Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 1, 1985

УДК 531.35

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Орехов В. И.

Рассматривается метод качественного исследования натуральных систем, допускающих квадратичные по скоростям интегралы, основанный на описании поверхностей уровня интегралов в фазовом пространстве. Вводится понятие нормализуемого квадратичного интеграла и устанавливается связь между его наличием и разделением позиционных переменных. На задачи с квадратичными интегралами распространяется метод топологического анализа, предложенный [1] для систем с линейными интегралами. Описываются поверхности уровня интегралов и их бифуркации, области возможности движения при заданных значениях интегралов. В качестве приложения рассматривается движение твердого тела в потенциальном поле [2].

1. Квадратичные интегралы. Нормализуемость. Все объекты предполагаются гладкими. Пусть M — n-мерное конфигурационное многообразие с метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$, x — его точка, TM — касательное расслоение, T_xM — его слой над x. Для послойного линейного оператора $\Gamma : TM \to TM$ символ Γ_x означает его сужение на T_xM. Векторное поле на M обозначим тем же знаком, что и его произвольный вектор; различие ясно из контекста. Символ вида $\mathbf{v}_x$ означает отдельный элемент T_xM или вектор поля $\mathbf{v}$, приложенный в точке x.

Пусть ∇ — оператор ковариантного дифференцирования, функция V на M — потенциал. Тогда траектории системы описываются уравнением Ньютона

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = -\operatorname{grad} V$$

где $\mathbf{v}_x$ — вектор скорости в точке $x \in M$, и существует интеграл энергии

$$H(\mathbf{v}_x) = {}^1/_2\,|\mathbf{v}_x|^2 + V(x)$$

Рассмотрим квадратичную по скоростям функцию G: $TM \to R$

$$G(\mathbf{v}_x) = {}^1/_2\,\langle\Gamma\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_x\rangle + W(x) \tag{1.1}$$

где $\Gamma : TM \to TM$ — симметричный послойный линейный оператор, W — функция на M.

Необходимое и достаточное условие того, что G — первый интеграл, выражается уравнениями [3]

$$\langle\nabla_{\mathbf{v}}\Gamma\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle\nabla_{\mathbf{u}}\Gamma\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle + \langle\nabla_{\mathbf{w}}\Gamma\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0, \qquad \Gamma \operatorname{grad} V = \operatorname{grad} W \tag{1.2}$$

Можно показать, что отсутствие в (1.1) линейного по скоростям слагаемого не уменьшает общности.

Определение. Нормальными координатами квадратичного интеграла (1.1) назовем такие координаты на M, базисные векторы которых в каждой точке являются собственными векторами оператора Γ_x: $T_xM \to T_xM$. Интеграл (1.1) назовем нормализуемым, если для него существуют нормальные координаты, и ненормализуемым в противном случае.

Существование нормализуемого квадратичного интеграла тесно связано с разделением позиционных переменных [1]. Задача допускает нормализуемый квадратичный интеграл с несовпадающими собственными значениями квадратичной части тогда и только тогда, когда его нормальные координаты являются переменными Штеккеля; благодаря разделению этих переменных в уравнении Гамильтона — Якоби задача в этом случае полностью интегрируется [4]. Если же существует ненормализуемый квадратичный интеграл и система невырождена, то разделение позиционных переменных невозможно.

Найдем условия нормализуемости интеграла (1.1). Над каждой точкой $x \in M$ оператор Γ_x имеет n различных действительных собственных направлений. Пусть $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ — такие гладкие векторные поля, что над точками общего положения векторы $\mathbf{u}_{ix}$ образуют базис пространства T_xM, состоящий из собственных векторов Γ_x. Пусть

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}{}^k \mathbf{u}_k, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

Интеграл будет нормализуемым, если найдутся такие функции $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ на M, что поля $\vartheta_i \mathbf{u}_i$ станут базисными для каких-то координат, т. е. будут попарно коммутировать:

$$0 = [\vartheta_i \mathbf{u}_i, \vartheta_j \mathbf{u}_j] = \vartheta_i \mathbf{u}_i(\vartheta_j) - \vartheta_j \mathbf{u}_j(\vartheta_i) + \vartheta_i \vartheta_j [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j]$$

что эквивалентно соотношениям

(1.3) $\qquad c_{ij}{}^k = 0, \quad i, j \neq k$

(1.4) $\qquad \mathbf{u}_i (\ln \vartheta_j) = c_{ji}{}^i, \quad i \neq j$

Из (1.4) для каждого j получается система $(n - 1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно $\ln \vartheta_j$. Условия ее полной интегрируемости ввиду (1.3) имеют вид

$$\mathbf{u}_i (c_{kj}{}^k) - \mathbf{u}_j (c_{ki}{}^k) = c_{ij}{}^i c_{ki}{}^k + c_{ji}{}^j c_{kj}{}^k$$

Эти равенства вместе с (1.3) и выражают условие нормализуемости.

Отметим, что в системе с двумя степенями свободы любой квадратичный интеграл нормализуем. Действительно, при $n = 2$ условие (1.3) отпадает, а из (1.4) получаются два уравнения, которые интегрируются независимо одно от другого.

2. Уровни квадратичных интегралов. Характеристические функции. Рассмотрим интеграл (1.1). Пусть $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ — введенные в п. 1 базисные векторные поля, состоящие из собственных векторов оператора Γ, а $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ — соответствующие им собственные значения. Примем, что $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$ всюду на M. Ввиду ортогональности полей $\mathbf{u}_i$ из (1.2) следует

(2.1) $$\lambda_i \mathbf{u}_i (V) = \mathbf{u}_i (W), \quad \mathbf{u}_i (\lambda_i) = 0$$
$$|\mathbf{u}_i|^2 \mathbf{u}_j (\lambda_i) = (\lambda_i - \lambda_j)(\mathbf{u}_j (|\mathbf{u}_i|^2) + 2\langle [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j], \mathbf{u}_i \rangle)$$
$$i \neq j$$

Построим интегральное отображение $I = G \times H : TM \to R^2$, уровни которого — интегральные множества

$$I_{gh} = I^{-1}(g, h) = \{\mathbf{v}_x \in TM : G(\mathbf{v}_x) = g, H(\mathbf{v}_x) = h\}$$

Для регулярных значений I, которые являются точками общего положения на плоскости $R^2 = \{(g, h)\}$, множества I_{gh} — гладкие многообра-

---

[1] *Орехов В. И.* О разделении переменных в натуральных системах с квадратичными интегралами. М., 1979.— 15с. Деп. в ВИНИТИ 29.02.79; № 720.

зия, сохраняющие свой тип при малом изменении g, h. Критические значения I образуют на плоскости $\{(g, h)\}$ бифуркационные кривые; при переходе через них значений интегралов многообразия I_{gh} перестраиваются.

В описании структуры интегральных многообразий и их бифуркаций ключевую роль играют n функций позиционных переменных, которые будут называться характеристическими. Это функции

$$\Phi_i = \lambda_i (h - V) + W - g \tag{2.2}$$

параметрически зависящие от постоянных g, h. Характеристические функции, соответствующие фиксированным значениям этих постоянных, обозначим $\Phi_i|_{gh}$. Вследствие (2.1) $\mathbf{u}_i (\Phi_i) = 0$, т. е. поверхности уровня функций $\Phi_i|_{gh}$ инвариантны относительно поля $\mathbf{u}_i$, а их критические точки вырождены.

Значение характеристических функций для топологического анализа определяет следующая

Теорема. Критические точки $\mathbf{v}_x \in TM$ интегрального отображения определяются одним из n условий $(i = 1, \ldots, n)$

$$\mathbf{v}_x \| \mathbf{u}_{ix}, \quad d\Phi_i|_{gh} = 0, \quad g = G(\mathbf{v}_x), \quad h = H(\mathbf{v}_x)$$

Доказательство. В критической точке $\mathbf{v}_x$ пропорциональны дифференциалы dG, $dH : T_\mathbf{v}TM \to R$. В каждом касательном пространстве $T_\mathbf{v}TM$ выделим вертикальное подпространство $T_\mathbf{v}T_xM$. Пропорциональность dG и dH на $T_\mathbf{v}T_xM$ означает пропорциональность частных дифференциалов квадратичных форм $\langle\Gamma\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_x\rangle$ и $|\mathbf{v}_x|^2$ по скоростным переменным, что дает $\mathbf{v}_x \| \mathbf{u}_{ix}$; коэффициент пропорциональности равен $\lambda_i(x)$.

Таким образом, критические точки $\mathbf{v}_x$ содержатся в одном из n расслоений над M с одномерным слоем, порожденным $\mathbf{u}_i$. Из этих расслоений критические точки выделяются условием пропорциональности dG и dH с тем же коэффициентом на любом подпространстве пространства $T_\mathbf{v}TM$, трансверсальном вертикальному $T_\mathbf{v}T_xM$. Такое подпространство можно рассматривать как касательное пространство к множеству $\{\mathbf{v}_x = \vartheta\mathbf{u}_{ix}\}$, где $\vartheta(x)$ — какая-то функция на M. Следовательно, для критических точек

$$dG(\vartheta\mathbf{u}_{ix}) = \lambda_i(x)\, dH(\vartheta\mathbf{u}_{ix}) \tag{2.3}$$

Векторы $\vartheta\mathbf{u}_{ix}$ — собственные для квадратичной части интеграла G, поэтому

$$G(\vartheta\mathbf{u}_{ix}) - W = \lambda_i(x)(H(\vartheta\mathbf{u}_{ix}) - V)$$

После дифференцирования этого тождества видно, что условие (2.3), если учесть равенство $H(\vartheta\mathbf{u}_{ix}) = h$, эквивалентно условию

$$0 = d\lambda_i(h - V) + \lambda_i d(h - V) + d(W - g) = d\Phi_i|_{gh}$$

Проекцию множества I_{gh} на конфигурационное многообразие обозначим M_{gh} и назовем областью возможности движения. Это есть множество точек, через которые могут проходить траектории движения при фиксированных значениях интегралов $G = g$, $H = h$. Сечение I_{gh} касательным пространством T_xM представляет собой множество векторов скорости возможных движений, проходящих через точку $x \in M$.

Каждый слой $T_xM \cap I_{gh}$ образован пересечением поверхностей второго порядка в T_xM

$$T_xM \cap I_{gh} = \{\mathbf{v}_x : \langle\Gamma\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_x\rangle = 2(g - W)\} \cap \{\mathbf{v}_x : |\mathbf{v}_x|^2 = 2(h - V)\}$$

Это пересечение непусто при условии

$$\lambda_n \mid \mathbf{v}_x|^2 \leqslant \langle \Gamma \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_x \rangle \leqslant \lambda_1 \mid \mathbf{v}_x \mid^2$$

т. е. при $\lambda_n (h - V) \leqslant (g - W) \leqslant \lambda_1 (h - V)$, что, по определению характеристической функции, эквивалентно условию $\Phi_n |_{gh} \leqslant 0 \leqslant \Phi_1 |_{gh}$.

Таким образом, области возможности движения

$$M_{gh} = \{\Phi_1 |_{gh} \geqslant 0\} \cap \{\Phi_n |_{gh} \leqslant 0\}$$

Ребра этого криволинейного многогранника совпадают с пересечением поверхностей уровня $\{V = h\}$ и $\{W = g\}$, через него же проходят все поверхности $\{\Phi_i |_{gh} = 0\}$. Действительно, ввиду $\lambda_1 \neq \lambda_n$ равенства $\Phi_1 = \Phi_n = 0$ эквивалентны условиям $V - h = W - g = 0$, откуда $\Phi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

В критических точках Φ_1 и Φ_n, как следует из (2.3), происходят перестройки областей M_{gh}. Бифуркации интегральных уровней I_{gh} над критическими точками остальных характеристических функций проявляются в перестройке граней M_{gh}: если $d\Phi_i = 0$ и $V = h$, то из (2.2) следует $-\lambda_i dV + dW = 0$, т. е. dV и dW пропорциональны.

Сечения $T_x M \cap I_{gh}$ сохраняют свой топологический тип при условии $\lambda_{j+1} \mid \mathbf{v}_x \mid^2 < \langle \Gamma \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_x \rangle < \lambda_j \mid \mathbf{v}_x \mid^2$, эквивалентном $\Phi_{j+1} |_{gh} < 0 < \Phi_j |_{gh}$, $j = 1, \ldots, n-1$, и перестраиваются при $\lambda_i \mid \mathbf{v}_x \mid^2 = \langle \Gamma \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_x \rangle$, т. е. над точками $\{\Phi_i |_{gh} = 0\}$. В частности, над гранями $\{\Phi_1 = 0\}$ и $\{\Phi_n = 0\}$ сечение вырождается в пару векторов $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u}_{1, n}$, касательных к граням.

Множества критических точек характеристических функций Φ_i, будучи инвариантными относительно полей $\mathbf{u}_i$, несут на себе траектории задачи, касательные к этим полям.

Теорема. Интегральная кривая поля $\mathbf{u}_i$ является траекторией системы, если и только если она проходит через критические точки функции Φ_i.

Заметим, что такая траектория лежит на поверхности $\{\Phi_i = 0\}$.

Следствие. Если множество критических точек нулевого уровня функции Φ_i имеет одномерную компоненту, то она является траекторией стационарного движения со скоростью

$$\mathbf{v} = \pm \sqrt{2(h - V)} \mid \mathbf{u}_i \mid^{-1} \mathbf{u}_i$$

периодического, предельного или либрационного в зависимости от характера ее пересечения с поверхностью Хилла $\{V = h\}$.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathbf{v}_x = \vartheta \mathbf{u}_{ix}$, $\vartheta^2 = 2(h - V) \mid \mathbf{u}_i \mid^{-2}$. По свойствам ковариантного дифференцирования с учетом ортогональности $\mathbf{u}_i$, соотношений (2.1) и $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{u}$ получим

$$\langle \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} + \operatorname{grad} V, \mathbf{u}_i \rangle = \vartheta^{-1} \mathbf{v}(h) = 0$$

$$\langle \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} + \operatorname{grad} V, \mathbf{u}_j \rangle = (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \mathbf{u}_j (\Phi_i), \quad i \neq j$$

т. е. $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = -\operatorname{grad} V$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}_j (\Phi_i) = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

3. Пример: твердое тело в поле Горячева. Рассмотрим движение твердого тела в поле с потенциалом [2]

(3.1) $$V = -A\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - B\varphi(\alpha', \beta', \gamma') - C\varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'')$$

где $A > B > C$ — главные моменты инерции, $\alpha, \ldots, \gamma''$ — направляющие косинусы соответствующих главных осей инерции относительно неподвижного репера $\mathbf{e}_{1,2,3}$, φ — квадратичная форма с постоянными коэффициентами. Такой потенциал, например, аппроксимирует гравитационное действие произвольно распределенной массы на тело, закрепленное в центре тяжести.

В этом случае конфигурационное многообразие $M \simeq SO(3)$, $n = 3$; элементы TM можно отождествить с векторами угловой скорости в трехмерном пространстве.

Пусть неподвижный репер совмещен с главными осями формы φ, тогда

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_3\gamma^2, \ldots$$

Если все собственные значения a_i совпадают, то $V = \mathrm{const}$; при совпадении двух из них получается потенциал де Бруна.

Остановимся на случае различных собственных значений, $a_1 > a_2 > a_3$.

При добавлении ко всем a_i одинакового слагаемого потенциал (3.1) ввиду $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ и т. д. изменится на постоянную. Для дальнейшего удобно считать, что $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, тогда

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \varphi(\alpha', \beta', \gamma') + \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'') = 0 \tag{3.2}$$

Согласно [2], наряду с интегралом энергии H задача допускает другой квадратичный интеграл G; в стандартных обозначениях

$$H = {}^1/_2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + V, \quad G = {}^1/_2 (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) + W$$

$$W = BC\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + CA\varphi(\alpha', \beta', \gamma') + AB\varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'')$$

Собственные значения квадратичной части G равны $\lambda_A = A$, $\lambda_B = B$, $\lambda_C = C$, в качестве собственных векторов возьмем $\mathbf{u}_A$, $\mathbf{u}_B$, $\mathbf{u}_C$ — единичные векторы соответствующих осей инерции, которые определяют вращение с единичной скоростью вокруг этих осей. Поскольку $[\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B] = \mathbf{u}_C$ и т. д., условия нормализуемости (1.3) не выполнены, интеграл G — ненормализуемый.

Характеристические функции с учетом условия (3.2) запишем в виде

$$\Phi_A = (A - B)(A - C)\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + Ah - g$$

$$(ABC,\ \alpha\alpha'\alpha'',\ \beta\beta'\beta'',\ \gamma\gamma'\gamma'')$$

их критические точки совпадают с критическими точками $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, $\varphi(\alpha', \beta', \gamma')$, $\varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ соответственно. От постоянных g, h удобно перейти к параметрам l_1, l_2

$$l_1 = \frac{g - Ah}{(A - B)(A - C)}, \qquad l_2 = \frac{g - Ch}{(C - A)(C - B)}, \qquad \frac{g - Bh}{(B - C)(B - A)} = -(l_1 + l_2)$$

Тогда условия $\Phi_A \geqslant 0$, $\Phi_C \leqslant 0$, $\Phi_B = 0$ эквивалентны соотношениям $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \geqslant l_1$, $\varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'') \leqslant l_2$, $-\varphi(\alpha', \beta', \gamma') = (l_1 + l_2)$.

Области возможности движения

$$M_{gh} = \{\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \geqslant l_1\} \cap \{\varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'') \leqslant l_2\}$$

Перестройки эпюр возможных скоростей происходят над точками $\{\varphi(\alpha', \beta', \gamma') = -(l_1 + l_2)\}$.

Бифуркации интегральных уровней I_{gh} происходят при переходе l_1, l_2, $-(l_1 + l_2)$ через критические значения φ, т. е. при $l_1 = a_i$, $l_2 = a_i$, $l_1 + l_2 = -a_i$, $i = 1, 2, 3$. Критическим точкам характеристических функций, в которых происходят бифуркации, соответствуют такие положения твердого тела, когда $\mathbf{u}_{A,B,C}$ коллинеарны одному из векторов неподвижного репера.

Вращения тела вокруг главной оси инерции, направленной коллинеарно вектору неподвижного репера $\mathbf{e}_i$, представляют собой описанные в п. 2 стационарные движения. Рассмотрим движение, при котором $\mathbf{u}_A \parallel \mathbf{e}_1$; тогда $l_1 = a_1$. При малых изменениях начальных условий величина $(a_1 - l_1)$ мала, поэтому M_{gh} будет малой цилиндрической окрестностью траектории стационарного движения. Следовательно, рассматриваемое движение устойчиво по части переменных. Точно так же устойчивым по части переменных будет стационарное движение при $\mathbf{u}_C \parallel \mathbf{e}_3$.

Пусть собственные значения формы φ связаны условием $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$. В этом случае из соглашения $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ следует $a_2 = 0$, $a_1 = -a_3 = a > 0$

$$V = -a\,[A(\alpha^2 - \gamma^2) + B(\alpha'^2 - \gamma'^2) + C(\alpha''^2 - \gamma''^2)]$$

$$W = a\,[BC(\alpha^2 - \gamma^2) + CA(\alpha'^2 - \gamma'^2) + AB(\alpha''^2 - \gamma''^2)]$$

Согласно [2], задача с потенциалом V допускает наряду с интегралами H и G третий квадратичный интеграл

$$F = {}^1/_2 [(A\alpha p + B\alpha' q + C\alpha'' r)^2 - (A\gamma p + B\gamma' q + C\gamma'' r)^2] + U$$

$$U = a\,[BC\beta^2 + CA\beta'^2 + AB\beta''^2)$$

Введем параметры $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, где e_i — векторы неподвижного репера. Шесть переменных $g_{ij} = g_{ji}$ можно рассматривать как избыточные локальные координаты на $SO(3)$. В этих переменных $V = a(g_{11} - g_{33})$, $U = a(g_{11}g_{33} - g_{13}^2)$; собственные значения квадратичной части интеграла F

$$\lambda_{1,3} = {}^1/_2 \, (g_{11} - g_{33} \pm \sqrt{(g_{11} + g_{33})^2 - 4g_{13}^2}, \quad \lambda_2 = 0$$

Величины λ_1 и λ_3 функционально независимы и принимают значения в пределах $C \leqslant \lambda_1 \leqslant A$, $-A \leqslant \lambda_3 \leqslant -C$.

Собственные векторы $\mathbf{w}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ имеют в базисе $\mathbf{u}_{A, B, C}$ координаты

$$\left(\frac{x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma}{A}, \frac{x_i\alpha' + y_i\beta' + z_i\gamma'}{B}, \frac{x_i\alpha'' + y_i\beta'' + z_i\gamma''}{C} \right)$$

где

$$x_{1,3} = \lambda_{1,3} (\sqrt{g_+} \pm \sqrt{g_-}), \quad y_{1,3} = \lambda_{1,3} (\sqrt{g_+} \mp \sqrt{g_-})$$
$$z_{1,3} = (g_{12} \mp g_{23}) \sqrt{g_+} + (g_{23} \pm g_{12}) \sqrt{g_-}$$
$$g_{\pm} = {}^1/_2 \, (g_{11} + g_{33}) \pm g_{13}, \quad x_2 = y_2 = 0, \quad z_2 = 1$$

Поскольку $V = a(\lambda_1 + \lambda_3)$, $U = -a\lambda_1\lambda_3$, характеристические функции таковы: $\Phi_{1,3} = a\lambda_{1,3}^2 + h\lambda_{1,3} - f$, $\Phi_2 = U - f$.

Области возможности движения $M_{fh} = \{\Phi_1 \geqslant 0\} \cap \{\Phi_3 \leqslant 0\}$ ограничены поверхностями $\{\lambda_{1,3} = \mathrm{const}\}$ и определяются расположением корней квадратного трехчлена $a\lambda^2 + h\lambda - f$ относительно интервалов $[C, A]$ и $[-A, -C]$.

Критические точки характеристических функций даются равенствами

$$0 = d\Phi_{1,3} = (2a\lambda_{1,3} + h) \, d\lambda_{1,3}, \quad 0 = d\Phi_2 = dU$$

Условия $dU = 0$, $d\lambda_{1,3} = 0$ дают ранее найденные точки $\mathbf{u}_{A, B, C} \parallel \mathbf{e}_{1,2,3}$, условия $2a\lambda_{1,3} + h = 0$ определяют новые множества критических точек — поверхности $\{\lambda_{1,3} = \mathrm{const}\}$. Критическому нулевому уровню характеристической функции $\Phi_1 |_{fh}$ соответствует постоянное значение λ_1, равное кратному корню трехчлена $a\lambda^2 + h\lambda -$ на интервале $[C, A]$; при этом трехчлен положителен на $[-A, -C]$, т. е. $\Phi_3 |_{fh} > 0$ всюду, и следовательно, M_{fh} пусто. На критическом нулевом уровне $\{\lambda_3 = \mathrm{const}\}$ характеристической функции $\Phi_3 |_{fh}$ аналогично получим $\Phi_1 |_{fh} > 0$, т. е. $M_{fh} = \{\lambda_3 = \mathrm{const}\}$.

Согласно второй теореме из п. 2, такая поверхность M_{fh} состоит из траекторий задачи, на которых скорость $\mathbf{v} = \omega \mathbf{w}_3$, $\omega = \pm \sqrt{2(h - V)} \, |\mathbf{w}_3|^{-1}$.

Воспользовавшись интегралом G, получим функцию позиционных переменных $G(\omega \mathbf{w}_3)$, функционально независимую от λ_3. Поскольку на рассматриваемых траекториях $G(\omega \mathbf{w}_3) = \mathrm{const}$, $\lambda_3 = \mathrm{const}$, они являются замкнутыми кривыми, а движения по ним — периодическими.

Автор благодарит В. Г. Демина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smale S.* Topology and mechanics.— Invent. math., 1970, v. 10, No. 4, p. 306—331 v. 11, No. 1, p. 45—64.
2. *Горячев Д. Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910. 127 с.
3. *Татаринов Я. В.* Геометрический формализм классической динамики. Классические интегралы и приведение.— Вестн. МГУ. Матем., механ., 1978, вып. 3, с. 109—118.
4. *Шарлье К.* Небесная механика. М.: Наука, 1967. 627 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
27.XII.1983