Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ, ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Зубов Л. М.

Рассматриваются общие положения теории малых деформаций тонких оболочек с начальными напряжениями [1]. Выводятся уравнения совместности для кинематических величин, находятся функции, тождественно удовлетворяющие уравнениям равновесия, формулируются и доказываются различные вариационные принципы статики, получены дисторсионные краевые условия. Наличие начальных напряжений вносит существенные особенности в указанные разделы теории по сравнению с линейной теорией ненапряженных оболочек [2—5]. Эти особенности обусловлены тем, что в теории малых деформаций упругих оболочек с начальными напряжениями удельная потенциальная энергия зависит не только от тензоров, определяющих изменение метрики и кривизны поверхности, но и от вектора вращения [1].

Полученные результаты могут найти приложение в задачах устойчивости оболочек, а также при расчете больших деформаций оболочек методом последовательных нагружений, когда на каждом шаге вычислительного процесса решается линейная задача о малых деформациях, отсчитываемых от напряженного состояния, соответствующего предыдущему шагу.

1. Система уравнений, описывающих малые деформации тонких упругих оболочек при наличии начальных напряжений, состоит [1] из уравнений равновесия относительно силовых величин

$$\nabla\cdot[\mathbf{H}-\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{G}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\,\mathbf{N}]+\mathbf{f}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\mu}\mathbf{N})=0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{K}+\frac{1}{2}\gamma\mathbf{e}+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{N}\quad(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{N}=0)$$

определяющих соотношений, связывающих силовые величины с кинематическими

$$\mathbf{H}=\frac{\partial a}{\partial \mathbf{F}},\quad \mathbf{K}=\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}},\quad \gamma=\frac{\partial a}{\partial \chi},\quad \boldsymbol{\lambda}=\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{M}=-\partial a/\partial\boldsymbol{\varkappa},\quad a=a\,(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\vartheta},\chi)$$

и формул, выражающих кинематические величины через поле вектора перемещений $\mathbf{w}$ срединной поверхности оболочки

$$\mathbf{F}=\nabla\mathbf{w}=\boldsymbol{\varepsilon}+\chi\mathbf{e}+\boldsymbol{\vartheta}\mathbf{N},\quad \boldsymbol{\vartheta}^{\bullet}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{T}=\nabla w+\mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\,[(\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{G}+\mathbf{G}\cdot(\nabla\mathbf{u})^{T}]-\mathbf{B}w,\quad \chi=\frac{1}{2}\mathbf{N}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\varkappa}=\boldsymbol{\varkappa}^{T}=(\nabla\boldsymbol{\vartheta})\cdot\mathbf{G}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{F}^{T}=\frac{1}{2}[(\nabla\boldsymbol{\omega})\cdot\mathbf{e}-\mathbf{e}\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^{T}]+$$

$$+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}),\quad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\vartheta}\times\mathbf{N}+\chi\mathbf{N},\quad \mathbf{G}=\mathbf{E}-\mathbf{N}\mathbf{N}$$

$$\mathbf{e}=-\mathbf{e}^{T}=-\mathbf{G}\times\mathbf{N},\ \mathbf{B}=-\nabla\mathbf{N},\ \mathbf{u}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{G},\ w=\mathbf{w}\cdot\mathbf{N}$$

В (1.1)—(1.3) $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к срединной поверхности O оболочки, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{B}$ — первый и второй фундаментальные тензоры поверхности, $\mathbf{e}$ — дискриминантный тензор, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, ∇ — набла-оператор на поверхности, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — линейный тензор деформаций поверхности, $\boldsymbol{\varkappa}$ — тензор изменений кривизны, $\boldsymbol{\omega}$ — линейный вектор поворота поверхности, a — удельная (на единицу площади срединной поверхности) потенциальная энергия предварительно напряженной оболочки, $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{N}$ ($\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{N} = 0$) — интенсивности добавочных силовой и моментной нагрузок, распределенных по поверхности O. Векторные поля $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\mu}$ считаются заданными, т. е. не зависят от вектора перемещений $\mathbf{w}$ и его производных.

В случае малой начальной деформации и безмоментного начального напряженного состояния определяющие соотношения записываются следующим образом [1]:

$$\mathbf{K} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\,\boldsymbol{\varepsilon} + \nu \mathbf{G}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\right] + \frac{1}{2}\chi\,(\mathbf{S}\cdot\mathbf{e} - \mathbf{e}\cdot\mathbf{S}) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{M} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)\,\boldsymbol{\varkappa} + \nu\mathbf{G}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varkappa}\right], \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\vartheta}$$

$$\gamma = \chi\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S} + \mathrm{tr}\,(\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$a = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left[\mathrm{tr}^2\,\boldsymbol{\varepsilon} - 2(1-\nu)\det\boldsymbol{\varepsilon}\right] + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\times$$

$$\times\left[\mathrm{tr}^2\,\boldsymbol{\varkappa} - 2(1-\nu)\det\boldsymbol{\varkappa}\right] + \chi\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2}\chi^2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\vartheta}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, $\mathbf{S}$ — тензор начальных усилий. Определяющие соотношения для произвольного начального состояния приведены в [1].

Полученные в [1] силовые граничные условия на контуре оболочки можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{m}\cdot[\mathbf{H} + (\nabla\cdot\mathbf{M})\,\mathbf{N} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}] + \frac{\partial}{\partial s}(M_{mt}\mathbf{N}) = \tag{1.5}$$

$$= \mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial s}(d_t\mathbf{N}) - (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{N}, \quad M_{mm} = d_m$$

$$(\mathbf{d} = d_m\mathbf{m} + d_t\mathbf{t}, \;\; \mathbf{m}\cdot\mathbf{M} = M_{mm}\mathbf{m} + M_{mt}\mathbf{t})$$

где $\mathbf{m}, \mathbf{t}$ — единичные векторы нормали и касательной к контуру Γ ($\mathbf{m}\cdot\mathbf{N} = 0$), s — текущая длина дуги контура, $\mathbf{l}$ — интенсивность распределенной по контуру внешней нагрузки, $\mathbf{d}\times\mathbf{N}$ ($\mathbf{d}\cdot\mathbf{N} = 0$) — интенсивность распределенного по граничной кривой момента.

Геометрические граничные условий состоят в задании на Γ вектора перемещений $\mathbf{w}$ и составляющей угла поворота $\vartheta_m = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\vartheta}$.

2. Если подставить (1.3) в (1.2), а затем в (1.1), то получится система трех уравнений относительно трех компонент вектора перемещения. Наряду с этим за основные неизвестные можно принять силовые величины $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$. Уравнениями для их определения помимо уравнений равновесия (1.1) будут служить уравнения совместности, накладываемые на кинематические величины $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ и представляющие собой результат исключения перемещений из соотношений (1.3). При этом определяющие соотношения (1.2) должны быть обращены, т. е. кинематические величины следует выразить через силовые.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы тензорное поле $\mathbf{F} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{F}$ было градиентом на поверхности от некоторого векторного поля $\mathbf{w}$, является равенство [6, 7]

$$\nabla\cdot(\mathbf{e}\cdot\mathbf{F}) = 0 \tag{2.1}$$

Из (1.3) вытекает соотношение

$$\boldsymbol{\varkappa} - [\nabla(\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^T)]\cdot\mathbf{G} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{F}^T = 0 \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1), (2.2), эквивалентны шести скалярным соотношениям для девяти компонент тензоров $\mathbf{F}$ и $\varkappa$, представляют собой уравнения совместности для кинематических величин. При их выполнении вектор перемещений определяется квадратурой

$$\mathbf{w} = \int d\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки поверхности. В односвязной области для однозначного определения $\mathbf{w}$ достаточно задать перемещение какой-либо точки поверхности. В случае неодносвязной области (оболочки с отверстиями) вектор $\mathbf{w}$, вообще говоря, находится неоднозначно. Если провести разрезы, превращающие поверхность оболочки в односвязную, то вектор $\mathbf{w}$ может претерпевать разрыв первого рода при пересечении разрезов, причем величина скачка вектора одинакова во всех точках каждого из разрезов.

Поскольку число уравнений совместности не совпадает с числом уравнений равновесия, статико-геометрическая аналогия, вообще говоря, не имеет места в теории предварительно напряженных оболочек. Эта аналогия справедлива в частном случае безмоментной теории оболочек с начальными напряжениями (в этом случае надо положить $\mathbf{M} = 0$, а тензор $\varkappa$ исключить из рассмотрения) и является следствием аналогии, отмеченной в [6].

Геометрические граничные условия на части Γ_1 края оболочки $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$, $\vartheta_m = \vartheta_m^*$, где звездочкой отмечены заданные функции координаты s, можно заменить условиями на краевые значения тензора $\mathbf{F}$. Поскольку $\mathbf{t}\cdot\mathbf{F} = \partial\mathbf{w}/\partial s$, на Γ_1 имеем

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{F} = \partial\mathbf{w}^*/\partial s,\quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \vartheta_m^* \tag{2.3}$$

Так как тензор-градиент вектора перемещения часто называют тензором дисторсии (см., например, [8]), краевые условия (2.3) можно назвать дисторсионными.

Дисторсионные условия были получены [5] как промежуточный результат при выводе деформационных условий. В линейной теории оболочек без начальных напряжений дисторсионные условия не используются. В теории предварительно напряженных оболочек роль деформационных условий переходит к дисторсионным.

Если кривая Γ_1 состоит из одного связного участка, то геометрические граничные условия восстанавливаются по дисторсионным условиям с точностью до произвольного постоянного вектора посредством квадратур. Поскольку произвольная трансляция (поступательное перемещение) оболочки несущественна в задаче о равновесии, то в случае связной кривой Γ_1 геометрические и дисторсионные условия можно считать эквивалентными. Если Γ_1 состоит из отдельных несвязных участков, то дисторсионных граничных условий недостаточно для восстановления геометрических условий (а следовательно, и для постановки краевой задачи). Требуется еще задать соотношения, определяющие взаимные поступательные смещения отдельных участков кривой Γ_1.

3. Исходя из тождества [7], справедливого для произвольного дважды дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}$

$$\mathbf{N}\cdot[\nabla\times(\nabla\mathbf{a})] = \nabla\cdot(\mathbf{e}\cdot\nabla\mathbf{a}) = 0 \tag{3.1}$$

видно, что общее решение уравнений равновесия (1.1) можно представить в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}\cdot\nabla\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{G}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{\Psi})\,\mathbf{N} + \mathbf{H}', \quad \mathbf{M} = \mathbf{\Psi} + \mathbf{M}' \tag{3.2}$$

где $\mathbf{\Phi}$ — произвольное дважды дифференцируемое векторное поле, $\mathbf{\Psi}$ — произвольный дважды дифференцируемый симметричный тензор, удовлетворяющий условию $\mathbf{N}\cdot\mathbf{\Psi} = 0$. Штрихом в (3.2) отмечено некоторое частное решение уравнений (1.1), соответствующее поверхностным нагрузкам $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\mu}$. Компоненты $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ назовем функциями напряжений. Соотношения (3.2) выражают девять скалярных силовых величин — компонентов тензоров $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ — через шесть функций напряжений, при этом уравнения равновесия тождественно удовлетворяются.

Силовые граничные условия (1.5) записываются через функции напряжений следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}(\psi_{mt}\mathbf{N}) + \mathbf{L}' = \mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial s}(d_t\mathbf{N}) - (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{N} \\ \psi_{mm} + M'_{mm} = d_m, \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{\Psi} \equiv \psi_{mm}\mathbf{m} + \psi_{mt}\mathbf{t} \\ \mathbf{L}' \equiv \mathbf{m}\cdot\mathbf{H}' + \mathbf{m}\cdot[\nabla\cdot(\mathbf{M}'\mathbf{N})] + \frac{\partial}{\partial s}(M'_{mt}\mathbf{N})\end{gathered} \tag{3.3}$$

4. Введем в рассмотрение удельную дополнительную энергию A как функцию статических величин $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$, связанную с удельной потенциальной энергией a преобразованием Лежандра. По свойству преобразования Лежандра имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{H}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{K}}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \chi = \frac{\partial A}{\partial \gamma} \\ \boldsymbol{\varkappa} = -\partial A/\partial\mathbf{M}, \quad A = A\,(\mathbf{H},\ \mathbf{M})\end{gathered} \tag{4.1}$$

Для случая малой начальной деформации и безмоментного начального напряженного состояния функция A вычисляется на основе соотношений (1.4) и имеет вид

$$\begin{gathered}2A = Eh\,[(1+\nu)\operatorname{tr}\overline{\mathbf{K}}^2 - \nu\operatorname{tr}^2\overline{\mathbf{K}}] + \\ + \frac{12}{Eh^3}[(1+\nu)\operatorname{tr}\mathbf{M}^2 - \nu\operatorname{tr}^2\mathbf{M}] + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} + \\ + Eh\left[\operatorname{tr}\overline{\mathbf{S}} + \frac{1}{2}(1+\nu)\operatorname{tr}^2\overline{\mathbf{S}} - \right. \\ \left. - (1+\nu)\operatorname{tr}\overline{\mathbf{S}}^2\right]^{-1}[\overline{\gamma} - (1+\nu)\operatorname{tr}(\overline{\mathbf{K}}\cdot\overline{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{e})]^2 \\ \mathbf{K} = Eh\overline{\mathbf{K}}, \quad \mathbf{S} = Eh\overline{\mathbf{S}}, \quad \gamma = Eh\overline{\gamma}, \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{S} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N} = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — двумерный тензор, обратный тензору начальных усилий.

5. Полученные выше соотношения позволяют сформулировать вариационные принципы теории предварительно напряженных оболочек, аналогичные принципам, установленным в [9] для трехмерной упругой среды. Предположим, что граница оболочки состоит из двух частей: Γ_1 и Γ_2. На Γ_1 заданы геометрические условия, на Γ_2 — силовые. Рассмотрим следующие функционалы:

$$\begin{gathered}U_1(\mathbf{w}) = \iint\limits_O a\,[\mathbf{F}(\mathbf{w}),\ \boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{w})]\,dO - \iint\limits_O [\mathbf{f}\cdot\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{w})]\,dO - \\ - \int\limits_{\Gamma_2}\left\{\left[\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{m}\times\mathbf{d})\right]\cdot\mathbf{w} - \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{w})\right\}ds\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered}U_2[\mathbf{w},\ \mathbf{H},\ \mathbf{M}] = \iint\limits_O [\mathbf{H}\cdot\cdot\mathbf{F}^T(\mathbf{w}) - \mathbf{M}\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{w}) - \\ - A\,(\mathbf{H},\ \mathbf{M}) - \mathbf{f}\cdot\mathbf{w} + \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{w})]\,dO - J\end{gathered} \tag{5.2}$$

$$J = \int_{\Gamma_1} \Big\{ \Big[\mathbf{m} \cdot (\mathbf{H} + \nabla \cdot (\mathbf{MN})) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} M_{mm} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s} (M_{mt} \mathbf{N}) \Big] \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*) - M_{mm} [\vartheta_m (\mathbf{w}) - \vartheta_m^*] \Big\} ds -$$

$$- \int_{\Gamma_2} \Big\{ \Big[\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{m} \times \mathbf{d}) \Big] \cdot \mathbf{w} - \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\vartheta} (\mathbf{w}) \Big\} ds$$

$$P \cdot \cdot Q \equiv \operatorname{tr} (P \cdot Q)$$

$$U_3 [\mathbf{w}, \ \mathbf{F}, \ \varkappa, \ \mathbf{H}, \ \mathbf{M}] = \iint_O \{ a (\mathbf{F}, \ \varkappa) - \mathbf{H}^T \cdot \cdot (\mathbf{F} - \nabla \mathbf{w}) + \tag{5.3}$$

$$+ \mathbf{M} \cdot \cdot [\varkappa - \nabla (\nabla w + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{w})^T] -$$

$$- \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\vartheta} (\mathbf{w}) \} ds - J$$

Функционал U_1 определен на множестве достаточно гладких полей перемещений, удовлетворяющих на Γ_1 геометрическим условиям. В функционале (5.2) независимо варьируются поля перемещений и силовых величин, не подчиненные никаким краевым условиям. Варьируемыми функциями в функционале (5.3) являются перемещения, кинематические и силовые величины, также не связанные дополнительными условиями. Из стационарности функционала U_1 вытекают уравнения равновесия в перемещениях и силовые граничные условия. Из условия $\delta U_2 = 0$ вытекают уравнения равновесия (1.1), соотношения (4.1), геометрические и силовые условия. Требование $\delta U_3 = 0$ эквивалентно уравнениям (1.1), соотношениям (1.2), (1.3); а также силовым и геометрическим граничным условиям.

Вариационные теоремы с функционалами (5.1)—(5.3) аналогичны соответственно принципам Лагранжа, Рейсснера и Ху-Вашицу в теории упругости [10]. Нетрудно привести формулировки этих принципов (на чем здесь не останавливаемся) и для различных случаев комбинированных граничных условий: шарнирное опирание, подвижный шарнир, скользящая заделка и т. д.

Формулировки указанных вариационных принципов можно распространить на случай следящего давления интенсивности p, равномерно распределенного по поверхности O. Если выполняются установленные в [1] условия консервативности гидростатической нагрузки, то к выражениям функционалов (5.1)—(5.3) достаточно добавить потенциал этой нагрузки [1]

$$\Pi = \frac{1}{2} p \iint_O (\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{u} - w \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \, dO$$

Выразив силовые величины согласно (3.2) через функции напряжений, рассмотрим следующий функционал над функциями напряжений:

$$V_1 [\boldsymbol{\Phi}, \ \boldsymbol{\Psi}] = \iint_O A (\boldsymbol{\Phi}, \ \boldsymbol{\Psi}) \, dO - \tag{5.4}$$

$$- \int_{\Gamma_1} \Big\{ \mathbf{w}^* \cdot \Big[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{N} \psi_{mt}) \Big] - \vartheta_m^* \psi_{mm} \Big\} ds$$

Функционал V_1 определен на множестве дважды дифференцируемых векторного $\boldsymbol{\Phi}$ и тензорного $\boldsymbol{\Psi}$ полей, подчиненных на Γ_2 условиям (3.3). Заметим, что значение функционала V_1 не изменится, если $\boldsymbol{\Phi}$ заменить на $\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — произвольный постоянный вектор.

Покажем, что условие стационарности функционала V_1 эквивалентно уравнениям совместности (2.1), (2.2), записанным через функции напряжений, и геометрическим граничным условиям на Γ_1. На основании (4.1) вариацию функционала V_1 после интегрирования по частям запишем в виде

$$(5.5)\quad \delta V_1 = \iint\limits_O (\nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{F})\cdot\delta\boldsymbol{\Phi} + [(\mathbf{B}\cdot\mathbf{F}^T + \nabla\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\varkappa})\cdot\cdot\,\delta\boldsymbol{\Psi}]\,dO -$$
$$- \oint\limits_\Gamma (\mathbf{t}\cdot\mathbf{F}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi} + \vartheta_t\delta\psi_{mt} + \vartheta_m\delta\psi_{mm})\,ds -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_1}\left\{\mathbf{w}^*\cdot\left[\frac{\partial\delta\boldsymbol{\Phi}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{N}\delta\psi_{mt})\right] - \vartheta_m^*\delta\psi_{mm}\right\}ds$$

Согласно (3.3), возможные вариации функций напряжений на кривой Γ_2 должны быть подчинены условию

$$(5.6)\qquad \partial/\partial s\,(\delta\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}\delta\psi_{mt}) = 0,\ \delta\psi_{mm} = 0$$

Пусть $\delta V_1 = 0$. Положив сначала на Γ $\delta\boldsymbol{\Phi} = \delta\boldsymbol{\Psi} = 0$ (это совместимо с ограничением (5.6)), в силу основной леммы вариационного исчисления приходим к уравнениям совместности (2.1), (2.2). Эти уравнения означают, что существует векторное поле $\mathbf{w}$, поверхностный градиент которого $\mathbf{F}$ $(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi})$. В односвязной области вектор $\mathbf{w}$ — однозначная функция координат на поверхности, определенная с точностью до аддитивной векторной постоянной. Учитывая это, преобразуем условие стационарности функционала

$$(5.7)\qquad - \oint\limits_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{w}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}) + \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{N}\delta\psi_{mt})\right]ds +$$
$$+ \oint\limits_\Gamma\left[\mathbf{w}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(\delta\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}\delta\psi_{mt}) - \mathbf{m}\cdot(\nabla w + \mathbf{B}\cdot\mathbf{w})\,\delta\psi_{mm}\right]ds -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_1}\left[\mathbf{w}^*\cdot\frac{\partial}{\partial s}(\delta\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}\delta\psi_{mt}) - \vartheta_m^*\delta\psi_{mm}\right]ds = 0$$

Первый интеграл в (5.7), очевидно, равен нулю. Так как $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, а на Γ_2 имеют место условия (5.6), из произвольности $\delta\boldsymbol{\Phi}$, $\delta\boldsymbol{\Psi}$ заключаем, что на Γ_1 выполнены условия $\mathbf{m}\cdot(\nabla w + \mathbf{B}\cdot\mathbf{w}) = \vartheta_m{}^*$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$. Заметим, что последним соотношением устраняется указанная выше неопределенность в виде векторной постоянной.

Если поверхность оболочки не односвязна, то, превратив ее в односвязную путем проведения необходимого числа разрезов (перегородок), можно показать, что в случае многосвязной области из стационарности функционала V_1 вытекает также условие однозначности перемещений.

Силовые граничные условия (3.3) представляют собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно вектора $\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}\psi_{mt}$. Так как вектор-функция напряжений $\boldsymbol{\Phi}$ определена лишь с точностью до произвольного постоянного вектора, в случае, если Γ_2 состоит из одного связного участка, силовым условиям можно удовлетворить без потери общности, положив на Γ_2

$$(5.8)\qquad \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}\psi_{mt} = \boldsymbol{\varphi}^*,\ \psi_{mm} = d_m - M_{mm}'$$

где $\boldsymbol{\varphi}^*$ — некоторое частное решение уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds} = \mathbf{l} - \mathbf{L}' + \frac{d}{ds}(\mathbf{m}\times\mathbf{d}) - (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{N}$$

Положим

$$(5.9)\qquad V_1'[\Phi,\ \Psi] = \iint\limits_O A(\Phi,\ \Psi)\,dO + \int\limits_{\Gamma_1}\left[\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial s}\cdot(\Phi + \mathbf{N}\psi_{mt}) + \vartheta_m^*\psi_{mm}\right]ds$$

Можно проверить, что условие стационарности функционала V_1' над функциями напряжений, удовлетворяющими на Γ_2 условиям (5.8), эквивалентно уравнениям совместности (2.1), (2.2) и дисторсионным краевым условиям на Γ_1.

Вывод деформационных граничных условий в классической линейной теории оболочек из вариационного принципа дополнительной энергии содержится в [11].

Для приводимых ниже функционалов V_2 и V_3 естественными граничными условиями служат как дисторсионные условия, так и силовые в форме (5.8)

$$(5.10)\qquad V_2[\mathbf{F},\ \varkappa,\ \Phi,\ \Psi] = \iint\limits_O \{[\mathbf{e}\cdot\nabla\Phi + \Psi\cdot\mathbf{B} - \mathbf{G}\cdot(\nabla\cdot\Psi)\,\mathbf{N} +$$

$$+ \mathbf{H}']\cdot\cdot\mathbf{F}^T - (\Psi + \mathbf{M}')\cdot\cdot\varkappa - a(\mathbf{F},\ \varkappa)\}\,dO + W$$

$$W = \int\limits_{\Gamma_1}\left[\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial s}\cdot(\Phi + \mathbf{N}\psi_{mt}) + \vartheta_m^*\psi_{mm}\right]ds +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_2}[\mathbf{t}\cdot\mathbf{F}\cdot(\Phi + \mathbf{N}\psi_{mt} - \varphi^*) + \vartheta_m(\psi_{mm} - d_m + M'_{mm})]\,ds$$

$$(5.11)\qquad V_3[\mathbf{F},\ \varkappa,\ \mathbf{H},\ \mathbf{M},\ \Phi,\ \Psi] = \iint\limits_O \{A(\mathbf{H},\ \mathbf{M}) - \mathbf{F}^T\cdot\cdot[\mathbf{H} - \mathbf{e}\cdot\nabla\Phi -$$

$$- \Psi\cdot\mathbf{B} + \mathbf{G}\cdot(\nabla\cdot\Psi)\,\mathbf{N} - \mathbf{H}'] + \varkappa\cdot\cdot(\mathbf{M} - \Psi - \mathbf{M}')\}\,dO + W$$

Необходимые и достаточные условия стационарности функционала (5.10) состоят из уравнений (2.1), (2.2) определяющих соотношений (1.2), в которых силовые величины выражены через функции напряжений, и краевых условий (2.3), (5.8). Требование стационарности функционала (5.11) эквивалентно уравнениям совместности, соотношениям (4.1), (3.2), а также дисторсионным и силовым граничным условиям.

Приведем еще вытекающую из (1.1), (1.2), (1.5) формулировку теоремы Клапейрона для предварительно напряженных оболочек

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}\left\{\left[\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial s}(d_t\mathbf{N})\right]\cdot\mathbf{w} - \mathbf{d}\cdot\vartheta\right\}ds + \frac{1}{2}\iint\limits_O(\mathbf{f}\cdot\mathbf{w} - \mu\cdot\vartheta)\,dO =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_O(\mathbf{H}\cdot\cdot\mathbf{F}^T - \mathbf{M}\cdot\cdot\varkappa)\,dO = \iint\limits_Q a\,dO$$

6. Выше был рассмотрен общий случай начального напряженного состояния оболочки, когда возможно обращение определяющих соотношений (1.2). Вместе с тем существуют исключительные случаи, для которых невозможно выразить все кинематические величины через силовые, что приводит к видоизменению ряда положений теории. Наиболее важным из таких примеров является цилиндрическая оболочка (произвольного сечения), подвергнутая одноосному предварительному растяжению или сжатию в направлении образующих цилиндра. В качестве координаты x_1 на поверхности цилиндра примем длину дуги контура поперечного сечения оболочки, и за координату x_2 примем расстояние, отсчитываемое по оси цилиндра. Единичные векторы, касательные к координатным линиям, обозначим $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Тензор начальных усилий в данном случае

имеет вид $S = T\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$. Поэтому, как видно из (1.4), удельная потенциальная энергия a не зависит от компоненты $\vartheta_1 = \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\vartheta}$ вектора поворота. Следовательно, эта компонента не может быть выражена через силовые величины. При составлении системы уравнений относительно силовых величин естественным путем приходим к задаче определения вектора перемещения поверхности по заданному полю кинематических величин ε, $\varkappa$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\vartheta_2 = \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\vartheta}$ и выводу соответствующих условий совместимости. Эти условия состоят из пяти уравнений и имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \varkappa_{11}}{\partial x_2} - k\,\frac{\partial F_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varkappa_{21}}{\partial x_1} = 0 \\
\varkappa_{22} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + k\vartheta_2 = 0 \\
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{22}}{\partial x_1} = 0, \quad \varkappa_{21} - kF_{21} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1} = 0 \\
k = k(x_1) = -\mathbf{e}_1\cdot\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_1} \\
\varkappa_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{e}_\beta, \quad F_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\beta \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2)
\end{gathered} \tag{6.1}
$$

Если уравнения (6.1) выполняются, то перемещения оболочки определяются квадратурами с точностью до произвольной трансляции и произвольного поворота вокруг оси $\mathbf{e}_2$.

При нахождении общего решения уравнений равновесия (1.1) следует учесть, что в рассматриваемом особом случае имеет место равенство $\lambda_1 = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{N} = 0$. Это соотношение накладывает следующую связь на функции $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$ в (3.2):

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \Phi = \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{N}, \quad \psi_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{e}_\beta \tag{6.2}
$$

Условию (6.2) можно удовлетворить положив

$$
\psi_{12} = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \psi_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}
$$

где ψ — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Таким образом, при одноосном предварительном напряжении общее решение уравнений равновесия содержит, в отличие от общего случая, пять функций напряжений: Φ, $\mathbf{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{\Phi}$ ($\alpha = 1, 2$), ψ, ψ_{22}. Можно проверить, что и в этом случае из вариационного принципа с функционалом типа V_1 вытекают уравнения совместности (6.1).

Если начальные напряжения в оболочке отсутствуют, то функции напряжений $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$ следует подчинить условиям: $\lambda = 0$, $\gamma = 0$. Исходя из этого можно прийти к трем функциям напряжений линейной теории оболочек [3—5], через которые выражается общее решение трех уравнений равновесия относительно симметричных тензоров усилий и моментов.

7. В качестве приложения рассмотрим новый энергетический критерий выпучивания тонких пластин, вытекающий из принципа дополнительной работы. Для изгибных деформаций плиты выполнены равенства $\mathbf{K} = \gamma = 0$ и из (3.2) имеем $\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{G} = 0$. На основании (3.2), (4.2), (5.9) энергетическому критерию устойчивости напряженной в своей плоскости плиты придадим вид ($\Phi = \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{N}$).

$$
\begin{gathered}
\delta V = 0, \quad V = \iint\limits_O \{12\,(Eh^3)^{-1}\,[(1+\nu)\operatorname{tr}\boldsymbol{\Psi}^2 - \nu\operatorname{tr}^2\boldsymbol{\Psi}] + \\
+ (\mathbf{e}\cdot\nabla\Phi - \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi})\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{e}\cdot\nabla\Phi - \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi})\}\,dO
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

Функции напряжений Φ, $\boldsymbol{\Psi}$ в функционале V должны удовлетворять силовым граничным условиям. Геометрические условия предполагаются однородными. Для осесимметричных форм выпучивания равномерно сжатой ($S = -qG$) круглой пластинки имеем $\Phi = 0$, $\psi_{12} = 0$, где индекс 1 соответствует радиальной координате r, а индекс 2 — угловой координате. Функционал (7.1) принимает в этом случае вид

$$V = 2\pi q^{-1} \int_0^a \left[12\,(Eh^3)^{-1}\, q\,(\psi_{11}{}^2 + \psi_{22}{}^2 - 2\nu\psi_{11}\psi_{22}) - \left(\frac{d\psi_{11}}{dr} + \frac{\psi_{11} - \psi_{22}}{r}\right)^2\right] r\, dr \tag{7.2}$$

Здесь a — радиус пластинки, q — величина сжимающего усилия. В случае свободно опертой пластинки примем в качестве координатных функций метода Ритца выражения изгибающих моментов, возникающих в пластинке без начальных напряжений под действием равномерной поперечной нагрузки

$$\psi_{11} = C\,(3 + \nu)\,(a^2 - r^2),\quad \psi_{22} = C\,[(3 + \nu)\,a^2 - (1 + 3\nu)\,r^2] \tag{7.3}$$
$$C = \mathrm{const}$$

Из (7.1) — (7.3) найдем приближенное значение критической нагрузки при $\nu = 0{,}3$

$$12(1 - \nu^2)\,(Eh^3)^{-1}a^2 q = 4{,}25$$

Точное значение этой величины равно 4,20 [12].

Другим примером приложения изложенной выше теории может служить задача устойчивости сжатых тонкостенных цилиндрических стержней замкнутого профиля. Для стержневых форм выпучивания тонкостенного цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой гладкий замкнутый контур, можно пренебречь изгибной жесткостью стенки оболочки, т. е. рассматривать безмоментную теорию. Удельная дополнительная энергия согласно (4.2) в этом случае примет вид (опущен несущественный постоянный множитель)

$$A = H_{11}{}^2 + H_{22}{}^2 - 2\nu H_{11}H_{22} + \frac{1+\tau}{\tau}\,(\lambda_2{}^2 + H_{12}{}^2 + H_{21}{}^2) + \tag{7.4}$$
$$+ \frac{2\,(\nu\tau - 1)}{\tau}\, H_{21}H_{12}, \qquad \tau = \frac{T}{E}$$
$$H_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Здесь τ — безразмерное начальное напряжение, действующее в направлении оси стержня. Учитывая (3.2), (6.2), выразим дополнительную энергию через функции напряжений Φ_1, Φ_2 и применим вариационный принцип с функционалом (5.4) для исследования устойчивости стержня, торцы которого находятся в условиях скользящей заделки. В этом случае следует положить (l — длина стержня)

$$\Phi_1 = \varphi_1(x_1)\sin\eta x_2,\qquad \Phi_2 = \varphi_2(x_2)\cos\eta x_2,\qquad \eta = \frac{n\pi}{l},\qquad n = 1, 2, \ldots$$

Условие стационарности функционала (5.4) с учетом периодичности функций $\varphi_\alpha(x_1)$ $(\alpha = 1, 2)$ приводит к уравнениям (штрих означает производную по x_1)

$$(1 + \tau)\,\varphi_1'' - [(1 + \tau)\,k^2(x_1) + \eta^2\tau]\,\varphi_1 - \eta\varphi_2' = 0 \tag{7.5}$$
$$\tau\varphi_2'' - (1 + \tau)\,\eta^2\varphi_2 + \eta\varphi_1' = 0$$

Здесь $k(x_1)$ — кривизна контура поперечного сечения. Уравнения (7.5) совпадают с уравнениями, выведенными в [13] другим способом, с применением принципа дополнительной энергии непосредственно к трехмерной теории равновесия предварительно напряженных тел.

Область применимости этой теории выпучивания тонкостенных стержней изучена [14] на примере стержня с круговым сечением путем сравнения с точным решением задачи устойчивости для полого кругового цилиндра в трехмерной постановке. Установлено [14], что уравнения (7.5) позволяют, в частности, достаточно точно определить критическую нагрузку, соответствующую стержневой форме неустойчивости, которая реализуется в длинных оболочках. Эта форма выпучивания характеризуется тем, что функции $\varphi_\alpha(x_1)$ имеют две перемены знака на контуре поперечного сечения. В [14] уравнения (7.5) применены для расчета критической нагрузки стержня со сложным профилем поперечного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Л. М.* Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 85—95.
2. *Лурье А. И.* Общая теория упругих тонких оболочек.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 2, с. 7—34.

3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
5. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, ч. 1, 1962.274 с.; ч. 2, 1964.395 с.
6. *Зубов Л. М.* Статико-геометрическая аналогия и вариационные принципы в нелинейной безмоментной теории оболочек.— В кн.: Тр. XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 2. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1980, с. 171—176.
7. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
8. *Вит Р. Де.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
9. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 848—852.
10. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
11. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.
12. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.
13. *Дикалов А. И., Зубов Л. М.* К теории малых деформаций упругого тела, наложенных на состояние одноосного сжатия.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Естеств. н., 1974, № 4, с. 30—34.
14. *Зубов Л. М., Руденко Г. Г.* Устойчивость тонкостенных стержней замкнутого профиля.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Естеств. н., 1981, № 2, с. 30—33.

Поступила в редакцию
6.IV.1983

Ростов-на-Дону