Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН

Дроздов А. Д., Колмановский В. Б.

Предлагается метод исследования и установлены условия устойчивости вязкоупругих неоднородно-стареющих пластин произвольной формы с общим ядром ползучести. Найден вид условий устойчивости в зависимости от поверхностных усилий. Численно рассмотрена задача об устойчивости на конечном интервале времени. Работа примыкает к исследованиям [1—3]. Библиографию работ по устойчивости однородных вязкоупругих систем см., например, в [1—5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим вязкоупругую неоднородно-стареющую пластину постоянной толщины h. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, ось Ox_3 которой перпендикулярна срединной плоскости, а плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью в недеформированном состоянии. Пластина представляет множество точек $\{x = (x_1, x_2) \in \in D \times (-h/2 \leqslant x_3 \leqslant h/2)\}$, где D — область на плоскости Ox_1x_2. Область D имеет кусочно-гладкую границу $\Gamma = \partial D$.

В момент времени $t = 0$ к недеформированной пластине приложена стационарная внешняя нагрузка, состоящая из распределенной поперечной нагрузки интенсивности $-q(x)$, приложенной к грани $x_3 = h/2$, и поверхностных усилий $F(x) = (F_1(x), F_2(x), 0)$, приложенных к части кромки пластины $\Gamma_1 \times [-h/2, h/2]$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Возраст элемента пластины x относительно элемента пластины $x = 0$ есть $\rho(x)$, где функция $\rho(x)$ кусочно непрерывна и ограничена. Вектор перемещений в плоскости пластины обозначим через (u_1^0, u_2^0), а через u — перемещение (прогиб) точек срединной плоскости в направлении оси Ox_3. Значения вектора (u_1^0, u_2^0) для точек срединной плоскости обозначим (u_1, u_2). На части кромки пластины $\Gamma_2 \times [-h/2, h/2]$, $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ отсутствуют перемещения в плоскости пластины

$$u_i^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad i = 1, 2 \tag{1.1}$$

По отношению к прогибу кромка пластины защемлена, т. е. при выполнении гипотез Кирхгофа

$$u(x) = 0, \quad u_{,n}(x) = 0, \quad x \in \Gamma \tag{1.2}$$

Здесь n — единичный вектор внешней нормали к кривой Γ в плоскости пластины и обозначено $f_{,i} = \partial f/\partial x_i$.

Определение. Пластина называется устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|q(x)| < \delta$ вытекает оценка $|u(t, x)| < \varepsilon$, $t \geqslant 0$, $x \in D$.

2. Определяющие уравнения. Обозначим через $\sigma^\circ = (\sigma_{ij}^\circ)$, $\varepsilon^\circ = (\varepsilon_{ij}^\circ)$, $i, j = 1, 2, 3$ тензоры напряжения и деформации в момент времени $t \geqslant 0$. Согласно модели неоднородно-стареющих тел, компоненты тензоров σ° и ε° связаны соотношениями

$$\varepsilon_{ij}^\circ = \frac{1}{E}(I + K)[(1 + \nu)\sigma_{ij}^\circ - \nu\delta_{ij}\sigma_{ll}^\circ] \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}^\circ = \frac{E}{1+\nu}(I - R)\left[\varepsilon_{ij}^\circ - \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{ll}^\circ\right]$$

Здесь E — постоянный модуль упругомгновенной деформации, ν — постоянный коэффициент Пуассона, по одинаковым индексам производится суммирование, δ_{ij} — символ Кронекера, I — единичный оператор, K — оператор ползучести, R — оператор релаксации ($k(t, \tau)$ — ядро ползучести, $r(t, \tau)$ — ядро релаксации)

$$K\sigma_{ij}^\circ = \int_0^t k(t + \rho(x), \quad \tau + \rho(x))\, \sigma_{ij}^\circ\, d\tau$$

$$R\varepsilon_{ij}^\circ = \int_0^t r(t + \rho(x), \quad \tau + \rho(x))\, \varepsilon_{ij}^\circ\, d\tau$$

$$I - R = (I + K)^{-1}$$

Предполагается, что функции $k(t, \tau)$, $r(t, \tau)$ слабосингулярные, выполнены гипотезы Кирхгофа [6], удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей, а квадраты поворотов малы по сравнению с удлинениями и сдвигами. Тогда компоненты тензора деформаций ε_{ij}°, $i, j = 1, 2$ имеют вид

$$\varepsilon_{ij}^\circ = \varepsilon_{ij} - x_3 u_{,ij} \tag{2.2}$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензора деформаций в срединной плоскости. Кроме того, предполагается существование такой функции $r_1(t, \tau)$, что для любого $x \in D$

$$0 \leqslant r(t + \rho(x), \ \tau + \rho(x)) \leqslant r_1(t, \tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \tag{2.3}$$

$$|r_1| = \sup_t \int_0^t r_1(t, \tau)\, d\tau < 1 \tag{2.4}$$

При обобщенном плоском напряженном состоянии в уравнениях (2.1) можно пренебречь напряжениями σ_{i3}°, $i = 1, 2, 3$. Отсюда и из (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^\circ &= E(1 - \nu^2)^{-1}(I - R)(\varepsilon_{11}^\circ + \nu\varepsilon_{22}^\circ), \\ \sigma_{12}^\circ &= E(1 + \nu)^{-1}(I - R)\,\varepsilon_{12}^\circ \\ \tau_{22}^\circ &= E(1 - \nu^2)^{-1}(I - R)(\nu\varepsilon_{11}^\circ + \varepsilon_{22}^\circ) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Обозначим через σ_{ij} и M_{ij} усредненные усилия и моменты в пластине, приходящиеся на единицу площади сечения, перпендикулярного срединной плоскости

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^\circ\, dx_3, \qquad M_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^\circ x_3\, dx_3 \tag{2.6}$$

Ясно, что $\varepsilon_{ij}(t, x)$ и $u_i(t, x)$ — усредненные по толщине пластины значения деформаций ε_{ij}° и перемещений u_i°. Усредненные величины являются функциями переменных t и x, явная зависимость от которых иногда либо не указывается, либо указывается лишь от одной из них.

Подставляя выражения (2.2), (2.5) для ε_{ij}°, σ_{ij}° в соотношения (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E(1 - \nu^2)^{-1}(I - R)(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{12} &= E(1 + \nu)^{-1}(I - R)\,\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= E(1 - \nu^2)^{-1}(I - R)(\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= -Eh^2[12(1 - \nu^2)]^{-1}(I - R)(u_{,11} + \nu u_{,22}) \\ M_{12} &= -Eh^2[12(1 + \nu)]^{-1}(I - R)\,u_{,12} \\ M_{22} &= -Eh^2[12(1 - \nu^2)]^{-1}(I - R)(\nu u_{,11} + u_{,22}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Используя [7], запишем уравнения равновесия пластины в изогнутом состоянии в виде

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \tag{2.9}$$

$$M_{11,1} + M_{12,2} - \sigma_{13} = 0, \quad M_{12,1} + M_{22,2} - \sigma_{23} = 0 \tag{2.10}$$

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + q/h + (\sigma_{11}u_{,1})_{,1} + (\sigma_{12}u_{,2})_{,1} + (\sigma_{12}u_{,1})_{,2} + (\sigma_{22}u_{,2})_{,2} = 0$$

Для того чтобы исключить из уравнений (2.10) усилия σ_{13}, σ_{23}, продифференцируем первое уравнение (2.10) по x_1, второе — по x_2 и сложим с третьим уравнением. Подставляя в результат вместо моментов M_{ij} их выражения (2.8), приходим к определяющему уравнению для перемещения $u\ (t,\ x)$

$$\begin{aligned}&[(I-R)(u_{,11}+\nu u_{,22})]_{,11} + 2(1-\nu)[(I-R)u_{,12}]_{,12} + \\ &+ [(I-R)(\nu u_{,11}+u_{,22})]_{,22} = q/\beta + h/\beta\,[(\sigma_{11}u_{,1})_{,1} + \\ &+ (\sigma_{12}u_{,2})_{,1} + (\sigma_{12}u_{,1})_{,2} + (\sigma_{22}u_{,2})_{,2}], \quad \beta = Eh^3/[12(1-\nu^2)]\end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь β — цилиндрическая жесткость пластины, а напряжения σ_{ij} определяются формулами (2.7).

3. Общие условия устойчивости. Выведем условия устойчивости, считая функции σ_{ij} заданными. Оценим перемещения u в зависимости от усилий σ_{ij}, используя обозначения $u_{,l}{}^2 = (u_{,l})^2$.

Из соотношений (1.2) следует

$$u = 0, \quad u_{,1} = 0, \quad u_{,2} = 0, \quad x \in \Gamma \tag{3.1}$$

Умножим уравнение (2.11) на $u\ (t,\ x)$ и проинтегрируем по области D. С учетом формулы Грина ([8], с. 69) и граничных условий (3.1) получим

$$\begin{aligned}&\int_D [u_{,11}(I-R)(u_{,11}+\nu u_{,22}) + 2(1-\nu)u_{,12}(I-R)u_{,12} + \\ &+ u_{,22}(I-R)(\nu u_{,11}+u_{,22})]\,dx = \\ &= \frac{1}{\beta}\int_D qu\,dx - \frac{h}{\beta}\int_D (\sigma_{11}u_{,1}^2 + 2\sigma_{12}u_{,1}u_{,2} + \sigma_{22}u_{,2}^2)\,dx\end{aligned} \tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение функции

$$f_0^2(t) = \int_D (u_{,1}^2 + u_{,2}^2)^2\,dx, \quad f_1^2(t) = \int_D u^2\,dx$$

$$H^2(t) = \int_D (\sigma_{11}{}^2 + 2\sigma_{12}{}^2 + \sigma_{22}{}^2)\,dx$$

Используя формулу Грина и граничные условия (3.1), заключаем, что для любого ν

$$\begin{aligned}f^2(t) &= \int_D (u_{,11}^2 + 2u_{,12}^2 + u_{,22}^2)\,dx = \int_D (u_{,11}+u_{,22})^2\,dx = \\ &= (1-\nu)\int_D (u_{,11}^2 + 2u_{,12}^2 + u_{,22}^2)\,dx + \nu\int_D (u_{,11}+u_{,22})^2\,dx\end{aligned}$$

Представим теперь уравнение (3.2) в виде

$$\begin{aligned}f^2(t) &= \frac{1}{\beta}\int_D qu\,dx + (1-\nu)\int_D (u_{,11}Ru_{,11} + 2u_{,12}Ru_{,12} + \\ &+ u_{,22}Ru_{,22})\,dx + \nu\int_D (u_{,11}+u_{,22})\,R\,(u_{,11}+u_{,22})\,dx - \\ &- \frac{h}{\beta}\int_D (\sigma_{11}u_{,1}^2 + 2\sigma_{12}u_{,1}u_{,2} + \sigma_{22}u_{,2}^2)\,dx = \\ &= I_1 + (1-\nu)I_2 + \nu I_3 + I_4\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ясно, что

$$|I_1| \leqslant \|q\| f_1(t), \quad \|q\|^2 = \frac{1}{\beta^2} \int_D q^2(x)\,dx$$

Далее, используя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$(3.4) \qquad |I_2| \leqslant \int_0^t r_1(t,\tau)\,d\tau \int_D (|u_{,11}(t,x)\,u_{,11}(\tau,x)| + 2\,|u_{,12}(t,x) \times$$

$$\times u_{,12}(\tau,x)| + |u_{,22}(t,x)\,u_{,22}(\tau,x)|)\,dx \leqslant f(t) \int_0^t r_1(t,\tau) f(\tau)\,d\tau$$

Аналогично

$$(3.5) \qquad |I_3| \leqslant f(t) \int_0^t r_1(t,\tau) f(\tau)\,d\tau$$

Подобно (3.4) имеем

$$|I_4| \leqslant \frac{h}{\beta} \int_D (\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2)^{1/2} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2)\,dx \leqslant \frac{h}{\beta} H(t) f_0(t)$$

Отсюда и из (3.3) следует, что

$$(3.6) \qquad f^2(t) \leqslant \|q\| f_1(t) + f(t) \int_0^t r_1(t,\tau) f(\tau)\,d\tau + \frac{h}{\beta} H(t) f_0(t)$$

Обозначим через λ_1 и λ наибольшие положительные числа, при которых для всех функций $u(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих граничным условиям (3.1), справедливы неравенства

$$(3.7) \qquad f_1^2(t) \leqslant \lambda_1^{-2} f^2(t), \quad f_0(t) \leqslant \lambda^{-1} f^2(t)$$

Существование таких λ_1 и λ доказано в п. 5.

В силу (3.7) из оценки (3.6) вытекает неравенство

$$(3.8) \qquad (1 - h\,\|H\|\,\lambda^{-1}\beta^{-1})\,\|f(t)\| \leqslant |r_1|\,\|f(t)\| + \lambda_1^{-1}\,\|q\|$$

$$\|H\| = \sup^{t\geqslant 0} H(t), \quad \|f(t)\| = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} f(\tau)$$

Предположим теперь, что

$$(3.9) \qquad \|H\| < \beta\lambda h^{-1} (1 - |r_1|)$$

На основании (3.8), (3.9) имеем $\|f(t)\| \leqslant c_1 \|q\|$. Здесь и далее $c_i > 0$ — некоторые постоянные. В силу (3.7) и известного результата ([9], с. 84, неравенство (8.4)) имеем $|u(t,x)| \leqslant c_2 \|f(t)\|$.

Таким образом, установлена

Теорема 3.1. Пусть выполнены сформулированные в п. 1 предположения и оценки (2.3), (2.4), (3.9). Тогда пластина устойчива.

Используя метод доказательства теоремы 3.1, подобно [3] можно получить иные условия устойчивости, например справедлива

Теорема 3.2. Предположим, что ядро релаксации r удовлетворяет неравенству (2.3), причем $|r_1| < \infty$. Пусть далее существует такая функция $r_0(t,\tau)$, $|r_0| < 1$, что равномерно по $t \geqslant T$

$$\lim_{T\to\infty} \int_T^t \sup_{x\in D} |r(t+\rho(x), \tau+\rho(x)) - r_0(t,\tau)|\,d\tau = 0$$

Тогда пластина устойчива, если $\|H\| < \beta\lambda h^{-1}(1 - |r_0|)$.

4. Конкретные условия устойчивости.

Общие условия устойчивости, установленные в теоремах 3.1, 3.2, зависят от напряжений в пластине посредством функции H. Наряду с этим представляют интерес условия устойчивости, формулируемые непосредственно в терминах поверхностных усилий F.

Если $\rho(x) \equiv 0$ и $\Gamma_1 = \Gamma$, то усилия для вязкоупругой пластины совпадают с усилиями для соответствующей упругой пластины (т. е. при $R \equiv 0$). Оценим H через F при произвольной функции ρ. Для этого вначале $H(t)$ оценивается через функцию $J(t)$, равную

$$J^2(t) = \int\limits_D (\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2)\, dx$$

Затем $J(t)$ оценивается через F. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 4.1. Если выполнены предположения теоремы 3.1, то пластина устойчива при $\beta_1 < \beta\lambda(1 - |r_1|) h^{-1}$, где $\beta_1 = (1 + \nu)(1 + |r_1|)[(1 - \nu)\lambda_2(1 - |r_1|)]^{-1} |F|$. Если же выполнены предположения теоремы 3.2, то пластина устойчива при $\beta_1 < \beta\lambda(1 - |r_0|) h^{-1}$.

Доказательство.

Для получения первой оценки подставим в $H(t)$ выражения (2.7) компонент тензора напряжений. Получим

$$H^2 t = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left[(1 - \nu) \int\limits_D (\sigma_{11}(I - R)\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}(I - R)\varepsilon_{12} + \right. \tag{4.1}$$
$$\left. + \sigma_{22}(I - R)\varepsilon_{22})\, dx + \nu \int\limits_D (\sigma_{11} + \sigma_{22})(I - R)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, dx \right]$$

Аналогично имеем

$$H_1^2(t) = \int\limits_D (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 dx = \int\limits_D (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \left[\frac{E}{1 - \nu^2}(I - R)(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) + \right.$$
$$\left. + \frac{E}{1 - \nu^2}(I - R)(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) \right] dx = \frac{E}{(1 - \nu)} \int\limits_D (\sigma_{11} + \sigma_{22})(I - R)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, dx$$

Отсюда и из (4.1) следует, что

$$H^2(t) - \frac{\nu}{1 + \nu} H_1^2(t) = \frac{E}{1 + \nu} Q \tag{4.2}$$
$$Q = \int\limits_D [\sigma_{11}(I - R)\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}(I - R)\varepsilon_{12} + \sigma_{22}(I - R)\varepsilon_{22}]\, dx$$

Левая часть (4.2) оценивается снизу выражением

$$H^2 - \frac{\nu}{1 + \nu} H_1^2 \geqslant \frac{1 - \nu}{1 + \nu} H^2 \tag{4.3}$$

Величина Q в (4.2) оценивается следующим образом:

$$|Q| \leqslant \left| \int\limits_D (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22})\, dx \right| + \tag{4.4}$$
$$+ \left| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D r(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) [\sigma_{11}(t)\varepsilon_{11}(\tau) + 2\sigma_{12}(t)\varepsilon_{12}(\tau) + \right.$$
$$\left. + \sigma_{22}(t)\varepsilon_{22}(\tau)]\, dx \right| \leqslant H(t) J(t) + H(t) \int\limits_0^t r_1(t, \tau) J(\tau)\, d\tau \leqslant (1 + |r_1|) H(t) \|J(t)\|,$$
$$\|J(t)\| = \sup\nolimits_{0 \leqslant \tau \leqslant t} J(\tau)$$

Из (4.2)—(4.4) вытекает нужная оценка

$$(1 - \nu) H(t) \leqslant E(1 + |r_1|) \|J(t)\| \tag{4.5}$$

Обратимся теперь к оценке $\|J(t)\|$ через F. В соответствии с условиями нагружения на Γ_1 справедливы граничные условия

$$\sigma_{11}\cos(n, x_1) + \sigma_{12}\cos(n, x_2) = F_1 \tag{4.6}$$
$$\sigma_{12}\cos(n, x_1) + \sigma_{22}\cos(n, x_2) = F_2$$

Умножим первое из уравнений (2.9) на u_1, второе — на u_2, сложим и проинтегрируем по области D. С учетом граничных условий (1.1), (4.6) и формулы Грина получим

$$\int_D (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22})\,dx = \alpha_1, \quad \alpha_1 = \int_{\Gamma_1} (F_1u_1 + F_2u_2)\,ds \tag{4.7}$$

где ds — элемент дуги Γ.

Заменяя в (4.7) компоненты тензора напряжений по формулам (2.7), получим

$$E(1-\nu^2)^{-1}\int_D [\varepsilon_{11}(I-R)(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}) + 2(1-\nu)\varepsilon_{12}(I-R)\varepsilon_{12} +$$

$$+\varepsilon_{22}(I-R)(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11})]\,dx = \alpha_1$$

Отсюда следует, что справедливо представление

$$J_0^2 = (1-\nu)J^2 + \nu J_1^2, \quad J_0^2(t) = (1-\nu^2)E^{-1}\alpha_1 + (1-\nu)\alpha_2 + \nu\alpha_3 \tag{4.8}$$

Здесь положено

$$J_1^2(t) = \int_D (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2)\,dx$$

$$\alpha_2 = \int_D (\varepsilon_{11}R\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}R\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}R\varepsilon_{22})\,dx$$

$$\alpha_3 = \int_D (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})R(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\,dx$$

Оценим отдельные слагаемые в правой части (4.8). Функция α_2 в правой части (4.8) оценивается так:

$$|\alpha_2| = \Big|\int_0^t d\tau \int_D r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))[\varepsilon_{11}(t)\varepsilon_{11}(\tau) + 2\varepsilon_{12}(t)\varepsilon_{12}(\tau) +$$

$$+\varepsilon_{22}(t)\varepsilon_{22}(\tau)]\,dx\Big| \leqslant \int_0^t r_1(t,\tau)\,d\tau \int_D [\varepsilon_{11}^2(t) + 2\varepsilon_{12}^2(t) + \varepsilon_{22}^2(t)]^{1/2}[\varepsilon_{11}^2(\tau) +$$

$$+2\varepsilon_{12}^2(\tau) + \varepsilon_{22}^2(\tau)]^{1/2}dx \leqslant J(t)\int_0^t r_1(t,\tau)J(\tau)\,d\tau$$

Аналогично, для α_3 справедлива оценка

$$|\alpha_3| \leqslant \int_0^t r_1(t,\tau)\,d\tau \int_D |\varepsilon_{11}(t)+\varepsilon_{22}(t)|\,|\varepsilon_{11}(\tau)+\varepsilon_{22}(\tau)|\,dx \leqslant J_1(t)\int_0^t r_1(t,\tau)J_1(\tau)\,d\tau$$

Введем теперь в рассмотрение число $\lambda_2 > 0$ с помощью равенства

$$\lambda_2^2 = \inf_{v_1, v_2} \int_D (e_{11}^2 + 2e_{12}^2 + e_{22}^2)\,dx \Big/ \int_\Gamma (v_1^2 + v_2^2)\,ds \tag{4.9}$$

Здесь функции v_1 и v_2 удовлетворяют граничным условиям (1.1) и положено $2e_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}$. Из определения λ_2 вытекает, что

$$\int_{\Gamma_1} (u_1^2 + u_2^2)\,ds \leqslant \lambda_2^{-2}J^2(t) \tag{4.10}$$

Отсюда следует, что слагаемое α_1 в правой части (4.8) удовлетворяет неравенству

$$|\alpha_1| \leqslant |F|\Big[\int_{\Gamma_1} (u_1^2 + u_2^2)\,ds\Big]^{1/2} \leqslant |F|\,J(t)\lambda_2^{-1}$$

$$|F|^2 = \int_{\Gamma_1} (F_1^2 + F_2^2)\,ds$$

Из (4.8) и установленных оценок величин α_i следует, что

$$J_0^2(t) \leqslant (1-\nu^2)[E\lambda_2]^{-1}|F|\,J(t) + \int_0^t r_1(t,\tau)[(1-\nu)J(t)J(\tau) + \nu J_1(t)J_1(\tau)]\,d\tau \tag{4.11}$$

Кроме того, на основании неравенства Коши—Буняковского и (4.8) имеем

(4.12) $$(1 - \nu)\, J(t)\, J(\tau) + \nu J_1(t)\, J_1(\tau) \leqslant J_0(t)\, J_0(\tau)$$

С учетом (4.12) неравенство (4.11) принимает вид

(4.13) $$J_0^2(t) \leqslant J_0(t) \int_0^t r_1(t,\tau)\, J_0(\tau)\, d\tau + (1 - \nu^2)(E\lambda_2)^{-1} |F|\, J(t)$$

Ясно далее, что

(4.14) $$J_0(t) \int_0^t r_1(t,\tau)\, J_0(\tau)\, d\tau \leqslant \| J_0(t) \|^2 |r_1|$$

$$\| J_0(t) \| = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} J_0(\tau)$$

Отсюда и из (2.2) следует, что

(4.15) $$(1 - |r_1|)\, \| J_0(t) \|^2 \leqslant (1 - \nu^2)(E\lambda_2)^{-1} |F|\ \| J(t) \|$$

Но в силу определения (4.8) функции J_0 справедливо неравенство $\| J_0(t) \|^2 \geqslant \geqslant (1 - \nu) \| J(t) \|^2$. Значит, с учетом (4.15)

(4.16) $$J(t) \leqslant \| J(t) \| \leqslant (1 + \nu)\, |F|\, [E\lambda_2 (1 - |r_1|)]^{-1}$$

Из оценок (4.5), (4.16) вытекает следующее соотношение:

$$H(t) \leqslant \beta_1 = (1 + \nu)(1 + |r_1|)[(1 - \nu)\, \lambda_2 (1 - |r_1|)]^{-1} |F|$$

Сравнивая это неравенство с утверждениями теорем 3,1, 3.2, заключаем, что справедлива теорема 4.1.

5. Некоторые замечания. 1°. Приведем обоснование положительности введенных выше чисел λ, λ_1, λ_2. Положительность λ_1 следует из того, что λ_1 ввиду неравенства Релея ([10], с. 167) есть минимальное собственное значение краевой задачи $\Delta\Delta u - \lambda_1 u = 0$ с граничными условиями (1.2) (Δ — оператор Лапласа).

Для обоснования неравенства $\lambda > 0$ заметим, что ([9], с. 84)

(5.1) $$\left(\int_D u_{,i}^4\, dx \right)^{1/2} \leqslant c_3 \int_D (u_{,i}^2 + u_{,i1}^2 + u_{,i2}^2)\, dx$$

Кроме того ([9], с. 63)

(5.2) $$\int_D u_{,i}^2\, dx \leqslant c_4 \int_D (u_{,i1}^2 + u_{,i2}^2)\, dx, \quad i = 1,2$$

Постоянные $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ в (5.1), (5.2) зависят только от области D. Из (5.1), (5.2) и неравенства Минковского следует, что

$$f_0(t) \leqslant \left(\int_D u_{,1}^4\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_D u_{,2}^4\, dx \right)^{1/2} \leqslant c_3 (1 + c_4) \int_D (u_{,11}^2 + 2u_{,12}^2 + u_{,22}^2)\, dx =$$
$$= c_3 (1 + c_4)\, f^2(t)$$

Тем самым с учетом (3.7) существование $\lambda > 0$ установлено.

Обратимся, наконец, к параметру λ_2, определяемому соотношением (4.9). Для любого $\delta > 0$ обозначим через $D(\delta)$ множество точек D, удаленных от Γ не более чем на δ. Имеем ([9], с. 73)

$$\int_\Gamma v_i^2\, ds \leqslant c_5 \left[\frac{1}{\delta} \int_{D(\delta)} v_i^2\, dx + \delta \int_{D(\delta)} (v_{i,1}^2 + v_{i,2}^2)\, dx \right]$$

Значит, существует постоянная c_6, зависящая только от Γ, такая, что

(5.3) $$\int_\Gamma v_i v_i\, ds \leqslant c_6 \int_D (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j})\, dx, \quad i, j = 1,2$$

Далее, в силу неравенства Корна существует такая постоянная $c_7 > 0$, не зависящая от v_i, что ([11], с. 45)

$$\left(\int_D v_i v_i\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_D v_{i,j} v_{i,j}\, dx \right)^{1/2} \leqslant c_7 \left(\int_D e_{ij} e_{ij}\, dx \right)^{1/2}$$

Отсюда, возводя обе части в квадрат и сравнивая результат с неравенством (5.4), заключаем, что

$$\int_{\Gamma} v_i v_i ds \leqslant c_6 c_7^2 \int_{D} e_{ij} e_{ij} dx$$

Значит, ввиду (4.9) неравенство $\lambda_2 > 0$ установлено.

2°. Установленные в теоремах 3.1, 3.2, 4.1 условия устойчивости сохраняют свой вид и для иных способов опирания пластинки. В них достаточно лишь заменить параметры λ и λ_2, определяемые формулами (3.7), (4.9) на новые значения, соответствующие рассматриваемому способу опирания.

3°. При использовании эйлерова подхода к устойчивости упругих пластин обычно предполагается такая форма пластины и способы ее нагружения, что напряжения внутри пластины постоянны (см., например, [7,12]). При этом предположении условия устойчивости упрощаются и имеют следующий вид. Обозначим через $\lambda_3 - \lambda_5$ минимальные собственные значения краевых задач

$$\Delta\Delta u + \lambda_3 \Delta u = 0,\ \Delta\Delta u + \lambda_4 u_{,11} = 0,\ \Delta\Delta u + 2\lambda_5 u_{,12} = 0$$

с однородными краевыми условиями, соответствующими способу опирания.

Теорема 5.1. Пусть напряжения внутри пластины постоянны и выполнены предположения теоремы 3.1 (теоремы 3.2). Тогда, если $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = 0$, то пластина устойчива при $|\sigma_{11}| < z_1(\lambda_3)$ (при $|\sigma_{11}| < z_2(\lambda_3)$), если $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$, то пластина устойчива при $|\sigma_{11}| < z_1(\lambda_4)$ (при $|\sigma_{11}| < z_2(\lambda_4)$), если $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, то пластина устойчива при $|\sigma_{12}| < z_1(\lambda_5)$ (при $|\sigma_{12}| < z_2(\lambda_5)$), где положено $z_1(\lambda) = \beta\lambda h^{-1}(1 - |r_1|)$, $z_2(\lambda) = \beta\lambda h^{-1}(1 - |r_0|)$.

Рассмотрим, например, упругую прямоугольную пластину длины a и ширины b, равномерно сжатую во всех направлениях силой интенсивности p, шарнирно-опертую по контуру. Тогда $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p/h$, $\sigma_{12} = 0$. Параметр $\lambda_3 = \pi^2(a^{-2} + b^{-2})$. Значит, в силу теоремы 5.1 пластина устойчива при $p < \pi^2\beta(a^{-2} + b^{-2})$, что совпадает с известным результатом ([13], с. 462).

4°. Из установленных теорем в качестве предельного случая могут быть получены некоторые условия устойчивости вязкоупругих стержней, приведенные в [3]. Пусть к прямоугольной пластине длины a и ширины b, $|x_2| \leqslant b$, $b \gg a$ к кромкам $|x_1| = a/2$ приложены постоянные сжимающие усилия интенсивности p. Кромки $|x_2| = b/2$ свободны от напряжений. Предположим, что $\nu = 0$ и $\rho = \rho(x_1)$. Тогда $\sigma_{11} = -p/h$, $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$, а деформация пластины происходит по цилиндрической поверхности и характеризуется изгибом любой балки — полоски, параллельной оси Ox_1. Если искать прогиб u в виде $u = u(t, x_1)$, то в соответствии с (2.11) получаем уравнение, положенное в основу исследования [3]

$$\beta[(I - R)u_{,11}]_{,11} + pu_{,11} = q$$

При этом цилиндрическая жесткость β совпадает с изгибной жесткостью стержня прямоугольного поперечного сечения единичной ширины.

6. Устойчивость на конечном интервале времени. По аналогии с [1—3] назовем пластину устойчивой на интервале $[0, T]$, если $|u(t, x)| \leqslant \bar{u}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $\bar{u}$ — заданное критическое значение прогиба. Момент T_0 первого достижения прогибом величины $\bar{u}$ назовем критическим.

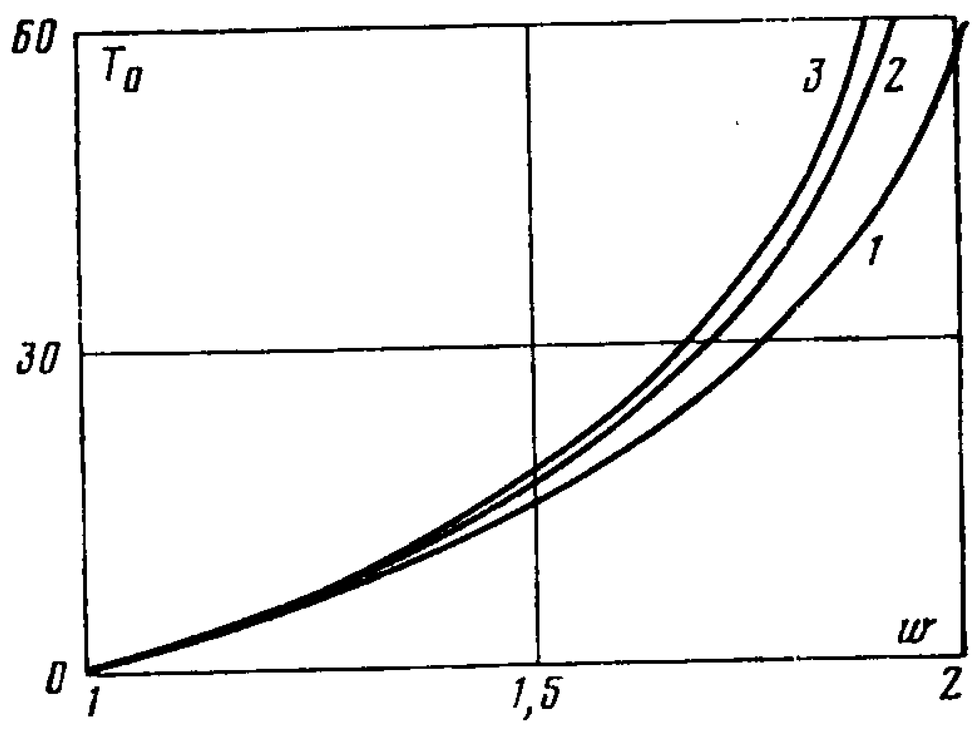
Пусть $\rho(x) \equiv 0$, а ρ_0 означает разность моментов времени изготовления пластины и приложения нагрузки (т. е. ρ_0 — возраст материала пластины в момент приложения нагрузки).

Исследуем влияние ρ_0 на величину критического времени T_0, численно решая уравнение (2.11) для прямоугольной пластины длины $a = 2$ м, ширины $b = 6$ м и толщины $h = 0{,}2$ м, изготовленной из глиноземистого портланд-цемента со следующими параметрами [14]:

$$k(t, \tau) = -E\frac{\partial}{\partial\tau}[\varphi(\tau)(1 - \exp(-\gamma(t - \tau)))],\quad \varphi(\tau) = A_0 + A_1/\tau,$$

$$E = 2{,}0\cdot10^4\ \text{МПа},\ A_0 = 0{,}238\cdot10^{-4}\ \text{МПа}^{-1},\ A_1 = 1{,}85\cdot10^{-4}\ \text{МПа}^{-1}\ \text{сут},$$
$$\nu = 0{,}333,\ \gamma = 0{,}04\ \text{сут}^{-1}.$$

К торцам $|x_1| = a/2$ приложены постоянные сжимающие усилия интенсивности $p = 7{,}5 \cdot 10^4$ Па. Торцы $|x_2| = b/2$ свободны от усилий. К верхней грани пластины приложена поперечная распределенная нагрузка интенсивности $q = q_0 \cos \pi x_2/b$, $q_0 = 833{,}33$ Па. Зависимость критического времени T_0 от максимально допустимого значения прогиба $\bar{u}$ для различных значений ρ_0 представлена на фигуре, где по оси абсцисс отложена величина w, равная отношению $\bar{u}$ к максимальной величине упругого прогиба в момент приложения внешней нагрузки, а по оси ординат — величина T_0, измеряемая в сут. Кривая *1* соответствует $\rho_0 = 10$ сут, кривая *2* — $\rho_0 = 20$ сут, а кривая *3* — $\rho_0 = 40$ сут.



Результаты расчетов показывают, что с ростом ρ_0 критическое время T_0 увеличивается, причем зависимость T_0 от возраста усиливается при увеличении $\bar{u}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости сжато-растянутых неоднородно-вязкоупругих армированных стержней.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 6, с. 1334—1336.
2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно-вязкоупругих армированных стержней.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1110—1120.
3. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.—Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 2, с. 177—187.
4. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
6. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.— М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
7. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
8. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
9. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
10. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
11. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
12. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.
13. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
14. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.VI.1983