Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 539.3

О СОВМЕСТНОМ ПРИМЕНЕНИИ ДЕКАРТОВЫХ И БИПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Проценко В. С., Соловьев А. И.

Получены равенства, связывающие гармонические функции с разделенными переменными в декартовых и биполярных координатах. Эти равенства могут быть использованы при исследовании ряда новых краевых задач теории потенциала и теории упругости для областей, ограниченных координатными линиями декартовой и биполярной систем координат.

1. Рассмотрим плоскую область, граница которой образована дугами двух пересекающихся окружностей. Решение внутренних краевых задач для подобного рода областей (круговых луночек) проводится в биполярных координатах α, β, определяемых соотношениями ($a > 0$) [1]

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (-\infty < \alpha < \infty, -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi) \tag{1.1}$$

Дуги окружностей, образующих круговую луночку, являются координатными линиями $\beta = \text{const}$ и проходят через точки $x = \pm a$, $y = 0$. Величина β измеряется углом между касательной к дуге в точке $x = a$, $y = 0$ и отрезком $(-a, a)$ оси x, соответствующим значению $\beta = 0$. Координата α внутри рассматриваемой области изменяется в пределах от $-\infty$ до ∞. Получаемые разделением переменных и ограниченные при $\alpha \to \pm\infty$ частные решения уравнения Лапласа в биполярных координатах имеют вид

$$\cos \lambda\alpha \left\| \begin{matrix} \operatorname{ch} \lambda\beta \\ \operatorname{sh} \lambda\beta \end{matrix} \right\|, \quad \sin \lambda\alpha \left\| \begin{matrix} \operatorname{ch} \lambda\beta \\ \operatorname{sh} \lambda\beta \end{matrix} \right\| \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

Теорема 1. При $-\pi < \beta < \pi$ справедливы равенства

$$\operatorname{sh} \lambda y \left\| \begin{matrix} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{matrix} \right\| = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda, \tau) \operatorname{sh} \tau\beta \left\| \begin{matrix} \cos \tau\alpha \\ \sin \tau\alpha \end{matrix} \right\| d\tau \tag{1.2}$$

$$\operatorname{ch} \lambda y \left\| \begin{matrix} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} \cos \lambda a \\ 0 \end{matrix} \right\| = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda, \tau) \operatorname{ch} \tau\beta \left\| \begin{matrix} \cos \tau\alpha \\ \sin \tau\alpha \end{matrix} \right\| d\tau$$

$$C(\lambda, \tau) = \frac{\lambda a}{\operatorname{sh} \pi\tau} e^{-i\lambda a} \Phi(1 - i\tau, 2; 2i\lambda a) \equiv$$

$$\equiv \frac{\lambda a}{\operatorname{sh} \pi\tau} e^{i\lambda a} \Phi(1 + i\tau, 2; -2i\lambda a)$$

Последнее тождество следует из преобразования Куммера [2, 3] для вырожденной гипергеометрической функции.

Краевые задачи для луночной области, содержащей бесконечно удаленную точку, удобно решать в биполярных координатах α, σ:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \sigma}$$

$$(-\infty < \alpha < \infty, -\pi \leqslant \sigma \leqslant \pi, a > 0)$$

Величина σ измеряется углом между касательной к дуге в точке $x = a$, $y = 0$ и лучом (a, ∞) оси x, соответствующим значению $\sigma = 0$.

Теорема 2. При $-\infty < y < \infty$ справедливы равенства

$$(1.3)\qquad \operatorname{sh}\lambda\sigma \begin{Vmatrix}\cos\lambda\alpha\\ \sin\lambda\alpha\end{Vmatrix} = \operatorname{sgn} y \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda, s) e^{-|sy|} \begin{Vmatrix}\cos xs\\ \sin xs\end{Vmatrix} ds$$

$$\operatorname{ch}\lambda\sigma \begin{Vmatrix}\cos\lambda\alpha\\ \sin\lambda\alpha\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix}1\\ 0\end{Vmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda, s) e^{-|sy|} \begin{Vmatrix}\cos xs\\ \sin xs\end{Vmatrix} ds$$

$$A(\lambda, s) = a\lambda e^{-isa}\Phi(1 - i\lambda, 2;\ 2isa),\quad B(\lambda, s) = \operatorname{sgn} s A(\lambda, s)$$

Формулы (1.2), (1.3) установлены в результате решения специальных краевых задач для уравнения Лапласа.

Приведем вывод последней формулы из (1.2). С этой целью рассмотрим следующую внутреннюю задачу Дирихле для симметричной луночки G, ограниченной дугами окружностей $\beta = \beta_0$ и $\beta = -\beta_0$:

$$(1.4)\qquad \Delta w(\alpha, \beta) = 0,\quad w(\alpha, \pm\beta_0) = \operatorname{ch}\lambda y \sin\lambda x - xa^{-1}\sin\lambda a$$

$$\left(x = \frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta_0},\ y = \frac{a\sin\beta_0}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta_0},\ 0 < \beta_0 < \pi\right)$$

Очевидно, что $y \to 0$, $x = \pm a$, $\operatorname{ch}\lambda y \sin\lambda x - xa^{-1}\sin\lambda a \to 0$ при $\alpha \to \pm\infty$. Решение задачи (1.4) в классе $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ существует, единственно и может быть представлено в виде

$$w(\alpha, \beta) = \int_0^\infty R(\lambda, \tau)\operatorname{ch}\tau\beta \sin\tau\alpha\, d\tau$$

$$R(\lambda, \tau) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\operatorname{ch}\tau\beta_0}\int_0^\infty p(\lambda, \alpha)\sin\tau\alpha\, d\alpha$$

$$p(\lambda, \alpha) = \operatorname{ch}\lambda y \sin\lambda x - xa^{-1}\sin\lambda a$$

(функции $x = x(\alpha, \beta_0)$, $y = y(\alpha, \beta_0)$ приведены в (1.4)).

С другой стороны, решением задачи (1.4) является функция

$$\operatorname{ch}\lambda y \sin\lambda x - xa^{-1}\sin\lambda a \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$$

(x и y определены соотношениями (1.1)). Ввиду единственности решения задачи (1.4) в классе $C^2(G) \cap C(\overline{G})$

$$(1.5)\qquad \int_0^\infty R(\lambda, \tau)\operatorname{ch}\tau\beta \sin\tau\alpha\, d\tau = \operatorname{ch}\lambda y \sin\lambda x - xa^{-1}\sin\lambda a$$

всюду в области G.

При фактическом отыскании функции $R(\lambda, \tau)$ можно исходить из равенства (1.5) на любом множестве $E \subset G$, имеющем хотя бы одну конечную предельную точку $P \in G$. Полагая в нем $\beta = 0$, $-\infty < \alpha < \infty$ $(y = 0, -a < x < a)$, применяя формулу обращения синус-преобразования Фурье и интегрирование по частям, после элементарных преобразований находим

$$R(\lambda, \tau) = \frac{\lambda}{2\pi\tau}\left[\int_{-a}^{a}\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{i\tau} e^{-i\lambda x} dx + \int_{-a}^{a}\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{i\tau} e^{i\lambda x} dx\right] - \frac{2\sin\lambda\alpha}{\operatorname{sh}\pi\tau}$$

Совершая здесь замену $x = ay$, используя равенство [3]

$$\int_{-1}^{1}(1 - y)^{\nu-1}(1 + y)^{\mu-1} e^{-ipy} dy = 2^{\nu+\mu-1} B(\nu, \mu) e^{ip}\Phi(\mu, \nu + \mu;\ -2ip)$$

и преобразование Куммера, имеем

$$R(\lambda, \tau) = \frac{\lambda a}{\operatorname{sh}\pi\tau} e^{-i\lambda a}[\Phi(1 - i\tau, 2;\ 2i\lambda a) + \Phi(1 + i\tau, 2;\ 2i\lambda a)] - \frac{2\sin\lambda a}{\operatorname{sh}\pi\tau}$$

Учитывая, что проведенные построения справедливы при любом значении β_0 из промежутка $(0, \pi)$ и

$$2\sin\lambda a\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\tau\beta\sin\tau\alpha}{\operatorname{sh}\pi\tau}\,d\tau=\frac{\operatorname{sh}\alpha\sin\lambda a}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}=\frac{x}{a}\sin\lambda a\qquad(|\beta|<\pi)$$

получаем искомое равенство.

Представление функции $e^{-i\mu a}\Phi(1-ip, 2; 2i\mu a)$ через регулярную волновую функцию Кулона [4] позволяет записать ее в виде следующего ряда:

$$e^{-i\mu a}\Phi(1-ip, 2; 2i\mu a)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(p)(\mu a)^{n-1}$$

$$A_1(p)=1,\qquad A_2(p)=p,\qquad A_n(p)=\frac{2pA_{n-1}(p)-A_{n-2}(p)}{n(n-1)}\ (n>2)$$

Отсюда следует, что плотности $C(\lambda, \tau)$ и $A(\lambda, s)$ — вещественные функции при вещественных значениях λ, s, τ.

Формулы (1.2), (1.3) и их определенные комбинации специально приспособлены для решения краевых задач теории потенциала в полосе $-b\leqslant y\leqslant h$ (полуплоскости $-b\leqslant y<\infty$) $(h>0,\ b>0)$ с луночным отверстием или включением $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$ и, в частности, для исследования особенностей изучаемых полей вблизи угловых точек $x=\pm a,\ y=0$.

При решении указанных задач в полосе $-b\leqslant x\leqslant h$ (полуплоскости $-b\leqslant h<\infty$) с прежней ориентацией луночного отверстия или включения в качестве исходных результатов можно рассматривать следующие.

Теорема 3. При $-\pi<\beta<\pi$ справедливы равенства

$$\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\lambda x\cos\lambda y\\ \operatorname{sh}\lambda x\sin\lambda y\end{matrix}\right\|-\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\lambda a\\ 0\end{matrix}\right\|=\pm i\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\lambda,\tau)\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\tau\beta\cos\tau\alpha\\ \operatorname{sh}\tau\beta\sin\tau\alpha\end{matrix}\right\|d\tau$$

$$\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\lambda x\sin\lambda y\\ \operatorname{sh}\lambda x\cos\lambda y\end{matrix}\right\|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\lambda,\tau)\left\|\begin{matrix}\operatorname{sh}\tau\beta\cos\tau\alpha\\ \operatorname{ch}\tau\beta\sin\tau\alpha\end{matrix}\right\|d\tau$$

$$G(\lambda,\tau)=\frac{\lambda a}{\operatorname{sh}\pi\tau}e^{\lambda a}\Phi(1-i\tau, 2; -2\lambda a)$$

Теорема 4. При $|x|>a$ справедливы равенства

$$\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\lambda\sigma\\ \operatorname{sh}\lambda\sigma\end{matrix}\right\|\sin\lambda\alpha=\pm\operatorname{sgn}x\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(\lambda,s)e^{-|sx|}\left\|\begin{matrix}\cos sy\\ i\sin sy\end{matrix}\right\|ds$$

$$\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\lambda\sigma\\ \operatorname{sh}\lambda\sigma\end{matrix}\right\|\cos\lambda\alpha-\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}b(\lambda,s)e^{-|sx|}\left\|\begin{matrix}i\cos sy\\ \sin sy\end{matrix}\right\|ds$$

$$a(\lambda, s)=a\lambda e^{sa}\Phi(1-i\lambda, 2; -2sa),\quad b(\lambda, s)=\operatorname{sgn}sa(\lambda, s)$$

Заметим, что функции $G(\lambda,\tau)+G(\lambda,-\tau)$, $i[G(\lambda,\tau)-G(\lambda,-\tau)]$ $a(\lambda,s)+a(\lambda,-s)$, $i[a(\lambda,s)-a(\lambda,-s)]$ вещественны при вещественных значениях λ, s, τ.

2. В качестве простейшего примера применения полученных равенств рассмотрим симметричную по координате x задачу антиплоской деформации слоя $(-\infty<x,\ z<\infty,\ -b\leqslant y\leqslant b)$, ослабленного цилиндрическим каналом $(-\infty<z<\infty,\ -\infty<\alpha<\infty,\ -\sigma_0<\sigma<\sigma_0)$ луночного профиля. Деформация слоя вызвана приложенными на гранях $y=\pm b$ сдвигающими нагрузками, которые направлены по прямым $y=\pm b$, $x=\text{const}$ и постоянны вдоль них. Известно [5, 6], что в этом случае можно считать отличными от нуля только смещение $w=w(x, y)$ вдоль оси z и касательные напряжения (G — модуль сдвига)

$$\tau_{xz} = G\partial w/\partial x, \quad \tau_{yz} = G\partial w/\partial y$$

Система уравнений равновесия сводится к одному уравнению, которое при отсутствии массовых сил принимает форму $\Delta w = 0$.

Пусть поверхность цилиндрического канала свободна от внешних усилий. Разобьем задачу на симметричную и антисимметричную по координате y и рассмотрим сначала первую из них, когда искомая функция w четна по координате y. Тогда определение поля напряжений и смещений в рассматриваемом теле (с учетом предположенной симметрии задачи и по координате x) сводится к решению задачи Неймана в плоской области D, ограниченной прямыми $y = \pm b$ и дугами пересекающихся окружностей $\sigma = \pm\sigma_0$ (полоса с луночным отверстием)

$$(2.1) \qquad \Delta w = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\pm\sigma_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\pm b} = \pm f_1(x), \quad f_1(-x) = f_1(x)$$

Считается, что приложенные к границе слоя внешние усилия уравновешиваются. Это в данном случае приводит к условию

$$(2.2) \qquad \int_0^\infty f_1(x)\,dx = 0$$

являющемуся одновременно и необходимым условием разрешимости двумерной задачи Неймана (2.1).

Решение сформулированной задачи разыскиваем в классе функций, удовлетворяющих условию конечности энергии упругого деформирования [7, 8] полосы D ($-\infty < x < \infty$, $-b \leqslant y \leqslant b$), ослабленной луночным отверстием $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$. Указанная энергия аккумулируется в области D за счет работы внешних сил, которую естественно всегда считать конечной [7, 8]. Таким образом, решение задачи (2.1) следует искать в классе функций, удовлетворяющих условию

$$(2.3) \qquad \iint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy < \infty$$

Условие (2.3) вполне замыкает постановку задачи (2.1), (2.2). Вместе с этим точно определяется поведение решения при $|x| \to \infty$, а также в особых точках $x = \pm a$, $y = 0$.

Не останавливаясь на формулировке общих предположений относительно внешних нагрузок, отметим следующее. Если функция $f_1(x)$ ограничена и отлична от нуля лишь на конечном интервале или $f_1(x)$ интегрируема в промежутке $(0, \infty)$ и $f_1(x) = O(x^{-1-\varepsilon})$ $(x \to \infty,\ \varepsilon \geqslant 1)$, то проводимые ниже построения законны и имеет место условие (2.3).

Представим гармоническую функцию w в виде

$$w = \int_0^\infty G_1(\lambda)(\operatorname{ch}\lambda y \cos\lambda x - \cos\lambda a)\,d\lambda + \int_0^\infty H_1(\tau)\operatorname{ch}\tau\sigma\cos\tau\alpha\,d\tau + \mathrm{const}$$

С учетом симметрии задачи и равенств

$$\beta = \pi - \sigma \quad (0 < \sigma \leqslant \pi)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \sigma} = -\int_0^\infty G_1(\lambda)\,d\lambda \int_0^\infty \tau\,[C(\lambda, \tau) + C(\lambda, -\tau)]\operatorname{sh}\tau\beta\cos\tau\alpha\,d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \tau H_1(\tau)\operatorname{sh}\tau\sigma\cos\tau\alpha\,d\tau$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_0^\infty \lambda G_1(\lambda)\operatorname{sh}\lambda y\cos\lambda x\,d\lambda -$$

$$- \int_0^\infty H_1(\tau)\,d\tau \int_0^\infty \lambda\,[B(\tau, \lambda) + B(\tau, -\lambda)]\,e^{-\lambda y}\cos\lambda x\,d\lambda \quad (y > 0)$$

при удовлетворении граничным условиям задачи приходим к соотношениям

$$H_1(\tau)=\frac{\operatorname{sh}\tau(\pi-\sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0}\int_0^\infty G_1(\lambda)\,[C(\lambda,\tau)+C(\lambda,-\tau)]\,d\lambda$$

$$G_1(\lambda)=\frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{sh}\lambda b}\int_0^\infty H_1(\tau)\,[B(\tau,\lambda)+B(\tau,-\lambda)]\,d\tau+\frac{p_1(\lambda)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda b}$$

$$p_1(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_1(x)\cos\lambda x\,dx,\quad p_1(0)=0$$

Исключая $H_1(\tau)$, полагая $G_1(\lambda)=\lambda^{-1}\psi_1(\lambda)$ и применяя преобразование Куммера, после некоторых вычислений получаем интегральное уравнение ($M_{\lambda,\,\nu}(z)$ — функция Уиттекера [2])

$$\psi_1(\lambda)=\int_0^\infty K(\lambda,u)\,\psi_1(u)\,du+\frac{p_1(\lambda)}{\operatorname{sh}\lambda b}\quad(\lambda>0)\tag{2.4}$$

$$K(\lambda,u)=-\frac{e^{-\lambda b}}{4u\operatorname{sh}\lambda b}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\operatorname{sh}\tau(\pi-\sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0\operatorname{sh}\pi\tau}W(\lambda,u;\tau)\,d\tau$$

$$W(\lambda,u;\tau)=[M_{i\tau,\,{}^1/_2}(2iua)+M_{i\tau,\,{}^1/_2}(-2iua)]\,M_{i\tau,\,{}^1/_2}(2i\lambda a)$$

Для выделения главной части ядра $K(\lambda,u)$ при $\lambda+u\to\infty$ и $0<\sigma_0\leqslant\pi/2$ применим равенство

$$\frac{\operatorname{sh}\tau(\pi-\sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0}=2\operatorname{sh}[|\tau|(\pi-\sigma_0)]\sum_{n=0}^{N}e^{-(2n+1)\sigma_0|\tau|}+\frac{\operatorname{sh}\tau(\pi-\sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0}e^{-(2N+2)\sigma_0|\tau|}\tag{2.5}$$

представление [9]

$$M_{i\tau,\,{}^1/_2}(\alpha)\,M_{i\tau,\,{}^1/_2}(\beta)=\frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\pi\tau}\sqrt{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2i\rho\tau}\,e^{-{}^1/_2(\alpha+\beta)\operatorname{th}\rho}\,J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\operatorname{ch}\rho}\right)\frac{d\rho}{\operatorname{ch}\rho}\tag{2.6}$$

и вытекающее из него соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\rho\tau}\frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}M_{i\tau,\,{}^1/_2}(\alpha)\,M_{i\tau,\,{}^1/_2}(\beta)\,d\tau=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\operatorname{ch}\rho}e^{-{}^1/_2(\alpha+\beta)\operatorname{th}\rho}\,J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\operatorname{ch}\rho}\right)\tag{2.7}$$

Учитывая структуру функции $W(\lambda,u;\tau)$ и неравенство $|J_1(x)|<1$, при помощи представления (2.6) получаем

$$|W(\lambda,u;\pm\tau)|\leqslant 2a\sqrt{\lambda u}\,\tau^{-1}\operatorname{sh}\pi\tau\,[I_1(2a\sqrt{\lambda u})+1]\quad(\lambda,u\geqslant 0)\tag{2.8}$$

Можно установить, что при любом фиксированном σ_0 $(0<\sigma_0\leqslant\pi/2)$ однозначно определяются номер $N=N(\sigma_0)$ и число $\omega=\omega(\sigma_0)$ $(0\leqslant\omega<2\sigma_0)$, такие, что $(2N+2)\,\sigma_0=\pi-\omega$. Решение, удовлетворяющее этим условиям, имеет вид

$$N=\left[\frac{\pi}{2\sigma_0}\right]-1,\quad \omega=\pi-2\left[\frac{\pi}{2\sigma_0}\right]\sigma_0$$

Считая, что номер N в равенстве (2.5) выбран именно таким образом, введем следующие обозначения:

$$V(\lambda,u)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}\,\frac{\operatorname{sh}\tau(\pi-\sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0}W(\lambda,u;\tau)\,d\tau=V_N^{(1)}(\lambda,u)+V_N^{(2)}(\lambda,u)$$

$$V_N^{(1)}(\lambda,u)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}\,\frac{\operatorname{sh}\tau(\pi-\sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0}e^{-(2N+2)\sigma_0|\tau|}\,W(\lambda,u;\tau)\,d\tau$$

$$V_N^{(2)}(\lambda,u)=2\sum_{n=0}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}\operatorname{sh}[|\tau|(\pi-\sigma_0)]\,e^{-(2n+1)\sigma_0|\tau|}\,W(\lambda,u;\tau)\,d\tau$$

В соответствии с неравенством (2.8) имеем ($\psi(x)$ — пси-функция Эйлера [3])

$$|V_N^{(1)}(\lambda,u)|\leqslant\frac{a}{\sigma_0}\left[\psi\left(N+1+\frac{\pi}{2\sigma_0}\right)-\psi\left(N+2-\frac{\pi}{2\sigma_0}\right)\right]\sqrt{\lambda u}\,[I_1(2a\sqrt{\lambda u})+1]$$

Функцию $V_N^{(2)}(\lambda, u)$ запишем в виде

$$V_N^{(2)}(\lambda, u) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=1}^{3} T_n^{(m)}(\lambda, u)$$

$$T_n^{(1)}(\lambda, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau} e^{[\pi-(2n+2)\sigma_0]\tau} [W(\lambda, u; \tau) + W(\lambda, u; -\tau)]\, d\tau$$

$$T_n^{(2)}(\lambda, u) = -\int_{0}^{\infty} \frac{\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau} e^{-[\pi-(2n+2)\sigma_0]\tau} [W(\lambda, u; \tau) + W(\lambda, u; -\tau)]\, d\tau$$

$$T_n^{(3)}(\lambda, u) = -\int_{0}^{\infty} \frac{\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau} e^{-(\pi+2n\sigma_0)\tau} [W(\lambda, u; \tau) + W(\lambda, u; -\tau)]\, d\tau$$

С учетом оценки (2.8) имеем

$$|T_n^{(3)}(\lambda, u)| \leqslant \frac{4a\sqrt{\lambda u}}{\pi + 2n\sigma_0} [I_1(2a\sqrt{\lambda u}) + 1] \qquad (0 \leqslant n \leqslant N)$$

Пусть $\omega > 0$. В этом случае

$$\pi - (2n + 2)\sigma_0 \geqslant \omega > 0$$

$$|T_n^{(2)}(\lambda, u)| \leqslant \frac{4a\sqrt{\lambda u}}{\pi - (2n+2)\sigma_0} [I_1(2a\sqrt{\lambda u}) + 1] \qquad (0 \leqslant n \leqslant N) \tag{2.9}$$

Если $\omega = 0$, то $(2N + 2)\sigma_0 = \pi$, $(2n + 2)\sigma_0 < \pi$, $\pi - (2n + 2)\sigma_0 > 0$ и, следовательно, оценка (2.9) справедлива при $0 \leqslant n \leqslant N - 1$) (если $N \geqslant 1$). При $\omega = 0$ и $n = N$ имеем

$$(2N + 2)\sigma_0 = \pi, \quad T_N^{(2)}(\lambda, u) = 2a\sqrt{\lambda u}\, [I_1(2a\sqrt{\lambda u}) - J_1(2a\sqrt{\lambda u})]$$

Используя теперь рвенство (2.7), для величин $T_n^{(1)}(\lambda, u)$ получаем представление

$$T_n^{(1)}(\lambda, u) = P_n(\lambda, u) + P_n(\lambda, -u) + P_n(-\lambda, u) + P_n(-\lambda, -u)$$

$$P_n(\lambda, u) = -\frac{2a\sqrt{\lambda u}}{\sin(n+1)\sigma_0} \exp[a(\lambda + u)\operatorname{ctg}(n+1)\sigma_0]\, I_1\left(\frac{2a\sqrt{\lambda u}}{\sin(n+1)\sigma_0}\right)$$

Поскольку $(2N + 2)\sigma_0 = \pi - \omega$ $(0 \leqslant \omega < 2\sigma_0)$, то

$$0 < (n + 1)\sigma_0 \leqslant \pi/2 \ (0 \leqslant n \leqslant N), \quad \operatorname{ctg}(n + 1)\sigma_0 \geqslant 0$$

$$T_n^{(1)}(\lambda, u) \sim P_n(\lambda, u) \ (\lambda + u \to \infty, \ (n + 1)\sigma_0 < \pi/2)$$

и

$$T_n^{(1)}(\lambda, u) \sim -4a\sqrt{\lambda u}\, I_1(2a\sqrt{\lambda u}) \qquad (\lambda + u \to \infty)$$

если $(n + 1)\sigma_0 = \pi/2$, т. е. при $n = N$ $\omega = 0$.

Полученные оценки показывают, что в случае $0 < \sigma_0 < \pi/2$

$$V(\lambda, u) \sim P_0(\lambda, u) \ (\lambda + u \to \infty)$$

Для значения $\sigma_0 = \pi/2$ функция $V(\lambda, u)$ находится точно:

$$V(\lambda, u) = -2a\sqrt{\lambda u}\, [I_1(2a\sqrt{\lambda u}) - J_1(2a\sqrt{\lambda u})]$$

Следовательно, при $0 < \sigma_0 \leqslant \pi/2$

$$K(\lambda, u) \sim \frac{a}{2\sin\sigma_0} \frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{sh}\lambda b} \sqrt{\frac{\lambda}{u}}\, e^{a(\lambda+u)\operatorname{ctg}\sigma_0} I_1\left(\frac{2a\sqrt{\lambda u}}{\sin\sigma_0}\right) \qquad (\lambda + u \to \infty)$$

$$K(\lambda, \lambda) \sim \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{\pi\lambda\sin\sigma_0}} \frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{sh}\lambda b} e^{2\lambda a \operatorname{ctg} {}^1/_2\sigma_0} \qquad (\lambda \to \infty)$$

Очевидно, что для значений $\pi/2 < \sigma_0 < \pi$ приведенный способ получения асимптотики ядра $K(\lambda, u)$ неприменим. Соответствующую этому случаю оценку $K(\lambda, u)$ при $\lambda + u \to \infty$ получим исходя из равенства

$$\frac{\operatorname{sh}\tau(\pi - \sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0} = e^{(\pi-2\sigma_0)|\tau|} - e^{-\pi|\tau|} + \frac{\operatorname{sh}\tau(\pi - \sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0} e^{-2\sigma_0|\tau|}$$

Используя неравенства

$$\frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\pi\tau} \leqslant \operatorname{ch}\pi\tau, \quad e^{-2\sigma_0\tau}\operatorname{ch}\pi\tau \leqslant 1 \qquad \left(\tau \geqslant 0, \ \sigma_0 > \frac{\pi}{2}\right)$$

и оценку

$$|M_{\pm i\tau,\, {}^1/_2}(is)| \leqslant s\, \frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\pi\tau}$$

вытекающую из интегрального представления функции Уиттекера [3]

$$M_{\pm i\tau,\, {}^1/_2}(is) = \frac{1}{2}\, is\, \frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\pi\tau} \int\limits_{-1}^{1} (1+t)^{\mp i\tau}(1-t)^{\pm i\tau} e^{{}^1/_2 ist}\, dt$$

имеем следующие неравенства:

$$|W(\lambda, u; \pm\tau)| \leqslant 8a^2\lambda u \left(\frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\pi\tau}\right)^2 \quad (\lambda, u \geqslant 0) \tag{2.10}$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}\, \frac{\operatorname{sh}\tau(\pi-\sigma_0)}{\operatorname{sh}\tau\sigma_0}\, e^{-2\sigma_0|\tau|}\, W(\lambda, u; \tau)\, d\tau\right| \leqslant \frac{8a^2}{\sigma_0}\, \lambda u \operatorname{tg}\frac{\pi(\pi-\sigma_0)}{2\sigma_0}$$

Далее, при помощи неравенства (2.8), (2.10), $\operatorname{sh}\pi\tau \leqslant \pi\tau\operatorname{ch}\pi\tau$ получаем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}\, e^{-\pi|\tau|}\, W(\lambda, u; \tau)\, d\tau\right| \leqslant \frac{8a^2\lambda u}{\pi} \int\limits_{0}^{a\sqrt{\lambda u}} \frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\pi\tau}\, e^{-\pi\tau}\, d\tau +$$

$$+ 4a\sqrt{\lambda u}\,[I_1(2a\sqrt{\lambda u}) + 1] \int\limits_{a\sqrt{\lambda u}}^{\infty} e^{-\pi\tau}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8a^3}{\pi}(\lambda u)^{3/2} + \frac{4a}{\pi}\sqrt{\lambda u}\,[I_1(2a\sqrt{\lambda u}) + 1]\, e^{-\pi a\sqrt{\lambda u}}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$S(\lambda, u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}\, e^{(\pi-2\sigma_0)|\tau|}\, W(\lambda, u; \tau)\, d\tau \quad (\lambda, u \geqslant 0)$$

Полагая в нем $\sigma_0 = \pi/2 + \varepsilon_0$ $(0 < \varepsilon_0 < \pi/2)$, учитывая структуру функции $W(\lambda, u; \tau)$, равенство (2.6) и интегрируя по τ, находим

$$S(\lambda, u) = S_1(\lambda, u) + S_1(\lambda, -u)$$

$$S_1(\lambda, u) = -\frac{2a\varepsilon_0}{\pi}\sqrt{\lambda u} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ia(\lambda+u)\operatorname{th}\rho}\, I_1\left(\frac{2a\sqrt{\lambda u}}{\operatorname{ch}\rho}\right) \frac{d\rho}{(\varepsilon_0^2+\rho^2)\operatorname{ch}\rho}$$

Используя неравенства $|J_1(x)| < 1$, $\varepsilon_0^2 + \rho^2 \geqslant \varepsilon_0^2$, имеем следующую оценку:

$$|S_1(\lambda; -u)| \leqslant 2a\varepsilon_0^{-1}\sqrt{\lambda u}$$

Для оценки $S_1(\lambda, u)$ применим метод контурного интегрирования. С этой целью положим $z = \rho + i\delta$ и рассмотрим область $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, где Ω_1 — прямоугольник $(-R < \rho < R,\ 0 < \delta < \pi/2)$, Ω_2 — полукруг $(\rho^2 + \delta^2 < \gamma^2)$, причем $\delta > 0$, $\gamma < \pi/2 - \varepsilon_0$, $\gamma < R$, $\gamma > 0$.

Введем функцию

$$f(z) = -e^{-ia(\lambda+u)\operatorname{cth}z}\, J_1\left(\frac{2a\sqrt{\lambda u}}{\operatorname{sh}z}\right) \frac{1}{[(z-i\pi/2)^2+\varepsilon_0^2]\operatorname{sh}z}$$

аналитическую в области Ω и на ее границе Γ, кроме точки $z = i(\pi/2 - \varepsilon_0) \in \Omega$. Применяя теорему о вычетах к интегралу от функции $f(z)$ по контуру Γ и переходя к пределу при $\gamma \to 0$, $R \to \infty$, находим

$$S_1(\lambda, u) = -\frac{2a}{\cos\varepsilon_0}\sqrt{\lambda u}\, e^{-a(\lambda+u)\operatorname{tg}\varepsilon_0}\, I_1\left(\frac{2a\sqrt{\lambda u}}{\cos\varepsilon_0}\right) + O(\sqrt{\lambda u})$$

Следовательно, при $\pi/2 < \sigma_0 < \pi$

$$K(\lambda, u) = \sqrt{\frac{\lambda}{u}}\, \frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{sh}\lambda b}\left[\frac{a}{2\sin\sigma_0}\, e^{a(\lambda+u)\operatorname{ctg}\sigma_0}\, I_1\left(\frac{2a\sqrt{\lambda u}}{\sin\sigma_0}\right) + O(\lambda u)\right]$$

$(\lambda + u \to \infty)$

$$K(\lambda, \lambda) \sim \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{\pi\lambda\sin\sigma_0}}\, \frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{sh}\lambda b}\, e^{2\lambda a\operatorname{ctg}{}^1/_2\sigma_0} \quad (\lambda \to \infty)$$

Полученные оценки ядра $K(\lambda, u)$ при $\lambda + u \to \infty$ показывают, что уравнение (2.4) заменой искомой функции $\psi_1(\lambda)$ сводится к фредгольмову (ядро и свободный член суммируемы с квадратом) лишь в случае $b > a \operatorname{ctg} {}^1/_2\sigma_0$.

Геометрически это условие означает, что контур луночки должен целиком лежать в полосе $-b < y < b$.

Преобразование уравнения (2.4) к фредгольмову достигается, например, заменой

$$\psi_1(\lambda) = e^{-\lambda a \operatorname{ctg}{}^1/_2\sigma_0} \varphi_1(\lambda)$$

В некоторых частных случаях ядро интегрального уравнения (2.4) вычисляется в замкнутом виде. При $\sigma_0 = \pi/3$ оно имеет вид

$$K(\lambda, u) = \frac{2a}{\sqrt{3}} \frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{sh} \lambda b} \sqrt{\frac{\lambda}{u}} \left[\operatorname{ch} \frac{a(\lambda+u)}{\sqrt{3}} I_1\left(\frac{4a\sqrt{\lambda u}}{\sqrt{3}}\right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} \frac{a(\lambda-u)}{\sqrt{3}} J_1\left(\frac{4a\sqrt{\lambda u}}{\sqrt{3}}\right)\right] \geqslant 0$$

а при $\sigma_0 = \pi/2$

$$K(\lambda, u) = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{u}} \frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{sh}\lambda b}[I_1(2a\sqrt{\lambda u}) - J_1(2a\sqrt{\lambda u})] \geqslant 0$$

Выясним поведение решения задачи при $\rho \to \infty$ ($\rho = \sqrt{x^2+y^2}$), считая, например, что

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{1+x^{1+\varepsilon}} \ (1 \leqslant \varepsilon < 2), \quad |\varphi(x)| \leqslant M, \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = C < \infty$$

В этом случае из условия

$$\int_0^\infty f_1(x)\,dx = 0$$

следует

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{p_1(\lambda)}{\lambda^\varepsilon} = -\frac{2}{\pi} C \int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^{1+\varepsilon}}\,du \quad (1 \leqslant \varepsilon < 2)$$

Следовательно, $p_1(\lambda) = O(\lambda^\varepsilon)$ ($\lambda \to 0$, $1 \leqslant \varepsilon < 2$) и при $\varepsilon = 1$ имеем

$$G_1(\lambda) = C_1\lambda^{-1} + g_1(\lambda), \ g_1(\lambda) = o(\lambda^{-1}) \ (\lambda \to 0, \ C_1 = \text{const})$$

$$\int_0^\infty G_1(\lambda)(\operatorname{ch}\lambda y \cos\lambda x - \cos\lambda a)\,d\lambda = \int_0^\infty G_1(\lambda)(\cos\lambda x - \cos\lambda a)\,d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty G_1(\lambda)(\operatorname{ch}\lambda y - 1)\cos\lambda x\,d\lambda = C_1 \ln\frac{a}{|x|} + O(1) \quad (\rho\to\infty)$$

$$w = C_1 \ln\frac{a}{|x|} + O(1), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\rho\to\infty)$$

При $\varepsilon > 1$ особенность функции $G_1(\lambda)$ в нуле интегрируема, и тогда

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_0^\infty G_1(\lambda)(\operatorname{ch}\lambda y\cos\lambda x - \cos\lambda a)\,d\lambda = -\int_0^\infty G_1(\lambda)\cos\lambda a\,d\lambda$$

$$w = O(1), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\rho\to\infty)$$

Рассмотрим теперь антисимметричную задачу, когда искомая функция w нечетна по координате y и

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\pm b} = f_2(x), \quad f_2(-x) = f_2(x)$$

Условие статики в этом случае удовлетворяется тождественно.

Представляя гармоническую функцию w в виде

$$w = \int_0^\infty G_2(\lambda)\operatorname{sh}\lambda y\cos\lambda x\,d\lambda + \int_0^\infty H_2(\tau)\operatorname{sh}\tau\sigma\cos\tau\alpha\,d\tau$$

и удовлетворяя граничным условиям задачи, получаем соотношения

$$G_2(\lambda) = \frac{e^{-\lambda b}}{\operatorname{ch} \lambda b} \int_0^\infty H_2(\tau)\,[A(\tau, \lambda) + A(\tau, -\lambda)]\, d\tau + \frac{p_2(\lambda)}{\lambda \operatorname{ch} \lambda b}$$

$$H_2(\tau) = \frac{\operatorname{ch} \tau(\pi - \sigma_0)}{\operatorname{ch} \tau\sigma_0} \int_0^\infty G_2(\lambda)\,[C(\lambda, \tau) - C(\lambda, -\tau)]\, d\lambda$$

$$p_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_2(x) \cos \lambda x\, dx$$

Вопрос о получении интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции $G_2(\lambda)$ и необходимости в связи с этим условия $b > a \operatorname{ctg} {}^1/_2\sigma_0$ решается точно так же, как и в симметричной задаче.

Заметим также, что если функция $f_2(x)$ абсолютно интегрируема, то

$$\frac{\partial w}{\partial x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\rho \to \infty)$$

Исследуем поведение касательных напряжений $\tau_{yz} = G\partial w/\partial y$ при подходе к угловым точкам луночки $y = 0$, $x = \pm a$ $(\alpha \to \pm\infty)$. Принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{a} \qquad (\sigma = 0\ (y = 0,\ |x| > a))$$

находим

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{\substack{y=0,\ |x|>a \\ (\sigma=0)}} = \int_0^\infty \lambda G_2(\lambda) \cos \lambda x\, d\lambda + \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{a} \int_0^\infty \tau H_2(\tau) \cos \tau\alpha\, d\tau$$

Используя теперь выражение для $H_2(\tau)$ и четность функции $\tau\,[C(\lambda, \tau) - C(\lambda, -\tau)]$ по τ, после некоторых преобразований получаем

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{\substack{y=0,\ |x|>a \\ (\sigma=0)}} = \int_0^\infty \lambda G_2(\lambda) \cos \lambda x\, d\lambda + \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{2} \int_0^\infty \lambda e^{i\lambda a}\, [R_\lambda^+(\alpha) + $$

$$+ R_\lambda^-(\alpha)]\, G_2(\lambda)\, d\lambda$$

$$R_\lambda^\pm(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau \operatorname{ch} \tau(\pi - \sigma_0)}{\operatorname{sh} \pi\tau \operatorname{ch} \tau\sigma_0}\, \Phi(1 \pm i\tau, 2; -2i\lambda a)\, e^{i\tau\alpha}\, d\tau$$

Учитывая асимптотическое поведение целой по параметру c функции $\Phi(c, \gamma; z)$ при $c \to \infty$ применяя теорему о вычетах, имеем

$$R_\lambda^\pm(\alpha) = \left(\frac{\pi}{\sigma_0}\right)^2 \sum_{n=1}^\infty (2n-1)\, \Phi\left(1 \mp \frac{\pi(2n-1)}{2\sigma_0},\ 2;\ -2i\lambda a\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\pi\alpha(2n-1)}{2\sigma_0}\right] - 2\sum_{n=1}^\infty n\Phi(1 \mp n,\ 2;\ -2i\lambda a)\, e^{-n\alpha}$$

Выделяя главную часть $R_\lambda^\pm(\alpha)$ при $\alpha \to \infty$ (соответствующую значению $n = 1$) и используя равенства

$$\Phi(2, 2; -2i\lambda a) = e^{-2i\lambda a}, \quad \Phi(0, 2; -2i\lambda a) = 1$$

приходим к следующим выводам.

При $\sigma_0 < \pi/2$ напряжения τ_{yz} в угловых точках $x = \pm a$, $\mp y = 0$ области D равны нулю. В случае $\sigma_0 = \pi/2$ напряжения τ_{yz} ограничены и

$$\lim_{x \to \pm a} \left.\tau_{yz}\right|_{\substack{\sigma=0 \\ (y=0)}} = 2G \int_0^\infty \lambda G_2(\lambda) \cos \lambda a\, d\lambda$$

При $\sigma_0 > \pi/2$ напряжения τ_{yz} в угловых точках области D неограниченно возрастают по абсолютной величине, причем

$$\left.\tau_{yz}\right|_{\substack{\sigma=0 \\ (y=0)}} \sim c\,(x - a)^{-1+{}^1/_2\pi/\sigma_0} \quad (x \to a,\ c = \mathrm{const})$$

Выявленная особенность напряжений в угловых точках области D является максимальной и порядок ее точно совпадает с порядком особенности в задаче о продольном сдвиге клина $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$, $-\infty < z < \infty$, $0 < r < \infty$ и задачах о кручении и изгибе стержней с сечением в виде симметричной луночки [1, 6].

Путем аналогичных построений можно убедиться, что в рассмотренной выше симметричной по координате y задаче напряжения в углах луночки равны нулю при $0 < \sigma_0 \leqslant \pi$.

Из соображений симметрии следует, что полученные результаты дают одновременно решения первой основной и смешанной задач антиплоской деформации полосы $0 \leqslant y \leqslant b$ с сегментной выемкой. Это объясняет отсутствие особенностей напряжений в угловых точках области D в симметричной задаче и наличие их в антисимметричной задаче. Действительно, напряжения в первой основной задаче антиплоской деформации в окрестности угловой точки с углом раствора $\sigma_0 \leqslant \pi$ ограничены [6, 8, 10]. В смешанной же задаче угол раствора $\sigma_0 = \pi/2$ разграничивает углы, для которых напряжения при приближении к угловой точке стремятся к нулю ($\sigma_0 < \pi/2$), от углов, для которых напряжения неограниченно возрастают ($\sigma_0 > \pi/2$) [1, 6, 8, 10].

Изложенная схема решения симметричной по координате x антиплоской задачи легко обобщается и на случай, когда вместо области D рассматривается полоса $-b \leqslant y \leqslant h$ с луночным отверстием $-\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Гармоническую функцию w можно выбрать в виде

$$w = \int_0^\infty G_1(\lambda)(\operatorname{ch}\lambda y\cos\lambda x - \cos\lambda a)\,d\lambda + \int_0^\infty G_2(\lambda)\operatorname{sh}\lambda y\cos\lambda x\,d\lambda + \int_0^\infty H_1(\tau)\operatorname{ch}\tau\sigma\cos\tau\alpha\,d\tau + \int_0^\infty H_2(\tau)\operatorname{sh}\tau\sigma\cos\tau\alpha\,d\tau + \mathrm{const} \tag{2.11}$$

и вместо одного интегрального уравнения (2.4) получить систему двух интегральных уравнений второго рода относительно функций $\psi_i(\lambda) = \lambda G_i(\lambda)$ $(i=1, 2)$. Исследование поведения ядер этих уравнений при $\lambda + u \to \infty$ аналогично приведенному выше.

Сказанное в отношении симметричных по координате x задач в полной мере переносится и на антисимметричные по координате x задачи. В этом случае в формуле (2.11) надо заменить $\cos\lambda x$ на $\sin\lambda x$, а $\cos\tau\alpha$ на $\sin\tau\alpha$.

Суперпозиция решений указанных задач дает возможность рассматривать и задачи, в которых задаваемые нагрузки являются функциями общего вида. Кроме того, приведенные в п. 1 равенства позволяют исследовать задачу Дирихле и основные смешанные задачи антиплоской деформации для указанных областей, а в сочетании с методом парных интегральных уравнений — и собственно смешанные (контактные) задачи. Заметим, что в ряде случаев возникает необходимость во введении в общее решение логарифмического слагаемого вида

$$B_0 \ln\frac{a^2}{x^2+y^2} \quad (B_0 = \mathrm{const})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. 294 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970. 327 с.
10. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.

Харьков

Поступила в редакцию
12.V.1983