Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Зеленцов В. Б.

Рассматривается задача об изгибе пластины Кирхгофа — Лява в форме полосы при вдавливании тонкого линейного жесткого включения, сцепленного с пластиной по одному из ее краев, когда другой край пластины жестко защемлен. Интегральным преобразованием Фурье задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода типа свертки на конечном отрезке с регулярным ядром. Строится точное обращение главной части соответствующего интегрального оператора в классе функций с неинтегрируемыми особенностями на краях отрезка. Дается эффективное асимптотическое решение исследуемого интегрального уравнения в этом классе функций во всем диапазоне изменения характерного параметра λ. Проводится численная проверка полученных результатов. Аналогичные интегральные уравнения рассматривались в [1, 2]. Метод исследования близок к предложенному в [3].

1. Постановка задачи. Рассматривается полубесконечная пластина Кирхгофа — Лява ширины h ($|x| < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant h$). Боковая грань ($y = 0$) жестко защемлена, а на другой грани ($y = h$) при $|x| \leqslant a$ приварено жесткое тонкое включение длиной $2a$, которое вдавливается в пластину силой P. Функция $f(x)$ описывает форму и осадку включения. Другая часть грани $y = h$, вне включения, свободна от усилий. Нормальная нагрузка на пластину отсутствует. Прогиб пластины $w(x, y)$ в этом случае описывается бигармоническим уравнением с граничными условиями

$$\Delta^2 w(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

$$w(x, 0) = w_y'(x, 0) = 0, \quad |x| < \infty$$

$$M_y(x, h) = V_y(x, h) = 0, \quad |x| > a;$$

$$M_y(x, h) = 0, \quad w(x, h) = f(x), \quad |x| \leqslant a$$

$$w(x, y) \to 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$$

Преобразованием Фурье смешанная краевая задача (1.1) сводится к решению интегрального уравнения первого рода с разностным ядром

$$\lambda^2 \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi \int_0^\infty K(u) \cos u \frac{x-\xi}{\lambda}\, du = \pi f(x), \quad |x| \leqslant 1 \tag{1.2}$$

$$\varphi(x) = 2a^3 (3 - 2\nu - \nu^2) D^{-1} V_y(x, h), \quad \lambda = \frac{h}{a} \tag{1.3}$$

$$K(u) = {}^1/_2 (3 - 2\nu - \nu^2)^{-1} (\operatorname{sh} 2u - 2u)(4 \operatorname{ch}^2 u + (1 - \nu)^2 u^2 - (1 + \nu)^2 \operatorname{sh}^2 u)^{-1} u^{-3}$$

Здесь $\varphi(x)$ — приведенная обобщенная перерезывающая сила на отрезке $|x| \leqslant 1$, ν — коэффициент Пуассона, D — изгибная жесткость.

Функция $K(u)$ четна и мероморфна в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ и обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$K(u) = u^{-3} + O(e^{-2u}), \quad u \to \infty \tag{1.4}$$

$$K(u) = A_0 + O(u^2), \quad u \to 0, \quad A_0 = (3 - 2\nu - \nu^2)^{-1} 6^{-1}$$

2. Свойства ядра интегрального уравнения (1.2). Ядро рассматриваемой задачи

$$(2.1)\qquad k(t)=\int_0^\infty K(u)\cos ut\,du,\qquad t=(\xi-x)\lambda^{-1}$$

исследуем при $t\to 0$ $(\lambda\to\infty)$. Используя асимптотические свойства (1.4) функции $K(u)$, имеем следующую лемму.

Лемма. При значениях $0\leqslant t<\infty$ для функции $k(t)$, определяемой (2.1), (1.3), имеет место представление

$$(2.2)\qquad k(t)=\frac{1}{2}t^2\ln|t|-F(t),\qquad L(u)=u^{-3}K(u)$$

$$F(t)=\int_0^\infty\left[(L(u)-1)\cos ut+1-\frac{1}{2}u^2t^2e^{-u}\right]u^{-3}\,du$$

Функция $F(t)$ как четная функция комплексного переменного $z=t+i\tau$ регулярна в полосе $|t|<\infty$, $|\tau|<2$, где представима абсолютно сходящимся рядом

$$(2.3)\qquad F(t)=\sum_{k=0}^\infty d_kt^{2k}$$

$$d_0=-\int_0^\infty u^{-3}L(u)\,du,\qquad d_1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-1}(L(u)-1+e^{-u})\,du$$

$$d_k=\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\int_0^\infty u^{2k-3}(L(u)-1)\,du,\ k=2,3,\ldots$$

Для доказательства формулы (2.2) необходимо воспользоваться интегралом

$$\int_0^\infty\left(\cos ut-1+\frac{1}{2}u^2t^2e^{-u}\right)u^{-3}\,du=\frac{1}{2}t^2\ln|t|-\frac{3}{4}t^2$$

Регулярность $F(t)$ в полосе следует из того, что $L(u)=1+O(e^{-2u}$ при $u\to\infty$, и результатов [4]. Из регулярности функции $F(t)(0\leqslant t<<\infty)$ вытекает ее непрерывность со всеми производными. Представление в виде ряда (2.3) получается разложением $\cos ut$ в ряд по ut.

3. Структура общего решения интегрального уравнения (1.2.). Отметим, что сведения относительно классов решений интегрального уравнения (1.2) приведены в [1, 2], а также в работах о смешанных задачах изгиба пластин ([5—9] и др.). Анализ указанных работ наводит на мысль, что решение интегрального уравнения (1.2) необходимо разыскивать в классе неинтегрируемых функций вида

$$\varphi(x)=\omega(x)(1-x^2)^{-3/2},\quad \omega(x)\in H_\gamma(-1,1),\quad \gamma>1/2$$

Предварительно найдем решение вспомогательного уравнения

$$(3.1)\qquad \int_{-1}^1\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2}(x-\xi)^2\ln\left|\frac{x-\xi}{\lambda}\right|-d_0\lambda^2-d_1(x-\xi)^2\right]d\xi=$$
$$=\pi f(x),\qquad |x|\leqslant 1$$

Здесь d_0 и d_1 вычисляются по формулам (2.3). Заметим, что решение уравнения (3.1) является главным членом асимптотики решения интегрального уравнения (1.2) при больших λ. Необходимо учесть, что расходящийся интеграл в левой части (3.1) понимается в смысле конечной части [10, 11].

Проведем регуляризацию интеграла в (3.1), введя функцию

(3.2) $$\varphi^*(x) = \varphi(x) - (\alpha + \beta x)(1 - x^2)^{-3/2}$$

где α и β — постоянные числа, определяемые из системы уравнений

$$\omega(1) - \alpha - \beta = 0,\ \omega(-1) - \alpha + \beta = 0$$

Функцию $\varphi^*(x)$ будем искать в классе $H_\gamma(-1, 1)$ $(0 < \gamma < 1)$.

Проделав указанную регуляризацию и взяв необходимые квадратуры в смысле конечной части, полученное из (3.1), (3.2) интегральное уравнение продифференцируем три раза по x, предполагая, что

(3.3) $$f'''(x) \in H_\gamma(-1, 1)\ (0 < \gamma < 1)$$

В результате получим сингулярное уравнение для определения $\varphi^*(x)$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi^*(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\pi f'''(x), \qquad |x| \leqslant 1$$

решение которого известно [12]. Вспоминая определение (3.2), находим общее решение уравнения (3.1)

(3.4) $$\varphi(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(1 - x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - t^2} f'''(t)}{t - x} dt$$

$$A = P,\ B = \beta,\ C = \alpha + P$$

где A, B, C — неизвестные постоянные, связанные указанным выше образом с ранее принятыми α, β, P. Итак, показано, что при условии (3.3) интегральное уравнение (3.1) в классе обобщенных функций K [11] имеет решение, причем единственное.

Постоянные A, B, C связаны с $\varphi(x)$ следующими формулами:

(3.5) $$A = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) d\xi, \qquad B = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \xi\varphi(\xi) d\xi - -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} f'''(t) dt$$

$$C = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \xi^2\varphi(\xi) d\xi - \frac{3}{2} A - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} t\sqrt{1 - t^2} f'''(t) dt$$

Видно, что A — суммарная обобщенная перерезывающая сила, действующая на жесткое включение, B — суммарный скручивающий момент, C — суммарная величина интегрируемой части перерезывающей силы $\varphi(x)$.

Для определения A, B, C умножим уравнение (3.1) на $(1 - x^2)^{-3/2}dx$ и проинтегрируем по x от -1 до 1, затем поступим аналогично, умножив (3.1) на $x(1 - x^2)^{-3/2}dx$ и на $(1 - x^2)^{-1/2}dx$. Учитывая полученные таким образом соотношения и равенства (3.5), определим A, B, C.

Не выписывая общих формул для нахождения A, B, C, представим решение уравнения (3.1) в важном частном случае, когда $f(x) = 1$. Оно имеет вид

(3.6) $$\varphi(x) = (Ax^2 + C)(1 - x^2)^{-3/2}$$

а постоянные A, B, C определятся единственным образом из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}&({}^1/_2\pi - \ln 2\lambda - 2d_1)\, A + C = 0\\ &(-{}^3/_2 + 2\ln 2\lambda + 2d_0\lambda^2 + 4d_1)\, A +\\ &+(-{}^3/_2 + \ln 2\lambda + 2d_1)\cdot C = 2,\ B = 0\end{aligned}$$

которая получается после подстановки (3.6) в (3.1) и вычисления всех квадратур.

При дополнительных условиях на постоянные A, B, C, а тем самым и на функцию $f(x)$ и ее производные можно получить, например, решение, интегрируемое при $x = 1$. В этом случае должно выполняться соотношение $A + B + C = 0$, а решение (3.4) принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{-Ax + C}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\, f'''(t)}{t-x}\, dt$$

При выполнении условий $A + B + C = 0$, $A - B + C = 0$ получаем решение, интегрируемое при $|x| = 1$

$$\varphi(x) = -\frac{A}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\, f'''(t)}{t-x}\, dt$$

4. Формула обращения интегрального уравнения (1.2). Учитывая лемму, интегральное уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2}(x-\xi)^2\ln\left|\frac{x-\xi}{\lambda}\right| - \lambda^2 F\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right]d\xi = \pi f(x),\quad |x| \leqslant 1 \tag{4.1}$$

где $F(t)$ имеет вид (2.3).

Теорема. При выполнении условия (3.3) любое решение интегрального уравнения (4.1) или, что то же, (1.2) из класса обобщенных функций K является также решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {}&\frac{Ax^2 + Bx + C}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\, f'''(t)}{t-x}\, dt +\\ &+\frac{\lambda^2}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\, dt\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\, F_t'''\left(\frac{t-\xi}{\lambda}\right)d\xi\end{aligned} \tag{4.2}$$

и наоборот, а постоянные A, B, C находятся по формулам

$$\begin{aligned}&A = 2q\,(1 + b^{-1})(\pi\Delta)^{-1},\quad B = nb^{-1}\\ &C = [(b^{-1} - 2)\, m - {}^1/_2\,(11 - b)\, l]\,\Delta^{-1},\quad \Delta = {}^1/_2 b + {}^1/_2 + b^{-1}\\ &l = \pi^{-1}p + 2\,(\pi b)^{-1}q,\quad m = -\pi^{-1}p + 2\pi^{-1}q\\ &p = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\, g'''(t)\, dt,\quad q = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-3/2}\, g(t)\, dt\\ &n = -\pi^{-1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\, g'''(t)\, dt - 2\,(\pi b)^{-1}\int_{-1}^{1} t\,(1-t^2)^{-3/2} g(t)\, dt\\ &g(t) = f(t) + \lambda^2\pi^{-1}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\, F\left(\frac{t-\xi}{\lambda}\right)d\xi\end{aligned} \tag{4.3}$$

Формула обращения (4.2) интегрального уравнения (4.1) получается из формулы (3.4), а A, B, C — аналогично тому, как это было сделано в п. 3. Единственность решения (4.2) вытекает из единственности решения (3.4)

5. Решение интегрального уравнения (4.2), или (1.2). Приближенное решение интегрального уравнения (4.2) с функцией $F(t)$ вида (2.3) будем искать в виде ряда по отрицательным степеням λ [12]

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x)\lambda^{-2k} \tag{5.1}$$

Подставив (5.1) в (4.2), получим, удерживая в (5.1) и (2.3) три члена разложения

$$q_0(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}\, f'''(t)}{t-x}\, dt \tag{5.2}$$

$$q_i(x) = \frac{24}{\pi^2\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\, dt \int_{-1}^{1} \varkappa_i(\xi, t)\, d\xi, \quad i = 1, 2$$

$$\varkappa_1(\xi, t) = d_2 q_0(\xi)(t-\xi)$$

$$\varkappa_2(\xi, t) = d_2 q_1(\xi)(t-\xi) + 5d_3 q_0(\xi)(t-\xi)^3$$

Постоянные величины A, B, C определяются соотношениями (4.3). В случае $f(x) = 1$ решение уравнения (4.1) имеет вид

$$q_0(x) = \frac{Ax^2 + C}{(1-x^2)^{3/2}}, \quad q_1(x) = \frac{24 d_2 A}{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{5.3}$$

$$q_2(x) = \frac{120 d_3}{\sqrt{1-x^2}}\left[Ax^4 + (4A + 3C)x^2 - \frac{19}{8}A - \frac{3}{2}C\right]$$

$$A = a_{22}(d_0\lambda^2\Delta)^{-1}, \quad C = -a_{21}(d_0\lambda^2\Delta)^{-1}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$2d_0 a_{11} = 2d_0 + \left(4d_1 - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{\lambda^2} + 2\ln 2\lambda \frac{1}{\lambda^2} - 3d_2 \ln 2\lambda \frac{1}{\lambda^4} +$$
$$+ 6d_2(3 - d_1)\frac{1}{\lambda^4}$$

$$2d_0 a_{12} = \left(2d_0 - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\ln 2\lambda + 9d_2\frac{1}{\lambda^4}$$

$$a_{21} = -\ln 2\lambda - \frac{5}{2} - 2d_1 - 24d_2\frac{1}{\lambda^2} + \left(36d_2^2 - \frac{405}{2}d_3\right)\frac{1}{\lambda^4}$$

$$a_{22} = 1 - 12d_2\frac{1}{\lambda^2} - 135d_3\frac{1}{\lambda^4}$$

причем в рассматриваемом случае $d_0 = -0{,}60237$, $d_1 = 0{,}29585$, $d_2 = 0{,}06647$, $d_3 = -0{,}00759$.

Отметим, что решение интегрального уравнения (1.2), записанного в виде (4.1) или (4.2), эффективно при больших значениях λ ($\lambda \geqslant 2$).

6. Решение уравнения при малых значениях параметра λ. Для получения эффективного решения интегрального уравнения при малых λ будем следовать работе [12]. Нулевой член асимптотики решения $\varphi(x)$ при малых λ интегрального уравнения (1.2) представим в виде

$$\lambda^2\varphi(x) = \varphi_+\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \varphi_-\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - v\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{6.1}$$

где $\varphi_\pm(x)$ — решение интегрального уравнения Винера — Хопфа

$$\lambda\int_0^\infty \varphi_\pm(\xi)\, k(x-\xi)\, d\xi = \pi f(\lambda x \pm 1), \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{6.2}$$

а $v(x)$ определяется из уравнения свертки

$$\lambda\int_{-\infty}^{\infty} v(\xi)\, k(x-\xi)\, d\xi = \pi f(\lambda x), \quad |x| < \infty \tag{6.3}$$

Предположим, что $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, и решим уравнение (6.2) для специальной правой части $e^{i\eta x}$. Для получения обозримого решения аппроксимируем функцию $K(u)$ функцией, сходной с ней по асимптотическим свойствам и легко факторизуемой. Например, возьмем выражение

$$K(u)=\frac{1}{\sqrt{u^2+A^2}\,(u^2+B^2)}\,\frac{(u^2+E^2)(u^2+F^2)}{(u^2+C^2)(u^2+D^2)},\quad K(0)=\frac{E^2F^2}{AB^2C^2D^2} \tag{6.4}$$

наиболее оптимальное с точки зрения приближения $K(u)$ на действительной оси.

Получим решение уравнения Винера — Хопфа вида (6.2) при специальной правой части

$$\int_0^\infty \varphi(\xi)\,k(x-\xi)\,d\xi=\pi e^{i\eta x},\quad 0\leqslant x<\infty \tag{6.5}$$

$$k(t)=\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\,e^{iut}\,du$$

Распространим это уравнение на всю действительную ось, введя в рассмотрение функцию $l(x)$ [4]

$$\int_0^\infty \varphi(\xi)\,K(x-\xi)\,d\xi=\begin{cases}\pi e^{i\eta x}, & x\geqslant 0\\ l(x), & x<0\end{cases} \tag{6.6}$$

$$l(x)=\int_0^\infty k(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

Применим к левой и правой части (6.6) интегральное преобразование Фурье, в результате чего получим функциональное уравнение

$$K(\alpha)\,\Phi_+(\alpha)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,(\alpha+\eta)}+E_-(\alpha) \tag{6.7}$$

$$\Phi_+(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\,e^{i\alpha t}\,dt,\quad \pi E_-(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} l(t)\,e^{i\alpha t}\,dt$$

Здесь $\Phi_+(\alpha)$ — регулярная функция в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(\alpha)>\tau_1$, а $E_-(\alpha)$ — в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}(\alpha)<\tau_2$. Левая и правая части уравнения (6.7) есть функции, регулярные в полосе $|\operatorname{Im}(\alpha)|<\inf(\tau_1,\tau_2,A,B,C,D)$. Факторизуем функцию $K(\alpha)$, т. е. представим ее в виде произведения

$$K(\alpha)=K_+(\alpha)\,K_-(\alpha) \tag{6.8}$$

и, разделив (6.7) на $K_-(\alpha)$ получим

$$K_+(\alpha)\,\Phi_+(\alpha)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,(\alpha+\eta)\,K_-(\alpha)}+\frac{E_-(\alpha)}{K_-(\alpha)}$$

Функция $g(\alpha)=[\sqrt{2\pi}\,(\alpha+\eta)\,K_+(\eta)]^{-1}$ легко факторизуется [12], т. е.

$$g(\alpha)=g_+(\alpha)+g_-(\alpha)$$

$$g_+(\alpha)=i\,[\sqrt{2\pi}\,(\alpha+\eta)\,K_+(\eta)]^{-1},\quad g_-(\alpha)=i\,[\sqrt{2\pi}\,(\alpha+\eta)]^{-1}\,[K_-^{-1}(\alpha)-K_+^{-1}(\eta)]$$

Отсюда имеем

$$K_+(\alpha)\,\Phi_+(\alpha)-g_+(\alpha)=g_-(\alpha)+E_-(\alpha)/K_-(\alpha) \tag{6.9}$$

Последнее равенство определяет в полосе

$$0 < \mathrm{Im}\,(\alpha) < \inf\,(\tau_1, \tau_2, A, B, C, D, E, F)$$

регулярную функцию $\Gamma(\alpha)$. Учитывая, что $K_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$, $g_+(\alpha) \sim \alpha^{-1}$, $E_-(\alpha)\,K_-^{-1}(\alpha) \sim \sqrt{\alpha} e^{-\varkappa\alpha}$, $\Phi_+(\alpha) \sim \sqrt{\alpha}$, $g_-(\alpha) \sim \sqrt{\alpha}$ при $\alpha \to \infty$ ($\varkappa > 0$), и замечая, что в (6.9) функция в левой части равенства убывает как α^{-1} в полосе регулярности при $\mathrm{Re}\,(\alpha) \to \infty$, а правая часть растет как $\sqrt{\alpha}$ в той же полосе, следуя [4], получаем

$$\Phi_+(\alpha) = g_+(\alpha)/K_+(\alpha)$$

Применяя к последнему соотношению обратное преобразование Фурье, получим формулу

$$\varphi(x) = \frac{i}{2\pi K_+(\eta)} \int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{e^{-i\alpha x}}{K_+(\alpha)(\alpha+\eta)}\,d\alpha, \quad c > \mathrm{Im}\,(-\eta) \tag{6.10}$$

совпадающую с аналогичной формулой работы [12], но интеграл в (6.10) понимается в обобщенном смысле. В случае аппроксимации $K(u)$ вида (6.4) решение интегрального уравнения (6.5) имеет вид

$$\lambda\varphi(x) = K_+^{-1}(\eta)\left[-\frac{e^{-Ax}}{\sqrt{\pi x^3}} + \sum_{i=1}^{3} \delta_i(\alpha_i)\,\rho(\alpha_i, x)\right] \tag{6.11}$$

$$\rho(t, x) = (\pi x)^{-1/2} e^{-Ax} + \sqrt{A-t}\, e^{-tx}\, \mathrm{erf}\sqrt{(A-t)\,x}$$

$$\delta_j(t) = \gamma(t)(E_j - t)^{-1}(t + t_j)^{-1},\ \gamma(t) = (B-t)(C-t)(D-t)$$

$$E_1 = \alpha_2 = -t_3 = F,\ E_{2,3} = \alpha_1 = E,\ t_{1,2} = -\alpha_3 = i\eta$$

Другие решения, соответствующие более простым аппроксимациям, легко получаются из (6.11). Если $f(x) = 1$, то в формулах (6.11) необходимо положить $\eta = 0$.

Интегральное уравнение типа свертки на всей действительной оси (6.3) решается при помощи интегрального преобразования Фурье [12], и решение его имеет вид $\lambda^2 v(x) = K^{-1}(\eta)\,e^{-i\eta x}$, а при $\eta = 0$

$$\lambda^2 v(x) = K^{-1}(0) \tag{6.12}$$

Таким образом, все необходимые формулы получены для составления главного члена асимптотики (6.1) решения интегрального уравнения (1.2), (4.1) при $f(x) = 1$.

В дальнейшем потребуется интегральная характеристика задачи

$$P = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,d\xi \tag{6.13}$$

т. е. величина силы, с которой включение вдавливается в пластину. Следуя [12], для вычисления P по формуле (6.13) нулевой член асимптотики решения при малых λ возьмем в виде

$$\lambda^2\varphi(x) = \varphi_+\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\varphi_-\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)v^{-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{6.14}$$

Для постоянной правой части уравнения (1.2), (4.1) вырожденное решение $v(x)$ дается формулой (6.12). Тогда, подставив (6.14) в (6.13) и понимая полученное выражение как свертку преобразования Лапласа, имеем

$$P = \frac{1}{\lambda 2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\Phi(p)}{p}\right]^2 e^{2p/\lambda}\,dp, \quad \Phi(p) = K_+^{-1}(p) \tag{6.15}$$

λ	Формулы	$x=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	P
2	Метод коллокации	0,218	0,194	0,100	−0,176	−1,41	−5,04	—
2	(5.1),(5.3)	0,212	0,193	0,118	−0,101	−1,08	−4,02	1,89
3	(5.1),(5.3)	0,004	−0,007	−0,052	−0,182	−0,756	−2,46	0,743
5	(5.1),(5.3)	−0,034	−0,039	−0,061	−0,123	−0,394	−1,18	0,240
2	(6.1)	0,211	0,191	0,115	−0,111	−1,13	−1,90	1,90
1	(6.1)	2,53	2,49	2,34	1,82	−0,759	−8,98	10,2
0,5	(6.1)	21,2	21,2	21,0	20,2	14,6	−6,05	61,6

Интеграл (6.13) понимается в смысле конечной части, а интеграл Лапласа (6.15), с учетом поведения $\Phi(p) \sim p\sqrt{p}$ при $p \to \infty$,— в обобщенном смысле. В случае аппроксимации (6.4) можно получить явное выражение P через λ и постоянные A, B, C, D, E, F, π. Здесь оно не выписывается ввиду его громоздкости.

7. Численный анализ полученных асимптотических решений интегрального уравнения (1.3). Можно показать, что метод «больших λ» эффективен при $\lambda \geqslant 2$, а метод «малых λ» — при $\lambda \leqslant 2$, а вместе они перекрывают весь диапазон изменения параметра λ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$. Стыковку решений следует ожидать при $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$. В таблице приведены расчеты, выполненные при $\lambda = 2$ по методу коллокаций, методу «больших λ» (формулы (5.1), (5.3)), методу «малых λ» (формулы (6.1)). Причем метод коллокации привлекался для контроля асимптотических решений методов «больших λ» и «малых λ» с выделением особенностей решения (1.2) в краях. Квадратуры вычислялись по формуле трапеций по 23 узлам в интервале (—1,1). При реализации метода «малых λ» использовалась аппроксимация функции $K(u)$ ядра интегрального уравнения вида (6.4) с максимальной 2%-ной ошибкой вдоль действительной оси. Параметры аппроксимации в этом случае $A = 0{,}470787$, $B = 1{,}79730$, $C = 1{,}64832$, $D = 1{,}41073$, $E = 0{,}61461$, $F = 2{,}89502$, причем $K(0) = 0{,}385$. В последнем столбце дана интегральная характеристика P. Максимальное расхождение результатов, полученных этими методами при $\lambda = 2$, составляет 3%, а по величине силы P — 1%. Кроме того, в таблице приведены значения приведенной обобщенной перерезывающей силы при различных λ. Явление отрыва пластины от включения, возникающее в задаче, становится ощутимым при $\lambda < 3$. При $\lambda > 3$ погранслои перекрывают проникающее решение.

Заметим, что была сделана [2] попытка решения интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\left[\ln|\xi - x| + \frac{3}{2}\right] d\xi = \pi f(x), \quad |x| \leqslant 1 \tag{7.1}$$

в классе разрывных функций вида (3.1). Согласно пп. 3, 4, можно получить общее решение этого уравнения типа (3.4) с одним отличием — под интегралом должна стоять производная первого порядка от функции $f(x)$, а не третьего, как в (3.4). Для $f(x) = 0$ общее решение

$$\varphi(x) = (A^* x^2 + B^* x + C)(1 - x^2)^{-3/2} \tag{7.2}$$

Подстановкой (7.2) в (7.1) при $f(x) = 0$ получаем решение уравнения (7.1), найденное в [2].

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Онищук О. В., Попов Г. Я.* О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 141—150.
2. *Попов Г. Я., Толкачев В. М.* Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 192—206.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Движение штампа по границе упругой полуплоскости с тонким усиливающим покрытием.— В кн.: Механика сплошной среды. Изд-во Ростов. ун-та, 1981, с. 13—27.

4. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решений дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
5. *Александров В. М., Зеленцов В. Б.* Асимптотические методы в задачах об изгибе пластин со смешанными условиями закрепления.— В кн.: Теория оболочек и пластин. Тр. 8-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 23—27.
6. *Белубекян Э. В.* Изгиб свободно опертой по контуру прямоугольной пластинки с симметричным разрезом.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, № 2, с. 28—41.
7. *Линьков А. М., Меркулов В. А.* Задачи об изгибе пластин с разрезами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1, с. 111—118.
8. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи для полубесконечной цилиндрической оболочки.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 831—839.
9. *Бережницкий Л. Т., Садивский В. М., Онышко Л. М.* Изгиб анизотропной пластинки с трещиной.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 11, с. 42—49.
10. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
11. Функциональный анализ. М.: Наука, 1964. 424 с.
12. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
20.VII.1983