \cos \theta + R_2 \sin \theta, \quad A_0 = \begin{cases} A_1, & \mu = -1 \\ A_2, & \mu = 1 \end{cases}$$

Из (1.2) следует, что если $E \geq 2G$, то $A_3 > A_1$, $A_3 > A_2$.

Вычисляя производные $\partial H / \partial \theta$, $\partial^2 H / \partial \theta^2$, заключаем, что для всех случаев, кроме а) $\mu = 1$, $R_3 = 0$ и б) $\mu = -1$, $R_2 = 0$, максимум H всегда достигается в одной точке. Таким образом, решение расщепленной и исходной задач совпадают, если на оптимальном стержне нет участков, на которых выполняются условия а) или б). Для случая а) существует целый конус значений r_3 , на которых H достигает максимума (фиг. 3, а). Для случая б) существуют два значения вектора r_3 , на которых H достигает максимума (фиг. 3, б).

Пример. Рассмотрим случай $B_k = 0$, $p_i = m_i = 0$ и краевые условия (1.7) при $P_0 = 0$.

В задаче минимизации $\Pi(l)$ оптимальный стержень имеет вид 1 (фиг. 4, а). Наряду с этим решением существует и обобщенное решение 2 (фиг. 4, а). Кроме решений с изломами можно построить и гладкое оптимальное решение. Для этих оптимальных решений реализуется условие а).

Для задачи максимизации $\Pi(l)$ оптимальный стержень имеет вид 1 (фиг. 4, б). Наряду с этим решением существует также и обобщенное решение 2 (фиг. 4, б). Для этих оптимальных решений реализуются условия б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий В. А., Петухов Л. В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Ваньярский И. Б. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 2, с. 259—283.
4. Гамкрелидзе Р. В. О скользящих оптимальных режимах.— Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6, с. 1243—1245.
5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
6. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
24.VIII.1983