

УДК 532.516

ГАЗОВОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ДЛЯ КОНФИГУРАЦИИ С БОКОВЫМИ КРОМКАМИ

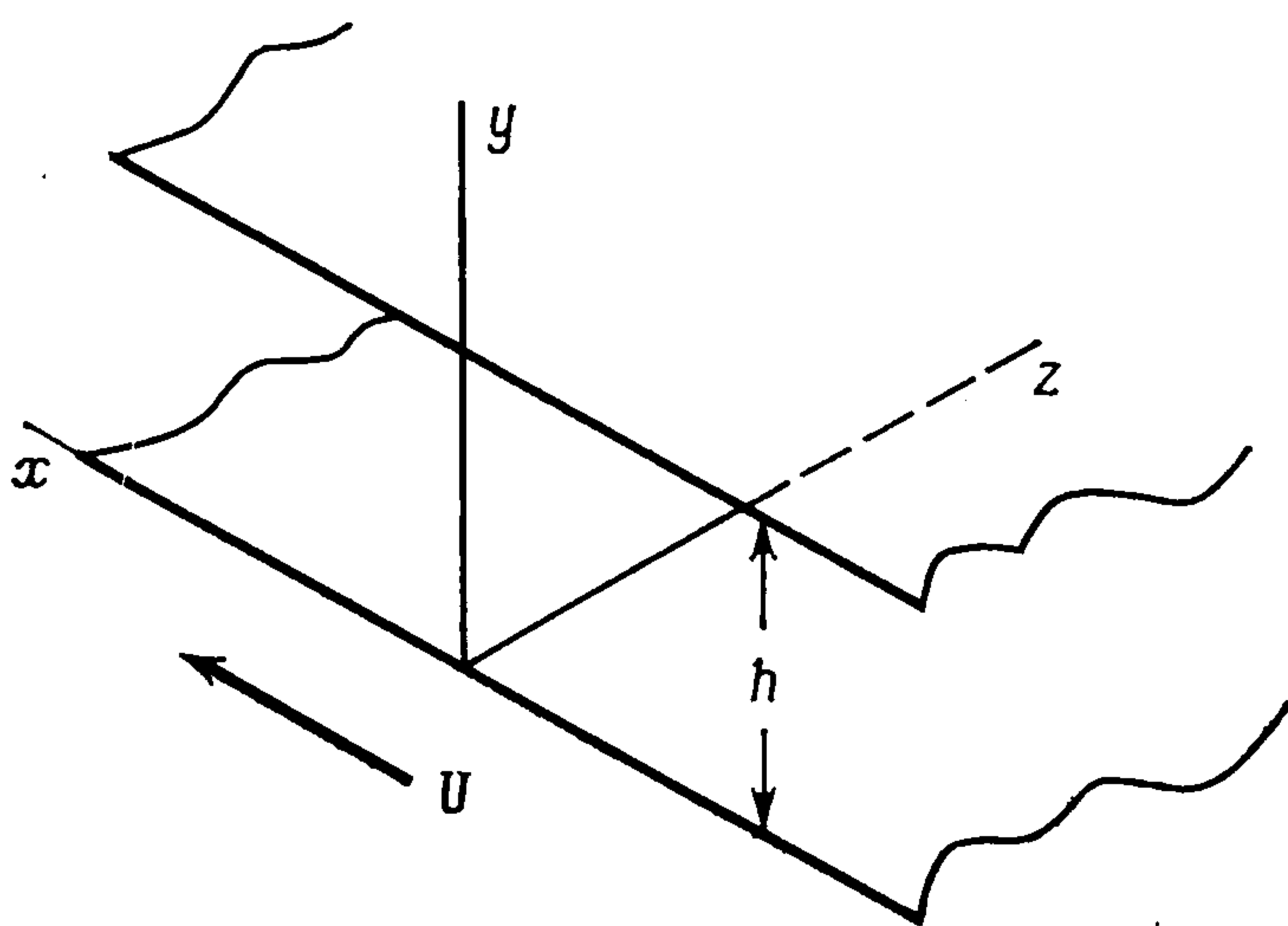
Шидловский В. П.

В динамике вязкой сжимаемой жидкости известно точное решение уравнений Навье — Стокса (см., например, [1]) для задачи об установившемся течении между двумя неограниченными параллельными плоскостями, движущимися с различными скоростями и имеющими в общем случае различную температуру (течение Куэтта). Будет показано, что точное решение удастся построить и в случае, когда граничные поверхности, сохраняя бесконечную протяженность в направлении движения, ограничены в поперечном направлении, т. е. обладают боковыми кромками.

1. Моделью рассматриваемой среды служит вязкий, теплопроводный газ, удельные теплоемкости и число Прандтля Pr которого постоянны, а динамическая вязкость μ однозначно зависит от температуры. Газ заполняет все пространство и находится в состоянии установившегося движения за счет наличия непроницаемой полуплоскости, движущейся параллельно своей боковой кромке с постоянной скоростью U . На расстоянии h над этой полуплоскостью, параллельно ей, расположена вторая, неподвижная полуплоскость. Не конкретизируя вида температурных граничных условий, укажем лишь, что температура одной из ограничивающих полуплоскостей будет считаться постоянной и равной T_w . При

этих условиях требуется определить стационарное распределение гидродинамических параметров и температуры во всем пространстве.

Классический вариант задачи Куэтта позволяет рассматривать течение внутри зазора независимо от того, что происходит за пределами последнего. При наличии боковых кромок внутренняя область является лишь частью бесконечного пространства, приводи-



Фиг. 1

мого в движение, и решение, разумеется, зависит от формы «внешних» граничных поверхностей. Это означает, что модель геометрии границ должна быть дополнена и сделана более конкретной. Ниже будут рассмотрены два варианта конкретизации внешних границ.

Выберем декартову систему координат так (фиг. 1), чтобы ось x была направлена в сторону движения вдоль кромки нижней граничной полуплоскости, ось y — вверх, по нормали к обеим полуплоскостям, а ось z — располагалась в плоскости нижней границы.

Уравнения Навье — Стокса для установившегося течения газа запишем в безразмерной форме, принимая h за масштаб длины, а за масштабы скорости, температуры и вязкости — соответственно U , T_w и $\mu_w =$

$= \mu (T_w)$. Будем считать, что во всей области течения отлична от нуля только одна составляющая скорости u — проекция на ось x . Ясно, что искомые переменные могут зависеть лишь от y и z и из двух проекций векторного уравнения импульсов следует постоянство давления во всей области течения. Третья проекция уравнения импульсов и уравнения энергии принимают вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \text{Pr} (\kappa - 1) M^2 \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

где κ — отношение теплоемкостей, M — число Маха. Система замыкается уравнением связи между вязкостью и температурой

$$(1.3) \quad \mu = \mu (T)$$

Как можно убедиться непосредственной проверкой, уравнению (1.2) удовлетворяет соотношение

$$(1.4) \quad T = -\text{Pr} (\kappa - 1) M^2 u^2 / 2 + C_1 u + C_2$$

содержащее две произвольные постоянные. В дальнейшем будут рассматриваться лишь такие варианты температурных граничных условий, которые допускают применение интеграла (1.4).

Пользуясь соотношениями (1.3) и (1.4), введем новую функцию

$$(1.5) \quad F(u) = \int_0^u \mu [T(u)] du / \int_0^1 \mu [T(u)] du$$

Решение задачи в целом сводится теперь к определению функции $F(y, z)$, удовлетворяющей получаемому из (1.1) двумерному уравнению Лапласа. Если функция $F(y, z)$ определена, то обращение выражения (1.5) дает зависимость $u(y, z)$, а интеграл (1.4) позволяет найти $T(y, z)$. При этом наличие возможности аналитического обращения функции (1.5) не является существенно необходимым.

2. В качестве первого варианта исследуемой геометрической модели рассмотрим случай, когда граничные поверхности представляют собой полубесконечные по протяженности бесконечно тонкие пластины. Тогда граничные условия принимают вид

$$(2.1) \quad F(0, z \geq 0) = 1, \quad F(1, z \geq 0) = 0, \quad F(y, \infty) = 1 - y$$

Естественный путь решения краевой задачи для уравнения Лапласа при условиях (2.1) связан с конформным преобразованием плоскости комплексного переменного $X = z + iy$. В данном случае, вводя обозначение $\Lambda = \xi + i\eta$, удобно воспользоваться преобразованием

$$(2.2) \quad X = \Lambda - (2\pi)^{-1} e^{-2\pi\Lambda} + C, \quad C = -(2\pi)^{-1} + i/2$$

где постоянная C выбрана из условия расположения начала координат в плоскости X на кромке движущейся поверхности. В результате вся плоскость X преобразуется во внутренность полосы на плоскости Λ , заключенной между прямыми $\eta = -1/2$ и $\eta = 1/2$. Полупрямая $\eta = -1/2, \xi > 0$ служит отображением внутренней поверхности подвижной пластины, а полупрямая $\eta = -1/2, \xi < 0$ соответствует ее внешней поверхности. Совершенно аналогично этому линия $\eta = 1/2$ отображает обе поверхности неподвижной пластины.

Разделение действительной и мнимой частей формулы (2.2) дает

$$(2.3) \quad \begin{aligned} z &= \xi - (2\pi)^{-1} (1 + e^{-2\pi\xi} \cos 2\pi\eta) \\ y &= \eta + 1/2 + (2\pi)^{-1} e^{-2\pi\xi} \sin 2\pi\eta \end{aligned}$$

После перехода к координатам (ξ, η) функция $F(\xi, \eta)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению Лапласа, тогда как граничные условия принимают вид

$$(2.4) \quad F(\xi, -1/2) = 1, \quad F(\xi, 1/2) = 0, \quad F(\infty, \eta) = 1/2 - \eta$$

Единственное решение такой краевой задачи дается выражением

$$(2.5) \quad F = 1/2 - \eta$$

и, следовательно, изолинии $F = \text{const}$ в физической плоскости соответствуют линиям $\eta = \text{const}$, получаемым при помощи формул (2.3). Вид этих изолиний показан на фиг. 2. Видно, что, несмотря на наличие диссипации, вызванной движением пластины возмущения затухают только в направлении оси y , тогда как по отрицательному направлению оси z они уходят во внешнюю область неограниченно далеко.

Интересно отметить, что, как видно из формул (2.3) и расположения изолиний на фиг. 2, течение во внутренней области ($z > 0, 0 < y < 1$) уже при значениях $z = O(1)$ практически неотличимо от имеющего место в классической одномерной задаче при отсутствии боковых кромок.

3. Перейдем ко второму варианту геометрии задачи. В этом варианте верхняя граничная поверхность остается такой же, как и в первом, т. е. представляет собой бесконечно тонкую пластину, занимающую полуплоскость $y = 1, z \geq 0$. Нижняя граница предполагается состоящей из двух непроницаемых полуплоскостей, образующих прямой двугранный угол: $y = 0, z \geq 0$ и $z = 0, y \leq 0$. Хотя такая геометрия и несколько сложнее по сравнению с первым вариантом, она лучше моделирует реальные конфигурации и, в частности, приближенно соответствует течению между соосными цилиндрами, внутренний из которых имеет непроницаемый торец и радиус, значительно превышающий величину зазора h .

Поперечное сечение описанной конфигурации может рассматриваться как многоугольник, внутренность которого конформно отображается на верхнюю полуплоскость при помощи преобразования Шварца — Кристоффеля [2]. Пусть на оси ξ в плоскости Λ началу координат в плоскости X соответствует точка $\xi = -1$, кромке верхней границы — точка $\xi = a$, а области $0 < y < 1, z \rightarrow \infty$ — точка $\xi = 0$. Учитывая величины соответствующих углов, по формуле Шварца — Кристоффеля получим

$$dX/d\Lambda = C_3 (\Lambda - a) \Lambda^{-1} \sqrt{\Lambda + 1}$$

откуда

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{X}{C_3} &= f(\Lambda) + C_4, \quad f(\Lambda) = \frac{2}{3} (\Lambda + 1)^{3/2} - \\ &- 2a \sqrt{\Lambda + 1} - a \ln \frac{\sqrt{\Lambda + 1} - 1}{\sqrt{\Lambda + 1} + 1} \end{aligned}$$

Постоянные C_3 и C_4 определяются из условий геометрического соответствия: $C_3 = (a\pi)^{-1}$, $C_4 = i$, однако при произвольном выборе a кромка верхней граничной поверхности не попадает на ось z . Чтобы это произошло, величина a должна быть положительным корнем трансцендентного уравнения $f(a) = 0$, следовательно, $a \approx 1,5750$.

С учетом выбора постоянных, разделяя действительную и мнимую части формулы (3.1), получим

$$(3.2) \quad z = \frac{(\xi + 1)D - \eta E}{3a\pi} - \frac{D}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\xi^2 + \eta^2}{G + D + 1}$$

$$y = \frac{(\xi + 1)E + \eta D}{3a\pi} - \frac{E}{\pi} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{E}{G - 1} + \frac{1}{2} [\operatorname{sign}(G - 1) + 1]$$

$$D = \sqrt{2(G + \xi + 1)}, \quad E = \sqrt{2(G - \xi - 1)}, \quad G = \sqrt{(\xi + 1)^2 + \eta^2}$$

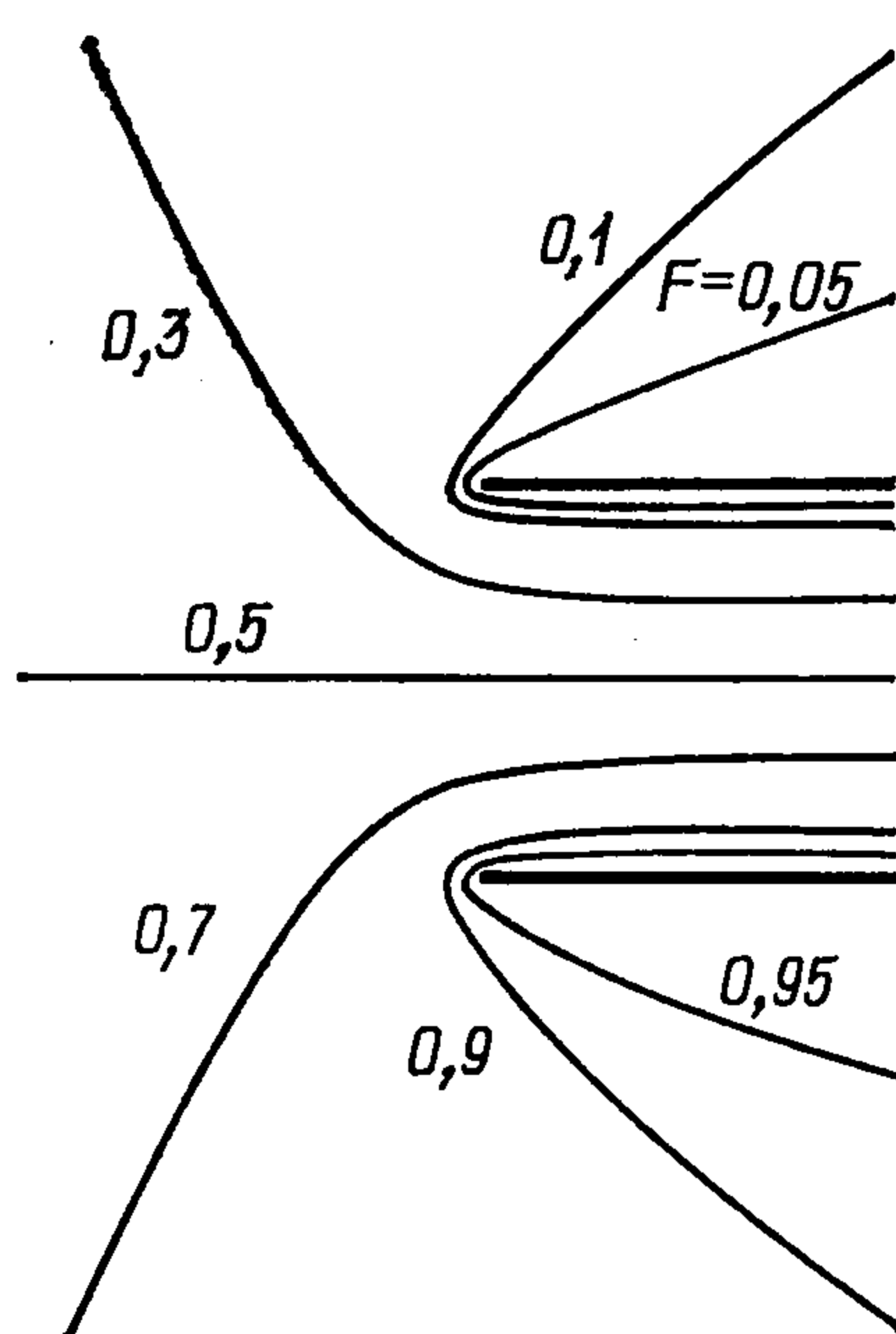
Теперь остается определить гармоническую функцию $F(\xi, \eta)$ в верхней полуплоскости при граничных условиях

$$F(\xi < 0, 0) = 1, \quad F(\xi > 0, 0) = 0$$

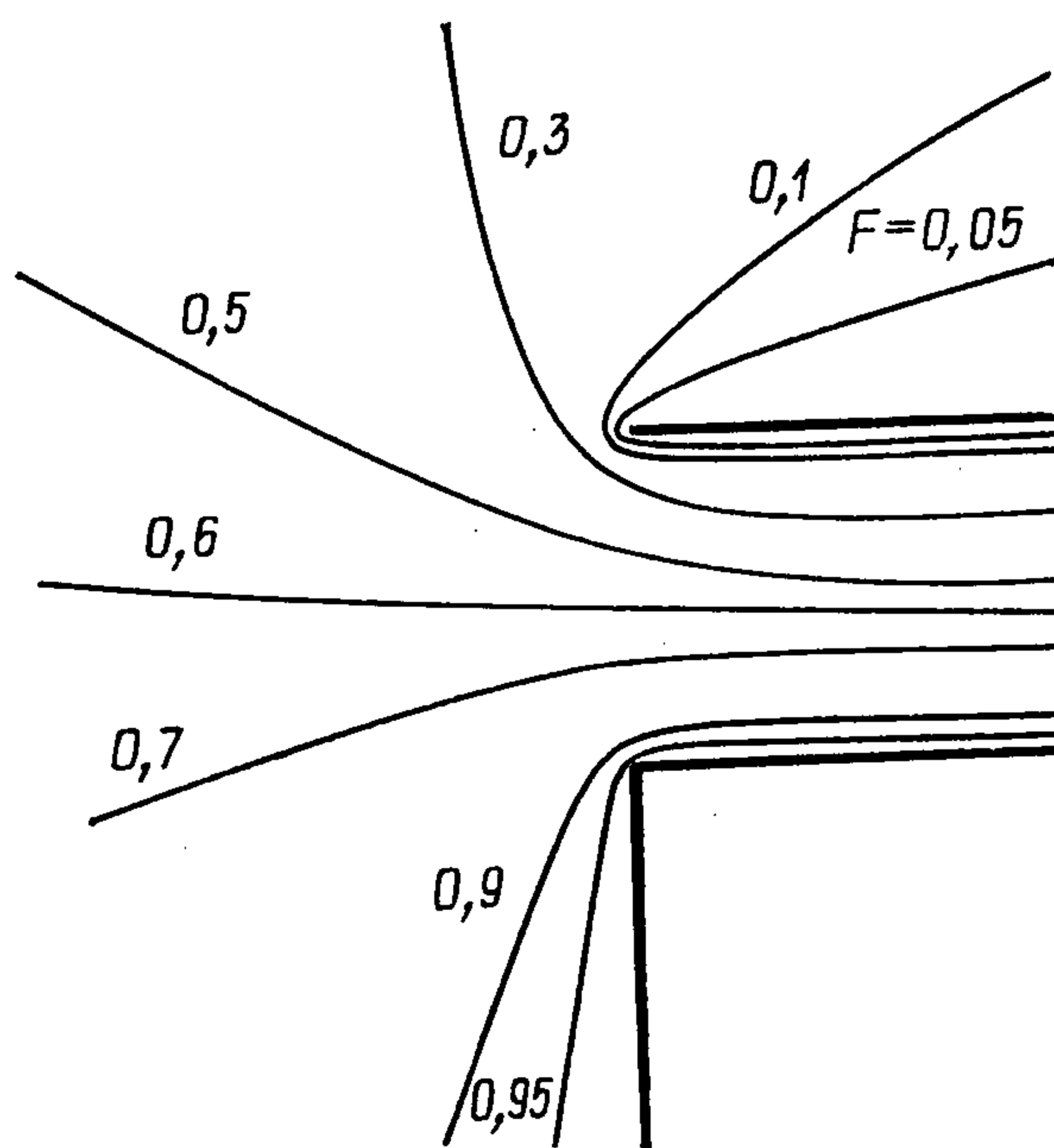
Используя интеграл Фурье, решение этой задачи можно получить в замкнутой форме

$$(3.3) \quad F = 1/2 - \pi^{-1} \operatorname{arctg} (\xi/\eta)$$

В совокупности с формулами (3.2) выражение (3.3) дает параметрическое представление зависимости $F(y, z)$. Соответствующие изолинии пред-



Фиг. 2



Фиг. 3

ставлены на фиг. 3. Их поведение качественно подобно поведению изолиний первого варианта (фиг. 2), хотя во внешней области имеются и заметные отличия, связанные с несимметричной геометрией.

Проведенный здесь анализ в принципе может быть распространен и на случай, когда граничные поверхности имеют конечную протяженность в направлении оси z . В литературе по конформным преобразованиям (например, [3, 4]) указаны возможные варианты преобразования конфигурации с такими границами в относительно простую область, например верхнюю полуплоскость. Соответствующие решения уравнения (1.6), естественно, зависят от добавочного параметра $\lambda = L/h$ (L — характерный размер конфигурации в направлении оси z) и могут стать источником принципиально новой информации лишь при условии $\lambda \ll 0$ (1).

Подчеркнем, что выше построены точные решения уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости при минимальном числе ограничений. Обладая конкретной информацией о тепловых граничных условиях, зако-

не связи вязкости с температурой, отношении теплоемкостей, числах Прандтля и Маха, можно рассчитать требуемые характеристики трения или теплопередачи для рассмотренных вариантов вязкого и теплопроводного газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липман Г. В., Рошко А.* Элементы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 518 с.
2. *Лаурентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
4. *Kober H.* Dictionary of conformal representation. N. Y.: Dover, 1952. 208 p.

Москва

Поступила в редакцию
16.1.1984