УДК 533.6.011

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОХРАНЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Голубинский А. И., Голубкин В. Н.

Обнаружен неизвестный ранее инвариант вихревых линий стационарного баротропного течения идеального газа. Получен аналог этого инварианта и некоторых других инвариантов линий тока и вихревых линий для более общего случая небаротропного течения.

Получено уравнение, описывающее изменение проекции завихренности на направление скорости в пространственном течении идеального газа. Указаны случаи ее сохранения вдоль линий тока, что дает дополнительный интеграл уравнений газовой динамики.

1. Рассмотрим установившееся течение идеального сжимаемого газа. Обозначим через $\mathbf{v}$ — вектор скорости, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — завихренность, p — давление, ρ — плотность. В газовой динамике представляют интерес величины, сохраняющиеся вдоль линий тока (инварианты линий тока). Известно, в частности, что наряду с энтропией σ вдоль линий тока сохраняется вихревой потенциал Эртеля $E_0 = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma)/\rho$.

В баротропном течении газа инвариантом линий тока служит [1—3] $E_\lambda = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\lambda)/\rho$:

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\lambda}{\rho}\right) = 0 \tag{1.1}$$

где λ — произвольная функция, постоянная вдоль линий тока

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\lambda = 0 \tag{1.2}$$

Соотношения (1.1), (1.2) выражают теорему Эйлера — Эртеля [1] для сжимаемого баротропного газа.

Наряду с этим важно установить инварианты вихревых линий. Одним из них является функция Бернулли H:

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla H = 0, \quad H = \frac{q^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho(p)}, \quad q^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \tag{1.3}$$

Оказывается, что соотношения (1.1), (1.2) обладают определенным свойством коммутативности по отношению к перестановке векторов $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$, которое в результате дает новый инвариант вихревых линий и выражается следующей теоремой.

Теорема. Пусть μ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, постоянная вдоль вихревых линий непрерывного течения баротропного газа

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mu = 0 \tag{1.4}$$

Тогда величина $\theta_\mu = \mathbf{v}\cdot\nabla\mu$ также сохраняется постоянной вдоль вихревых линий

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla(\mathbf{v}\cdot\nabla\mu) = 0 \tag{1.5}$$

Для доказательства теоремы преобразуем левую часть выражения (1.5), используя известную формулу для градиента скалярного произведения. Получим

(1.6) $$\omega\cdot\nabla\,(\mathbf{v}\cdot\nabla\mu)=\omega\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\nabla\mu+\omega\cdot(\nabla\mu\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$$

Применяя оператор $\mathbf{v}\cdot\nabla$ к равенству (1.4), приведем первое слагаемое в правой части к виду

(1.7) $$\omega\cdot\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\nabla\mu=-\nabla\mu\cdot\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\omega$$

Поскольку $\omega=\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$, второе слагаемое можно записать поменяв местами ω и $\nabla\mu$

$$\omega\cdot\,(\nabla\mu\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=\nabla\mu\cdot\,(\omega\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$$

Далее путем почленного умножения уравнения Гельмгольца — Фридмана

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\omega=(\omega\cdot\nabla)\,\mathbf{v}-\omega\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

на $\nabla\mu$ с учетом (1.4) получим

(1.8) $$\omega\cdot\,(\nabla\mu\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=\nabla\mu\cdot\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\omega$$

Равенства (1.7), (1.8) показывают, что слагаемые в правой части (1.6) различаются лишь знаками и дают в сумме нуль, что и доказывает теорему.

Отметим, что новый инвариант θ_μ, в отличие от E_λ, имеет один и тот же вид для течений несжимаемой жидкости и сжимаемого баротропного газа.

2. Доказанная теорема, а также свойства сохранения (1.1), (1.3) допускают обобщение на случай адиабатического течения небаротропного совершенного газа. Для этого рассматриваемому течению с параметрами $(\mathbf{v}_*,\ p_*,\ \rho_*)$ поставим в соответствие изоэнтропическое (баротропное) течение $(\mathbf{v},\ p,\ \rho)$ с той же конфигурацией линий тока и таким же распределением давления при помощи преобразования [4, 5]

(2.1) $$\mathbf{v}=s_*^{-1/(2\varkappa)}\mathbf{v}_*,\quad p=p_*,\quad \rho=s_*^{1/\varkappa}\rho_*$$

где $s_*=p_*\rho_*^{-\varkappa}$ — постоянная вдоль линий тока энтропийная функция адиабатического течения, $\varkappa$ — показатель адиабаты.

В поле изоэнтропического течения справедливы соотношения (1.5), (1.1), а также (1.3), причем в (1.3) следует положить

$$H=i_0=\frac{q^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}$$

Если теперь ввести в рассмотрение вектор

$$\mathbf{B}=s_*^{-1/(2\varkappa)}\,\omega_*-\mathbf{v}_*\times\nabla\,(s_*^{-1/(2\varkappa)})\quad(\omega_*=\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_*)$$

и функцию μ_*, постоянную вдоль векторных линий вектора $\mathbf{B}$, то теорема, доказанная в п. 1, обобщается следующим образом: в адиабатическом небаротропном течении одновременно с μ_* величина $\theta_\mu{}^*=s_*^{-1/(2\varkappa)}\,\mathbf{v}_*\cdot\nabla\mu_*$ сохраняется постоянной вдоль векторных линий вектора $\mathbf{B}$.

Согласно (1.3), (2.1), вдоль векторных линий вектора $\mathbf{B}$ сохраняется также величина $s_*^{-1/\varkappa}\,i_0{}^*$, где $i_0{}^*$ — полная энтальпия.

Отметим, что эти линии не совпадают с вихревыми линиями рассматриваемого течения.

Теорема Эйлера — Эртеля обобщается следующим образом: в адиабатическом небаротропном течении одновременно с λ величина $E_\lambda{}^*=(\mathbf{B}\cdot\nabla\lambda)/\rho_*$ сохраняется постоянной вдоль линий тока.

3. Результаты п. 2 справедливы и для газа с уравнением состояния более общего вида $\rho_*=F\,(p_*)\,\Phi\,(\sigma_*)$.

Доказательство аналогично п. 2, но вместо (2.1) используется преобразование [4]

$$\mathbf{v} = \Phi^{1/2}(\sigma_*)\,\mathbf{v}_*,\ \rho = \Phi^{-1}(\sigma_*)\,\rho_*$$

причем $\mathbf{B} = \Phi^{1/2}\boldsymbol{\omega}_* - \mathbf{v}_* \times \nabla(\Phi^{1/2})$.

4. Получим уравнение, описывающее изменение проекции завихренности на направление скорости в идеальном газе. Представим вектор завихренности в виде суммы двух составляющих, одна из которых ориентирована параллельно, а другая — перпендикулярно вектору скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_v + \boldsymbol{\omega}_n \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_v = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\tau}),\ \boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\tau} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau}],\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/q \tag{4.2}$$

$$\omega_v = \omega\cos\gamma,\ \omega_n = \omega\sin\gamma$$

где γ — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ в плоскости П, проходящей через эти векторы.

Известная теорема Крокко [6]

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = T\nabla\sigma - \nabla i_0 \tag{4.3}$$

связывает величину нормальной составляющей завихренности с изменениями энтропии σ и полной энтальпии i_0 (T — температура).

Назовем обобщенной проекцией завихренности на направление скорости течения сжимаемого газа величину $\Omega_v = \omega_v/(\rho q)$. Получим уравнение, описывающее изменение обобщенной проекции завихренности на направление скорости. В результате постановки (4.1) в тождество $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$ и использования уравнения неразрывности находим

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\Omega_v = -\rho^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}_n \tag{4.4}$$

Применим оператор дивергенции к обеим частям формулы (4.2) для $\boldsymbol{\omega}_n$ и воспользуемся теоремой (4.3), уравнением движения газа в форме Громеки — Лэмба и уравнением состояния

$$\nabla\frac{q^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,\quad p = c_p\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\rho T$$

где c_p — коэффициент теплоемкости при постоянном давлении.

Тогда можно показать, что в изоэнтропическом течении ($\sigma \equiv \mathrm{const}$)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}_n = \frac{2}{\rho q^2}(\boldsymbol{\omega}_n\cdot\nabla p) \tag{4.5}$$

а в изоэнергетическом течении ($i_0 \equiv \mathrm{const} = i_{00}$)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}_n = \frac{2i_{00}}{c_pT\rho q^2}(\boldsymbol{\omega}_n\cdot\nabla p) \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5), (4.6) в (4.4) и рассматривая относительные изменения всех величин, получим окончательно (M — местное число Маха)

$$\frac{d}{d\tau}\ln\Omega_v = -\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{\varkappa M^2}\frac{d}{dn}\ln p\quad (\sigma \equiv \mathrm{const}) \tag{4.7}$$

$$\frac{d}{d\tau}\ln\Omega_v = -\frac{\varkappa + 1}{\varkappa}\varepsilon_0\operatorname{tg}\gamma\frac{d}{dn}\ln p\quad (i_0 \equiv \mathrm{const}) \tag{4.8}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\left[1 + \frac{2}{(\varkappa - 1)M^2}\right]$$

$$d/d\tau \equiv \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla,\ d/dn \equiv \mathbf{n}\cdot\nabla$$

Уравнения (4.7), (4.8) показывают, что для течения Бельтрами ($\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}$, $\gamma = 0, \pi$) величина Ω_v постоянна вдоль линий тока, что является обобщением второй теоремы Громеки — Больтрами [1]. Обобщенная проекция завихренности на направление скорости сохраняется вдоль линий тока и в том случае, если градиент давления по нормали к линиям тока в плоскости П равен нулю.

В общем случае, когда эти условия не выполняются, обобщенная проекция завихренности на направление скорости в точной постановке изменяется вдоль линий тока в соответствии с (4.7), (4.8). В то же время, используя полученные в данной работе явные выражения для правых частей этих уравнений, можно показать, что в некоторых приближенных теориях, основанных на разложениях по малым параметрам, правая часть формул (4.7), (4.8) оказывается величиной более высокого порядка малости по сравнению с левой частью. Следовательно, наряду с известными интегралами уравнений газовой динамики существует новый интеграл, выражающий сохранение вдоль линий тока главного члена разложения обобщенной проекции завихренности на направление скорости.

Так, в теории тонкого сжатого слоя для гиперзвукового обтекания тел [7] используется предельный переход $\varepsilon \to 0$ ($\varkappa \to 1$, $M_\infty \to \infty$), где параметр ε характеризует отношение плотностей на головном скачке уплотнения. При конечных углах атаки $\varepsilon_0 \sim \varepsilon$. Поэтому согласно (4.8) в задачах пространственного гиперзвукового обтекания тонких крыльев малого удлинения ($\operatorname{tg}\gamma \sim \varepsilon^{1/2}$, $d\ln p/dn \sim \varepsilon^{1/2}$) [8] или тел конечной толщины ($\operatorname{tg}\gamma \sim 1$, $d\ln p/dn \sim 1$) [9] обобщенная проекция завихренности на направление скорости сохраняется постоянной вдоль линий тока, что позволило получить аналитическое решение этих трехмерных нелинейных задач. Важно, что это свойство сохранения оказывается универсальным и справедливо как для течений совершенного газа, так и для течений равновесно и неравновесно реагирующего и излучающего газа [10, 11]. В то же время оно весьма нетривиально, поскольку поперечная составляющая завихренности не обладает свойством сохраняемости.

Для крыла умеренного удлинения в гиперзвуковом потоке при больших углах атаки ($\cos\alpha \sim \varepsilon^{1/2}$) имеем $\varepsilon_0 \sim 1$, однако сохранение проекции завихренности на направление скорости по-прежнему имеет место, поскольку $\operatorname{tg}\gamma \sim 1$, $d\ln p/dn \sim \varepsilon$ [12].

Далее, в нелинейной теории малых возмущений для трансзвукового обтекания тонкого крыла большого удлинения (относительная толщина и удлинение порядка δ и $\delta^{-1/3}$ соответственно, число M набегающего потока близко к единице $|1 - M_\infty{}^2| \sim \delta^{2/3}$), используя известные [13, 14] оценки порядков величин, получим, что и во внешней области течения (координата по нормали к крылу $y \sim \delta^{-1/3}$), и во внутренней области вблизи крыла ($y \sim \delta$) $\varepsilon_0 \sim 1$, $\operatorname{tg}\gamma \sim \delta^{-1/3}$, $d\ln p/dn \sim \delta$. Поэтому проекция завихренности на направление скорости сохраняется вдоль линий тока, но во внешней области сохраняется также и поперечная составляющая ω_n, а во внутренней области нормальная к крылу компонента завихренности изменяется вдоль линий тока.

5. Уравнения (4.7), (4.8) обобщаются на случай неустановившегося движения газа. Например, вместо уравнения (4.7) имеем (t — время)

$$\frac{d}{dt}\ln\Omega_v = -\frac{2q\operatorname{tg}\gamma}{\varkappa M^2}\frac{\partial}{\partial n}\ln p - \frac{1}{\cos\gamma}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{1}{q}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}/\omega,\quad d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$$

В теории нестационарного тонкого сжатого слоя обобщенная проекция завихренности на направление скорости в отличие от стационарного случая постоянна вдоль траекторий лишь при обтекании тонкого крыла малого удлинения [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Truesdell C.* The kinematic of vorticity. Bloomington: Indiana Univ., Publ., Science Ser., No. 19, 1954, 232 p.
2. *Зейтунян Р. К.* Теория трехмерных вихревых течений идеальных жидкостей.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 8, № 5. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977, с. 71—101.
3. *Mobbs S. D.* Some vorticity theorems and conservation laws for non-barotropic fluids.— J. Fluid Mech., 1981, v. 108, p. 475—483.

4. *Голубинский А. И.* О сохранении обобщенной циркуляции скорости в установившихся течениях идеального газа.— Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 5, с. 1043—1045.
5. *Голубинский А. И.*, *Сычев Вик. В.* О некоторых свойствах сохраняемости вихревых течений газа.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 798—799.
6. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588с.
7. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220с.
8. *Голубинский А. И.*, *Голубкин В. Н.* О пространственном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 5, с. 1032—1034.
9. *Голубинский А. И.*, *Голубкин В. Н.* Пространственное гиперзвуковое обтекание тела конечной толщины.— Уч. зап. ЦАГИ, 1982, т. 13, № 2, с. 26—34.
10. *Голубинский А. И.*, *Голубкин В. Н.* О гиперзвуковом обтекании крыла малого удлинения неравновесным потоком газа.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 6, с. 125—128.
11. *Голубинский А. И.*, *Голубкин В. Н.* Гиперзвуковое пространственное обтекание крыла потоком излучающего газа.— ПМТФ, 1983, № 6, с. 71—78.
12. *Голубкин В. Н.* Обтекание треугольного крыла гиперзвуковым потоком газа при больших углах атаки.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 376—382.
13. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421с.
14. *Эшли Х.*, *Лэндал М.* Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 318с.

Москва

Поступила в редакцию 19.I.1984