Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВКАХ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Серегин Г. А.

Математическое содержание вариационных задач механики жесткопластических сред сводится к минимизации выпуклых функционалов в нерефлексивных пространствах соленоидальных векторных полей. Их различные постановки приведены в [1]. Там же рассмотрены задачи, в которых возникают разрывные поля скоростей. Исходный функционал на таких полях неопределен. В связи с этим ставится задача о построении такого расширения исходного множества кинематически допустимых полей скоростей, которое содержало бы все возможные их разрывы, допускаемые механикой жесткопластических сред, и о продолжении исходного функционала на полученное расширение. В данной работе эта задача решена для случая, когда на всей поверхности жесткопластического тела задано поле скоростей.

1. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^n$ $(n = 2, 3)$, граница Γ которой удовлетворяет условию Липшица. Классическая вариационная задача о стационарном течении жесткопластической среды заключается в отыскании поля скоростей $u = (u_i)$, такого, что

$$J(u) = \min_V J(v) \tag{1.1}$$

Здесь

$$J(v) = \sqrt{2} k_* \int_\Omega |\varepsilon(v)|\, dx$$

$$|\varepsilon|^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad 2\varepsilon_{ij}(v) = v_{i,j} + v_{j,i}$$

$$V = \{v \in D^2(\Omega)\colon \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega, \ v = U \text{ на } \Gamma\}$$

$$D^r(\Omega) = \left\{v\colon \|v\|_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \|\operatorname{div} v\|_{L^r(\Omega)} + \int_\Omega (|\varepsilon^D(v)| + |v|)\, dx < +\infty\right\}$$

$U = (U_i)$ — заданное на Γ поле скоростей, $\varepsilon^D(v)$ — девиатор тензора $\varepsilon(v)$, $r \geqslant 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Известно, что пространство $D^1(\Omega)$ непрерывно вкладывается в пространства суммируемых функций $L^{n/(n-1)}(\Omega)^n$ и $L^1(\Gamma)^n$ [1, 2]. Будем предполагать, что вектор-функция U является следом на Γ соленоидального поля $u_0 \in W_2^1(\Omega)^n$.

Вариационная задача (1.1), вообще говоря, не имеет решения, поскольку множество кинематически допустимых полей скоростей V не содержит полей скоростей, описывающих разрывы типа скольжений. В связи с этим имеет смысл дать ее расширенную постановку, которой будут предъявлены следующие требования:

1) описание расширенного множества кинематически допустимых полей скоростей V_+ и расширенного функционала Φ, определенного на V_+, в терминах функций точки;

2) значение функционала Φ на полях скоростей из V равно значению функционала J на этих же полях;

3) задача (1.1) и ее расширение имеют одинаковые двойственные задачи;

4) величина нижней точной грани расширенной задачи равна величине нижней точной грани задачи (1.1);

5) расширенная задача имеет решение.

Третье требование объясняется тем, что задача, двойственная к задаче (1.1), всегда разрешима и имеет ясный механический смысл. По-видимому, любое вариационное расширение задачи (1.1) с необходимостью должно удовлетворять этим пяти требованиям.

2. Перейдем к описанию множества V_+ и функционала Φ. Рассмотрим пространства и множества симметричных тензор-функций

$$\Sigma = \{\tau = (\tau_{ij}) : \tau_{ii} \in L^2(\Omega),\ \tau^D \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}\}$$

$$\Sigma_n = \{\tau \in \Sigma : \operatorname{div} \tau = (\tau_{ij,j}) \in L^n(\Omega)^n\}$$

$$K = \{\tau \in \Sigma : |\tau^D(x)| \leqslant \sqrt{2}k_* \text{ для почти всех } x \in \Omega\}$$

$$K_0 = \{\tau \in K : \tau_{ii}(x) = 0 \text{ для почти всех } x \in \Omega\}$$

Расширение множества V имеет вид

$$V_+ = \{u \in L^{n/(n-1)}(\Omega)^n : \operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\sup_{\tau\in K\cap\Sigma_n} |(\varepsilon(u_0), \tau) - (u - u_0, \operatorname{div} \tau)| < +\infty\}$$

Здесь

$$(\varepsilon(u), \tau) = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\tau_{ij}\,dx, \quad (u, \operatorname{div}\tau) = \int_\Omega u_i\tau_{ij,j}\,dx$$

Заметим, что множество V_+ содержит все возможные разрывы полей скоростей как внутри области Ω, так и на ее границе Γ. Само определение этого множества зависит от краевых условий в задаче (1.1), которые, тем самым, учитываются насколько это возможно при допустимости разрывов. В частности, можно показать, что проекция вектора скорости на нормальное к поверхности Γ направление удовлетворяет в некотором смысле краевому условию.

Определим функционал Φ: $V_+ \to R^1$ следующим образом:

$$\Phi(v) = \sup_{\tau\in K\cap\Sigma_n} (\varepsilon(u_0), \tau) - (v - u_0, \operatorname{div} \tau)$$

Теперь расширение задачи (1.1) заключается в отыскании поля скоростей $u \in V_+$, такого, что

$$\Phi(u) = \min\nolimits_{V_+} \Phi(v) \tag{2.1}$$

Сформулируем теперь основные утверждения

Теорема 1. Имеют место следующие соотношения:

$$V \subset V_+ \tag{2.2}$$

$$\Phi(v) = J(v),\ \forall v \in V \tag{2.3}$$

Теорема 2. Вариационная задача (2.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in V_+$, такое, что

$$\Phi(u) = \min\nolimits_{V_+} \Phi(v) = \inf\nolimits_V J(v) \tag{2.4}$$

и существует симметричная тензор-функция $\sigma \in K \cap \Sigma_n$, причем

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \text{ в } \Omega \text{ (в смысле распределений)} \tag{2.5}$$

$$(\varepsilon(u_0), \tau - \sigma) - (u - u_0, \operatorname{div}(\tau - \sigma)) \leqslant 0,\ \forall \tau \in K \cap \Sigma_n \tag{2.6}$$

Утверждения теорем 1 и 2 соответствуют пяти требованиям, приведенным в п. 1.

Вариационное неравенство (2.6) выражает необходимое условие экстремума функционала Φ. В нем содержится вся информация о решении и, в частности, о характере и параметрах разрыва. Если же разрыва нет, т. е. $u \in V$, то оно эквивалентно постулату Друкера, записанному в интегральной форме.

3. Перейдем к доказательству теорем. Можно показать, что вектор-функции из $C_0^\infty(\Omega)^n$ плотны в пространстве

$$D_0^2(\Omega) = \{v \in D^2(\Omega):\ v = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

Так как $u - u_0 \in D_0^2(\Omega)$, то, воспользовавшись определением обобщенной дивергенции симметричного тензора τ, получаем следующее тождество:

$$(3.1) \qquad (\varepsilon(u), \tau) = (\varepsilon(u_0), \tau) - (u - u_0, \operatorname{div} \tau), \ \forall \tau \in \Sigma_n$$

Учитывая соленоидальность векторного поля u и равенство

$$(3.2) \qquad J(u) = \sup_{\tau \in K \cap \Sigma_n} (\varepsilon(u), \tau), \ \forall u \in V$$

выводим из тождества (3.1) оба утверждения теоремы 1.

При доказательстве теоремы 2 рассмотрим семейство выпуклых и ограниченных множеств пространства Соболева $W_2^1(\Omega)^n$

$$V_m = \{v \in V:\ \| v \|_{W_2^1(\Omega)^n} \leqslant m\}, \quad m \geqslant \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)^n}$$

Из стандартных теорем о седловых точках вытекает существование функций $u_m \in V_m$, $\tau_m \in K_0$, таких, что

$$(3.3) \qquad (\varepsilon(u_m), \tau) \leqslant (\varepsilon(u_m), \tau_m) \leqslant (\varepsilon(v), \tau_m), \ \forall \tau \in K_0, \ v \in V_m$$

Используя упомянутые выше вложения и выбирая, если нужно, подпоследовательность, будем иметь

$$u_m \to u \text{ слабо в } L^{n/(n-1)}(\Omega)^n;\ \tau_m \to \tau_* \ (*) \text{ — слабо в } L^\infty(\Omega)^{n\times n}$$
$$\operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega, \ \tau_* \in K_0$$

Переходя к пределу в неравенстве (3.3), получим

$$\inf_{V_*} J(v) \leqslant (\varepsilon(v), \tau_*), \ \forall v \in V_* = V \cap W_2^1(\Omega)^n$$

Применяя рассуждения, обычные для теории двойственности, придем к соотношениям

$$(3.4) \qquad \inf_{V_*} J(v) = \inf_{V_*} \sup_{K_0} (\varepsilon(v), \tau) = \inf_{V_*} (\varepsilon(v), \tau_*) =$$
$$= \max_{K_0} \inf_{V_*} (\varepsilon(v), \tau) = (\varepsilon(u_0), \tau_*)$$

из которых следует интегральное тождество для τ_*

$$(\varepsilon(v), \tau_*) = 0, \ \forall v \in \{v \in W_2^1(\Omega)^n:\ \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega, \ v = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

Существует такая функция $t \in L^2(\Omega)$, что [3]

$$(\varepsilon(v), \tau_*) + (t, \operatorname{div} v) = 0, \ \forall v \in \{v \in W_2^1(\Omega)^n:\ v = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

и, следовательно

$$(3.5) \qquad \sigma = (t\delta_{ij} + \tau_{*ij}) \in K \cap \Sigma_n, \ \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ в } \Omega$$

Рассмотрим неравенство (3.3) для функций $\tau \in K \cap \Sigma_n$ и перейдем к пределу с учетом тождества (3.1). В результате получим

$$(3.6) \qquad (\varepsilon(u_0), \tau) - (u - u_0, \operatorname{div} \tau) \leqslant (\varepsilon(u_0), \tau_*) = (\varepsilon(u_0), \sigma),$$
$$\forall \tau \in K \cap \Sigma_n.$$

Из неравенства (3.6) следует, что $u \in V_+$.

Теперь из (3.4) — (3.6) вытекает неравенство

$$(3.7)\qquad (\varepsilon(u_0), \tau) - (u - u_0, \operatorname{div}\tau) \leqslant (\varepsilon(u_0), \tau_*) = (\varepsilon(u_0), \sigma) = \\ = (\varepsilon(u_0), \sigma) - (v - u_0, \operatorname{div}\sigma), \ \forall v \in V_+, \ \tau \in K \cap \Sigma_n$$

Из (3.4) и (3.7) выводим

$$\Phi(u) = \min_{V_+} \Phi(v) = \inf_{V_*} J(v) = (\varepsilon(u_0), \sigma)$$

Утверждения теоремы 2 вытекают из (3.5), (3.7) и неравенства

$$\inf_{V_+} \Phi(v) \leqslant \inf_V J(v) \leqslant \inf_{V_*} J(v)$$

4. Дадим пример задачи, в которой отсутствует непрерывное решение. Цель примера — показать, что формальные математические требования, предъявляемые к вариационному расширению исходной задачи, приводят к такой ее постановке, которая способна выделять вполне разумные с механической точки зрения разрывные решения.

Рассмотрим концентрическое кольцо. Положим $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, причем $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [R_1, R_2]$. Используя полярные координаты, зададим краевые условия следующего типа:

$$u = (u_\rho, u_\theta); \ u_\rho = -U_0, \ u_\theta = 0 \ \text{при} \ \rho = R_1 \ u_\rho = -U_0/\alpha, \ u_\theta = U_* \\ \text{при} \ \rho = R_2$$

где U_0, U_* — положительные постоянные, $\alpha = R_2/R_1$.

Удовлетворяя краевым условиям для u_ρ при $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$, для u_θ при $\rho = R_2$, уравнениям равновесия и соотношениям вида

$$(4.1)\qquad \varepsilon^D(u) = \lambda\sigma^D, \ \lambda \geqslant 0; \ (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\sigma_{\rho\theta}^2 = 4k_*^2$$

получим тензор напряжений σ и поле скоростей u, зависящие от параметра c

$$(4.2)\qquad \sigma_{\rho\theta} = c\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^2, \quad \sigma_\theta = \sigma_\rho - 2\sqrt{k_*^2 - c^2\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^4}$$

$$\sigma_\rho = \sqrt{k_*^2 - c^2\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^4} - k_*\ln\left(k_*\rho^2 + \sqrt{k_*^2\rho^4 - c^2R_1^4}\right) + p$$

$$\lambda = \frac{U_0R_1}{\rho^2\sqrt{k_*^2 - c^2\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^4}}, \quad u_\rho = -U_0\frac{R_1}{\rho}$$

$$u_\theta = U_*\frac{\rho}{R_2} + \frac{U_0}{c}\cdot\frac{\rho}{R_1}\left[\sqrt{k_*^2 - c^2\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^4} - \sqrt{k_*^2 - c^2\alpha^{-4}}\right]$$

Здесь p — произвольная постоянная, а параметр c изменяется от нуля до k_*.

Параметр c выбирается из условия $u_\theta = 0$ при $\rho = R_1$, которое приводит к следующему уравнению:

$$(4.3)\qquad \sqrt{k_*^2 - c^2} + \sqrt{k_*^2 - c^2\alpha^{-4}} = (U_0/U_*)\,c\alpha(1 - \alpha^{-4})$$

Уравнение (4.3) разрешимо и притом единственным образом, если имеет место неравенство

$$(4.4)\qquad U_*/U_0 \leqslant \alpha(1 - \alpha^{-4})^{1/2}$$

В этом случае поле скоростей u, определяемое соотношениями (4.1)—(4.3), будет классическим решением задачи (1.1)

Если неравенство (4.4) не выполняется, то в (4.2) полагаем $c = k_*$. При этом оказывается, что

$$(4.5)\qquad u_\theta(R_1) = (U_0/\alpha)\,[U_*/U_0 - \alpha(1 - \alpha^{-4})^{1/2}] > 0$$

т. е. краевое условие при $\rho = R_1$ для функции u_θ не удовлетворяется. Тем не менее, покажем, что поле u есть решение задачи (2.1). Для этого достаточно убедиться в том, что выполнены соотношения (2.5) и (2.6).

Действительно, из (4.1) вытекает, что

$$(4.6)\qquad (\varepsilon(u), \tau - \sigma) \leqslant 0, \ \forall\tau \in K$$

Для гладких тензор-функций $\tau \in K$ интегрированием по частям устанавливаем равенство

$$(\varepsilon(u), \tau-\sigma)=(\varepsilon(u_0), \tau-\sigma)-(u-u_0, \operatorname{div}(\tau-\sigma))-\int\limits_{\rho=R_1} u_\theta(\tau_{\rho\theta}-k_*)d\Gamma,$$

Поскольку $\tau \in K$ и выполнено неравенство (4.5), то контурный интеграл в последнем равенстве не положителен. Следовательно

$$(\varepsilon(u), \tau-\sigma) \geqslant (\varepsilon(u_0), \tau-\sigma)-(u-u_0, \operatorname{div}(\tau-\sigma))$$

Теперь неравенство (2.6) следует из неравенства (4.6). Значение нижней точной грани задач (1.1) и (2.1) вычисляется по формуле

$$\Phi(u)=J(u)+k_* \int\limits_{\rho=R_1} u_\theta d\Gamma$$

где u — решение задачи (2.1).

Отметим, наконец, что при помощи формул (4.2) можно сконструировать решение, которое удовлетворяет всем краевым условиям, но функция u_θ имеет скачок внутри области. Однако такое решение отсекается задачей (2.1), поскольку оно не удовлетворяет неравенству (2.6).

5. Опишем кратко перспективы практического использования расширенной вариационной постановки.

Прямые вариационные методы численного решения задачи (1.1) требуют непрерывных аппроксимаций полей скоростей. Они могут оказаться неэффективными в случаях, когда задача (1.1) не имеет непрерывного решения.

При использовании расширенной постановки предполагаемые особенности решения можно непосредственно ввести в базисные функции метода. Например, в методе конечных элементов достаточно удовлетворять условию непрерывности нормальной составляющей вектора скорости при переходе от одного элемента к другому. Краевые условия также достаточно выполнять для нормальной к границе составляющей поля скоростей. Поверхности разрывов, таким образом, аппроксимируются гранями конечных элементов. Действительное же положение разрывов как внутри области, так и на ее границе определяется из условия минимума функционала Ф.

Автор благодарит П. П. Мосолова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981, 208 с.
2. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* О корректности краевых задач в механике сплошных сред.— Матем. сб., 1972, т. 88, вып. 2, с. 256—267.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О некоторых задачах векторного анализа и об обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье—Стокса.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1976, т. 59, с. 81—116.

Ленинград

Поступила в редакцию
12.VII.1982