Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 532.546 + 532.5 : 532.135

К ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАДАЧИ О ЦЕЛИКАХ ОСТАТОЧНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ НЕФТИ

Ентов В. М., Панько С. В.

Дается вариационная формулировка задачи определения предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти при вытеснении ее водой из слоисто-неоднородного пласта. Показано, что основные приближенные постановки, допускающие эффективное решение методами плоской задачи нелинейной фильтрации [1—5], естественным образом следуют из предложенной вариационной формулировки при ограничении класса функций, на котором ищется решение. На основе вариационной формулировки получены некоторые оценки объема части пласта, из которой вытеснена нефть.

1. Рассмотрим задачу вытеснения вязкопластичной нефти водой из слоисто-неоднородного пласта постоянной мощности H, проницаемость которого $k(z)$ — монотонно убывающая функция координаты z, отсчитываемой от подошвы к кровле пласта (кровля и подошва пласта непроницаемы). Будем полагать, что рассматриваемая область D ограничена перпендикулярной к плоскости $z=0$ цилиндрической поверхностью Σ, на части которой Σ_p (поверхности питания), вообще говоря, многосвязной, задано давление p, не зависящее от z, $p = P(x, y)$, остальная же часть границы Σ_q непроницаема. На заключительной стадии в пласте движется лишь вода, вытеснившая нефть отовсюду, где градиент давления в потоке воды больше локального значения предельного градиента для нефти $G(z)$. Далее предполагается, что для вязкопластичных нефтей выполняется известное соотношение $k(z)G^2(z) = k_0G_0^2 \equiv C = \text{const}$.

При такой постановке, отвечающей послойному отмыву пласта, он, очевидно, разбивается на две области, называемые далее областью течения и целиком остаточной нефти и характеризуемые тем, что в первой из них $w > 0$, $(x, y, z) \in D_1$, во второй $w = 0$, $(x, y, z) \in D_2$, где $\mathbf{w}$ — скорость фильтрации. В силу предположения о монотонном убывании проницаемости от подошвы к кровле вдоль каждой из вертикалей целик будет располагаться над зоной течений. Уравнение границы раздела между потоком воды и целиком остаточной нефти запишем в виде $z = h(x, y)$, формально полагая $h = 0$ в тех точках, где целик занимает всю мощность пласта, и $h = H$ там, где он отсутствует и по всей мощности пласта движется лишь вода. При этом функция $h(x, y)$ оказывается однозначно определенной в плоской области Δ, вырезаемой поверхностью Σ на плоскости $z = 0$; область Δ разбивается на три непересекающиеся подобласти:

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$$
$$h = H \ (x, y) \in \Delta_1; \ 0 < h < H \ (x, y) \in \Delta_2; \ h = 0 \ (x, y) \in \Delta_3$$

Для принятой схемы уравнения движения имеют вид [1]

$$\mathbf{w} = -(k(z)/\mu)\nabla p, \ |\nabla p| > G(z), \ (x, y, z) \in D_1; \ \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \tag{1.1}$$
$$w \equiv 0, \ |\nabla p| \leqslant G(z), \ (x, y, z) \in D_2, \ \mu = \text{const}$$

Поэтому сформулированная задача сводится к нахождению решения уравнения

$$(1.2)\qquad \operatorname{div}\,(k\,(z)\,\operatorname{grad}\,p) = 0$$

в области движения воды D_1, удовлетворяющего условию непротекания на частях подошвы и кровли, граничащих с областью течения, и на границе Σ_q

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &\partial p/\partial z = 0,\ \ z = 0\ (x, y) \in \Delta_1 \cup \Delta_2;\ \ z = H\,(x, y) \in \Delta_1 \\ &\partial p/\partial n = 0 \quad (x, y, z) \in \Sigma_q \end{aligned}$$

а также условиям на неизвестной границе раздела нефть — вода

$$(1.4)\qquad \partial p/\partial n = 0,\ \ |\ \nabla p\ | = G\,(z);\ \ z = h\,(x, y),\quad (x, y) \in \Delta_2$$

При этом решение должно принимать известные значения на поверхности питания Σ_p.

Покажем, что исходная задача допускает вариационную формулировку. Рассмотрим функционал

$$(1.5)\qquad J = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta}\int\limits_{0}^{h(x,y)} [k\,(z)\,|\,\nabla p\,|^2 - k_0 G_0^2]\,dz\,dx\,dy$$

и вычислим его первую вариацию при варьировании $p\,(x, y, z)$ и $h\,(x, y)$. При этом можно поступать двояко. Если считать, что функция $p\,(x, y, z)$ определена во всем слое $\Delta \times [0, H]$, причем в область целика $z > h\,(x, y)$ она продолжается гладко, то при фиксированном $p\,(x, y, z)$ речь идет о варьировании верхнего предела интеграла и имеем, очевидно

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} \delta J = {} & \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_2} [k\,(z)\,|\,\nabla p\,|^2 - k_0 G_0^2]_{z=h(x,y)}\,\delta h\,dx\,dy\ - \\ & - \iint\limits_{\Delta}\int\limits_{0}^{h(x,y)} \nabla\,(k\,(z)\,\nabla p)\,\delta p\,dz\,dx\,dy + \iint\limits_{S} k\,(z)\,\frac{\partial p}{\partial n}\,\delta p\,dS \end{aligned}$$

где δp и δh — независимые вариации.

Можно, однако, считать, что функция $p\,(x, y, z)$ определена только при $0 \leqslant z \leqslant h\,(x, y)$. Тогда варьирование $h\,(x, y)$ неизбежно сопряжено с варьированием $p\,(x, y, z)$ и по формуле варьирования интеграла с переменной областью интегрирования [6] имеем

$$(1.6')\qquad \begin{aligned} \delta J = {} & -\iint\limits_{\Delta}\int\limits_{0}^{h} \nabla\,(k\nabla p)\,\delta^* p\,dz\,dx\,dy + \iint\limits_{S} k\,(\nabla p\mathbf{n})\,\delta p\,dS\ + \\ & + \frac{1}{2}\iint\limits_{S} [k\,(z)\,|\,\nabla p\,|^2 - C]\,\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\,dS \end{aligned}$$

Здесь $\delta^* p$ и $\delta\mathbf{x}$ — независимые скалярная и векторная вариации, определенные в D, S—поверхность, ограничивающая область движения воды и состоящая из частей поверхности Σ, участков кровли и подошвы пласта, и границы между целиком и областью движения воды. Полагая вариацию $\delta\mathbf{x}$ («смещение точки области»), равной нулю на границе области D всюду, кроме поверхности целика $z = h\,(x, y)$, где $\delta\mathbf{x} = \mathbf{k}\delta h$, можно убедиться в том, что выражения (1.6) и (1.6′) совпадают.

Очевидно, если пара функций $\{h\,(x, y),\ p\,(x, y, z)\}$; $(x, y) \in \Delta$, $0 \leqslant z \leqslant h$ дает решение задачи об отыскании целика остаточной нефти (1.1) — (1.4), то вариация δJ обращается в нуль. Обратно, из требования обращения в нуль вариации δJ при произвольном варьировании границы δh и давления δp вне поверхности питания имеем

(1.7) $$\nabla(k(z)\nabla p) = 0, \quad (x, y, z) \in D_1$$
$$|\nabla p| = G(h), \quad \partial p/\partial n = 0, \quad 0 < z = h(x, y) < H(x, y) \in \Delta_2$$
$$\partial p/\partial z = 0, \quad z = 0, \quad (x, y) \in \Delta_1 \cup \Delta_2; \quad z = H, \quad (x, y) \in \Delta_1$$

т. е. сформулированную выше задачу.

Если граница целика $h(x, y)$ фиксирована, то функционал превращается в полный дополнительный потенциал диссипации фильтрационного потока и функция $p(x, y, z)$, являющаяся решением задачи (1.7) со снятым условием $|\nabla p|_h = G(h)$, доставляет ему, как известно, минимум (см., например, [5]). Обозначим эту функцию через p_h. На классе функций p_h функционал J превращается в функционал от $h(x, y)$

(1.8) $$J[p_h, h] = J^*[h] =$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta}\int\limits_0^h k|\nabla p|^2\, dz\, dx\, dy - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta}\int\limits_0^h k_0 G_0^2\, dz\, dx\, dy$$

Если поверхность Σ_p можно подразделить на две части: Σ_p^+ и Σ_p^- — вход и выход фильтрационного потока, на которых давление принимает постоянные значения p^+ и p^-, $p^+ > p^-$, соответственно, то первый интеграл в формуле (1.8) равен $Q(p^+ - p^-)/2$, где Q — расход фильтрационного потока. В общем случае он равен половине полной мощности N, диссипируемой фильтрационным потоком (здесь положено $\mu = 1$).

Второй член формулы (1.8) равен $^1/_2 k_0 G_0^2 V_+$, где V_+ — объем области, занятой движущейся водой. Таким образом

(1.9) $$J^*[h] = {}^1/_2 N(h) - {}^1/_2 C V_+(h), \quad C = k_0 G_0^2$$

Из общих свойств линейных фильтрационных течений следует, что функционал N монотонно зависит от h:

$$N[h^+] \geqslant N[h^-], \quad h^+(x, y) \geqslant h^-(x, y)$$

(суммарная диссипация фильтрационного потока при заданных значениях давления на поверхностях питания увеличивается, если область фильтрации расширяется за счет отодвигания непроницаемой границы [1, 5]). Очевидно, свойством монотонности обладает и функционал $V_+[h]$.

Вариация δJ^* при варьировании $h(x, y)$ складывается из вариации, непосредственно обсусловленной деформацией границы, и вариации, вызванной изменением поля p_h. Однако поскольку поле p_h само является решением вариационной задачи, соответствующая первая вариация обращается в нуль. Имеем при этом

$$\delta J^* = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_2} k(|\nabla p_h|^2 - G^2)_{z=h}\, \delta h\, dx\, dy =$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_2} k|\nabla p|^2_{z=h}\delta h\, dx\, dy - \frac{1}{2} C\iint\limits_{\Delta_2} \delta h\, dx\, dy$$

Условие обращения в нуль вариации δJ^* вновь дает дополнительное граничное условие

$$|\nabla p_h| = G(h), \quad z = h(x, y)$$

служащее для отыскания неизвестной границы.

Можно показать, что на функциях p_h искомое решение $h(x, y)$ доставляет максимум функционалу $J^*[h]$, во всяком случае, для достаточно близких поверхностей $h(x, y)$.

Действительно, пусть пара $\{p_0(x, y, z), h_0(x, y)\}$ — решение задачи. Рассмотрим вариацию границы целика, полагая

$$h = h_0(x, y) + \varepsilon\eta(x, y), \ \varepsilon \geqslant 0$$

В качестве пробного поля давления в деформированной области D_h возьмем поле

$$p_h^* = p_0(x, y, z), \quad 0 \leqslant z \leqslant \min\{h_0, h\}$$
$$p_h^* = p_0(x, y, h_0), \quad h_0 \leqslant z \leqslant h_0 + \varepsilon\eta$$

Пусть p_h — истинное поле давления для деформированной области. В соответствии с общим свойством минимальности дополнительного потенциала диссипации на решениях

(1.10) $$\iiint\limits_{D_h} k(z)\,|\nabla p_h|^2\,dV \leqslant \iiint\limits_{D_h} k(z)\,|\nabla p_h^*|^2\,dV$$

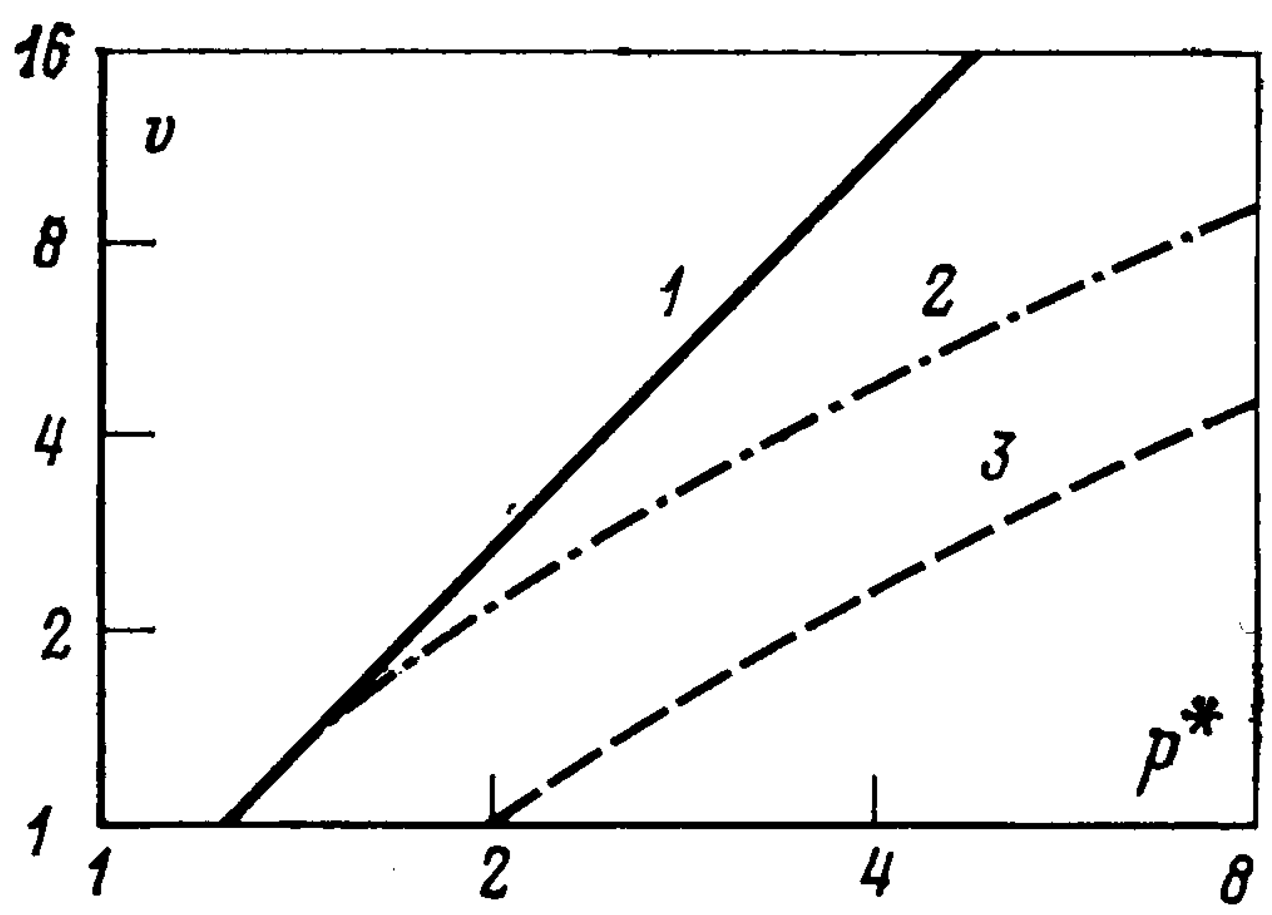
С другой стороны, для пробного поля

(1.11) $$J[p_h^*, h] - J[p_0, h_0] = \iint\limits_{\Delta_2^+}\int\limits_{h_0}^{h_0+\varepsilon\eta} k(z)\,[|\nabla p_h^*|^2 - G^2(z)]\,dz -$$
$$- \iint\limits_{\Delta_2^-}\Big[\int\limits_{h_0+\varepsilon\eta}^{h_0} k(z)\,[|\nabla p_0|^2 - G^2(z)]\,dz \leqslant \iint\limits_{\Delta_2^+} k(z)\,[|\nabla p_h^*|^2 - G^2(z)]\,dz$$

Здесь $\Delta_2^\pm$ — те подобласти области Δ_2, в которых вариация η имеет соответствующий знак. В слое $h_0 \leqslant z \leqslant h_0 + \varepsilon\eta\,|\,\nabla p_h^*\,| \leqslant |\,\nabla p_0(x, y, h_0)\,| \leqslant G(h_0) \leqslant G(z)$, так что интеграл в правой части неравенства (1.11) неположителен. Поэтому с учетом (1.10) и (1.11) имеем

$$J^*[h] \leqslant J[p_h^*, h] \leqslant J[p_{h_0}, h_0]$$

Таким образом, решение исходной задачи сводится к минимаксной задаче: найти функцию $h(x, y)$ такую, что минимум интеграла (1.4) по всем допустимым $p(x, y, z)$ принимает максимальное значение.



Заметим, что из выражения (1.9), учитывая положительность подынтегрального выражения в (1.8), имеем оценку

(1.12) $$V_+[h] \leqslant C^{-1}N[h] \leqslant C^{-1}N[H]$$

Здесь $N[H]$ — мощность диссипации для пласта, в котором движение воды происходит по всей толщине пласта ($h \equiv H$). Поскольку эта величина находится из решения стандартной задачи линейной фильтрации, простая оценка (1.12) может оказаться весьма полезной. Так, например, для течения к скважине радиуса ρ от прямолинейного контура питания имеем

$$Q_0 = \frac{2\pi k^0 H}{\mu}\,\frac{p^+ - p^-}{\ln(2a/\rho)}, \qquad N = \frac{2\pi k^0 H}{\mu}\,\frac{(p^+ - p^-)^2}{\ln(2a/\rho)}$$

где k^0 — средняя по мощности проницаемость пласта, a — расстояние от контура питания до скважины. Тогда в силу (1.12)

(1.13) $$V_+ \leqslant \frac{\mu N}{k_0 G_0^2} \leqslant \frac{2\pi k^0}{k_0}\,\frac{Ha^2}{\ln(2a/\rho)}\left(\frac{p^+ - p^-}{aG}\right)^2$$

Оценке (1.13) (для однородного пласта, $k^0 = k_0$ и $a/\rho = 10^3$) соответствует прямая *1* на фигуре. Как будет видно из последующего, данная оценка является весьма грубой.

2. Рассмотрим сформулированную минимаксную задачу на классе полей давления, не зависящих от координаты z, $p = p(x, y)$. Тогда имеем

$$J = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta} (\nabla p(x, y))^2 \int\limits_0^h k(z)\, dz\, dx\, dy - \frac{1}{2} C \iint\limits_{\Delta} h\, dx\, dy \tag{2.1}$$

Требование минимальности J при фиксированном $h(x, y)$ дает

$$\nabla (K(h) \nabla p(x, y)) = 0; \; p(x, y) = f, \; (x, y) \in \Sigma_p \tag{2.2}$$

$$\partial p/\partial n = 0, \quad (x, y) \in \Sigma_q; \quad K(h) = \int\limits_0^h k(z)\, dz$$

Максимизируя теперь функционал (2.1) по h с учетом (2.2), получим

$$\delta J = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta} [K(h) |\nabla p|^2 - k(h) G^2(h)]\, \delta h\, dx\, dy \tag{2.3}$$

Вариация δh произвольна при $0 < h < H$; $\delta h > 0$ при $h = 0$, $\delta h < 0$ при $h = H$. Таким образом, условие максимальности J дает

$$| \nabla p |^2 = G^2(h), \; 0 < h < H; \; K(h)(| \nabla p |^2 - G^2(h)) \leqslant 0, \tag{2.4}$$
$$h = 0$$
$$| \nabla p |^2 - G^2(h) \geqslant 0, \; h = H$$

Задача (2.3), (2.4) совпадает с задачей отыскания целиков в слоисто-неоднородных пластах в предположении, что давление по толщине пласта распределено по гидростатическому закону (пропластки обладают идеальной сообщаемостью), сформулированной в [1]. Она приводится к плоской задаче нелинейной фильтрации и в ряде случаев допускает эффективное решение [1, 2]. Из приведенных рассуждений видно, что соответствующее решение (h^*, p^*) доставляет максимум минимума функционала J на классе функций p, не зависящих от z. Таким образом

$$J_0 = \max_h \min_p J \leqslant J^* = J[h^*, p^*]$$

3. Рассмотрим теперь функционал J, задаваемый формулой (1.5), на классе ступенчатых функций $h(x, y)$, принимающих только два различных значения

$$h = 0, \; (x, y) \in \Delta_3 = \Delta \setminus \Delta_1; \; h = H, \; (x, y) \in \Delta_1 \tag{3.1}$$

При этом часть Γ_0 границы области течения Δ_1 совпадает с контуром питания Γ_p и фиксированной непроницаемой границей Γ_q, а часть Γ_1 неизвестна. Имеем

$$J = J_1 = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_1}\int\limits_0^H [k(z) |\nabla p|^2 - C]\, dz\, dx\, dy \tag{3.2}$$

Составляя вариацию δJ_1, получим

$$\delta J_1 = -\iint\limits_{\Delta_1}\int\limits_0^H \nabla (k(z) \nabla p)\, \delta^* p\, dz\, dx\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}\int\limits_0^H k(z) \frac{\partial p}{\partial n} \delta^* p\, dz\, dl + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1} \mathbf{n} \delta \mathbf{x} \int\limits_0^H [k(z) |\nabla p|^2 - C]\, dz\, dl$$

Приравнивая вариацию δJ_1 нулю, имеем

(3.3)
$$\int_0^H \nabla (k(z) \nabla p)\, dz = 0, \qquad (x, y) \in \Delta_1;$$
$$p = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma_p$$
$$\int_0^H k(z) [|\nabla p|^2 - G^2]\, dz = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \qquad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_q$$

Если заданное на контуре питания давление не зависит от z, то задача (3.3) допускает решение $p = p(x, y)$ и в результате приходим к краевой задаче

(3.4)
$$\Delta p = 0,\ (x, y) \in \Delta_1;\ p(x, y) = f(x, y),\ (x, y) \in \Gamma_p$$
$$\partial p / \partial n = 0,\ (x, y) \in \Gamma_q'$$
$$|\nabla p|^2 = C/k^0,\ \partial p / \partial n = 0,\ (x, y) \in \Gamma_1$$

Это — известная плоская постановка задачи о целиках в однородных пластах [3, 4, 6], эффективно решаемая методами теории струй. Поскольку в соответствующей вариационной формулировке сужен класс допустимых функций $h(x, y)$, получающиеся решения дают оценки снизу для функционала J на «истинном решении»

(3.5) $$J \geqslant J_1$$

Соотношение (3.5) также можно использовать для оценки неизвестного значения объема промытой области пласта V_+ аналогично тому, как это было сделано в п. 1. Имеем, используя (1.9) и (3.5)

(3.6)
$$V_+ = (N - 2J)\, C^{-1} \leqslant C^{-1} (N_D - 2J_1) = C^{-1} (N_D - N_1) + V_1 = V^*$$

Здесь N_D — мощность при той же геометрии, заданном перепаде и движении, следующем закону Дарси ($G \equiv 0$), N_1 — мощность диссипации для потока с образованием целиков в рамках плоской задачи (3.4), V_1 — объем промытой зоны, подсчитанный при тех же предположениях плоской задачи.

Поскольку имеется большой запас готовых решений, отвечающих двумерной постановке (3.4) [3, 4, 7, 8], величины N_1 и V_1 могут быть легко вычислены в явном виде. Так, для рассмотренного выше течения от одиночной скважины к прямолинейному контуру питания нужное решение приведено в [7, 8]. Вычисленная на основе этого решения зависимость V^* ($\Delta p / aG$) показана кривой *2* в логарифмических координатах.

Согласно (3.6), эта зависимость дает верхнюю оценку для объема промытой зоны. В данном случае можно непосредственно проверить, насколько грубой является оценка (3.6). Дело в том, что выбранный пример относится к классу тех течений, для которых плоская постановка дает точное решение трехмерной задачи [1]. Поэтому для него легко вычислить точное значение объема промытой части V_+, используя то же готовое решение [7, 8]. Соответствующий результат показан на фигуре кривой *3*. Видно, что в основной области изменения параметров оценка (3.6) примерно вдвое выше точного значения.

Допустим теперь, что ступенчатая функция $h(x, y)$ может принимать $n + 1$ заданное дискретное значение

$$h_0 = 0 < h_1 < \ldots < h_j < \ldots < h_n = H$$
$$h(x, y) = h_j,\ (x, y) \in \Delta_j$$

Тогда определению подлежат границы Γ_j между областями Δ_{j+1} и Δ_j и непрерывное поле давления $p(x, y, z)$. Ограничимся двумерными полями $p(x, y)$. Требуя минимума функционала

$$J = J_n = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta_j} \int\limits_0^{h_j} [k(z) |\nabla p|^2 - C] \, dz \, dx \, dy$$

по p и максимума по возможным конфигурациям границ Γ_j, приходим к задаче

$$\partial^2 p_j / \partial x^2 + \partial^2 p_j / \partial y^2 = 0, \quad (x, y) \in \Delta_j$$

$$p_j = p_{j+1}, \quad k_j^* \frac{\partial p_j}{\partial n} = k_{j+1}^* \frac{\partial p_{j+1}}{\partial n}, \quad (x, y) \in \Gamma_j,$$

$$k_j^* = \int\limits_0^{h_j} k(z) \, dz$$

$$k_{j+1}^* \left[\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial s} \right)^2 - \left(\frac{\partial p_{j+1}}{\partial n} \right)^2 \right] - k_j^* \left[\left(\frac{\partial p_j}{\partial s} \right)^2 - \left(\frac{\partial p_j}{\partial n} \right)^2 \right] =$$
$$= C(h_{j+1} - h_j), (x, y) \in \Gamma_j$$

$$p = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_p; \quad \partial p / \partial n = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_q$$

Рассмотренный случай двумерного поля давления и ступенчатой функции $h(x, y)$ отвечает приближенной постановке задачи о целиках в слоистом пласте, предложенной в [9]. Однако условие предельного равновесия на границах Γ_j, полученное выше из общей вариационной постановки, отличается от условия, сформулированного в [9] на основании физических соображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В. М., Панков В. Н., Панько С. В.* К расчету целиков остаточной вязкопластичной нефти.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 847—856.
2. *Панков В. Н.* К оценке остаточного объема вязкопластической нефти при заводнении.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 1, с. 93—97.
3. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
4. *Котляр Л. М., Скворцов Э. В.* Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. 141 с.
5. *Ентов В. М.* Некоторые проблемы математической теории фильтрации.— Зап. ЛОМИ АН СССР, 1980, т. 96, с. 30—38.
6. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 525 с.
7. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3, с. 166—169.
8. *Алишаев М. Г., Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Влияние предельного градиента на потери нефти при вытеснении ее водой.— В кн.: Вопросы нелинейной фильтрации и нефтегазоотдачи при разработке нефтяных и газовых месторождений. М.: Изд-е Ин-та геологии и разраб. горючих ископаемых, 1972, с. 15—32.
9. *Ентов В. М., Малахова Т. А., Панков В. Н., Панько С. В.* О расчете предельноравновесных целиков при вытеснении вязкопластической нефти водой из слоистонеоднородного пласта.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 113—121.

Москва

Поступила в редакцию
29.VII.1983