

УДК 532.5:532.135

О НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЙ ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Прокунин А. Н.

Рассматривается вопрос о применении нелинейных максвелловских уравнений с промежуточным параметром — упругой деформацией для аппроксимации экспериментальных данных по движению полимерных жидкостей при произвольных упругих деформациях. Используются данные по простому сдвигу, одноосному растяжению и чистому сдвигу. Конкретизируется вид зависимостей свободной энергии и скорости необратимой деформации от упругой деформации. Предполагается, что при деформировании мало существенны ориентационные явления типа кристаллизации и механодеструкция. Построение максвелловских моделей с разделением полной деформации на упругую и необратимую части развивалось в работах [1—12]¹, первоначально в области малых упругих деформаций [1—3].

Рассмотрим основные положения, развиваемые в работах [7, 8, 10], для максвелловских сред. При этом в основном будем придерживаться подхода [7], где общий вид максвелловских уравнений получен в рамках квазилинейной неравновесной термодинамики в предположении, что локально равновесное состояние среды нелинейно-упругое. Отметим недостатки в описании на основе конкретизированных уравнений экспериментальных фактов и предложим простой способ их устранения.

1. Разделение деформации на обратимую (упругую) и необратимую части. Предполагается [7, 11], что каждому деформированному состоянию упруговязкой среды $x = \{x^i\}$, описываемой максвелловской моделью, можно одновременно поставить в соответствие первоначальное недеформированное $\xi = \{\xi^i\}$ и разгрузочное состояние $\eta = \{\eta^i\}$, в которое малый элемент среды приходит упруго деформируясь после снятия с него напряжения. Такое предположение делает возможным [12]² наряду с тензором градиента полной деформации Φ ($dx = \Phi \cdot d\xi$) ввести тензоры градиентов обратимой Φ_e ($dx = \Phi_e \cdot d\eta$) и необратимой деформации Φ_p ($d\eta = \Phi_p \cdot d\xi$). Дифференцируя эти выражения по времени t при фиксированных лагранжевых координатах ξ^i , получим, что градиент скорости (точкой обозначена производная по времени)

$$\nabla_x v = \dot{\Phi} \cdot \Phi^{-1} = \dot{\Phi}_e \cdot \Phi_e^{-1} + \Phi_e \cdot \dot{\Phi}_p \cdot \Phi_p^{-1} \cdot \Phi_e^{-1}$$

Определим тензоры скоростей деформаций и вихрей следующим образом:

$$\dot{\Phi} \cdot \Phi^{-1} = e + \omega, \quad \dot{\Phi}_e \cdot \Phi_e^{-1} = e_e + \omega_e$$

$$\Phi_e \cdot \dot{\Phi}_p \cdot \Phi_p^{-1} \cdot \Phi_e^{-1} = e_p + \omega_p$$

Для этих тензоров

$$(1.1) \quad e = e_e + e_p, \quad \omega = \omega_e + \omega_p$$

¹ См. также: *Кувшинский Е. В.* Изучение истечения растворов высокополимеров (Механика упругих и эластичных вязких сред): Дис. на соискание уч. ст. докт. физ. матем. наук. Л.: Ленингр. физ.-техн. ин-т, 1950. 340 с.; *Леонов А. И.* Об описании реологического поведения упруговязких сред при больших упругих деформациях.— Препринт Ин-та проблем механ. АН СССР. М., 1973, № 34. 63 с.; *Леонов А. И.* Неравновесная термодинамика и реология упруговязких полимерных сред.— Препринт лекции, прочитанной в Международной школе «Проблемы тепло- и массопереноса в реологически сложных средах». Минск, 1975. 53 с.

² См. также: *Ентов В. М.* Динамика пленок вязких и упругих жидкостей.— Препринт Ин-та проблем механ. АН СССР. М., 1979, № 130. 46 с.

Между полной деформацией, например мерой Фингера $c = \Phi \cdot \Phi^T$ и тензорами e , ω , существует связь (см., например, [7, 11])

$$(1.2) \quad \dot{c} - \omega \cdot c + c \cdot \omega - e \cdot c - c \cdot e = 0$$

точно такое же соотношение имеет место и для упругих составляющих кинематических тензоров

$$(1.3) \quad \dot{c}_e - \omega_e \cdot c_e + c_e \cdot \omega_e - e_e \cdot c_e - c_e \cdot e_e = 0, \quad c_e = \Phi_e \cdot \Phi_e^T$$

Вывод формул (1.2) и (1.3) аналогичен.

В работах [7, 8, 10] в соотношении (1.3) полагалось, что

$$(1.4) \quad \omega_e \equiv \omega$$

Некоторые соображения в пользу этого предположения приведены в [12] (см. также ниже одно из них).

Используя соотношения (1.1) и (1.4), перепишем соотношение (1.3) в окончательном виде (индекс s означает операцию симметризации)

$$(1.5) \quad \dot{c}_e - \omega \cdot c_e + c_e \cdot \omega - 2(e \cdot c_e)^s + 2(e_p \cdot c_e)^s = 0$$

Соотношение (1.5) связывает тензоры упругой деформации c_e и необратимой деформации e_p с кинематическими тензорами e и ω .

В области малых упругих деформаций $c_e = \delta + \Delta$ (δ — единичный тензор; $\|\Delta\| \ll 1$; скобками обозначена норма тензора) соотношение (1.5) преобразуется к известному виду:

$$(1.6) \quad d\Delta / dt = 2(e - e_p)$$

Так как обычно полимерные жидкости можно считать несжимаемыми, то [7]

$$(1.7) \quad \det c_e = 1, \quad \text{tr } e = \text{tr } e_p = 0$$

2. Определение напряжения через упругую деформацию. В работах рассматриваемого направления предполагается, что свободная энергия среды f — функция тензора упругой деформации c_e и температуры T . Для максвелловской среды тензор напряжений согласно [7, 8, 10] имеет вид, аналогичный тензору напряжения для изотропной упругой среды [11, 13] (ρ — плотность)

$$(2.1) \quad \sigma = 2\rho c_e \cdot \partial f / \partial c_e \quad (\sigma_{ij} = 2\rho c_{e, ik} \partial f / \partial c_{e, kj})$$

При покомпонентной записи здесь и ниже полагается, что эйлерова система координат прямоугольная декартова.

Если среда несжимаема, можно ввести упругий потенциал $W = \rho_0 f$ ($\rho = \rho_0 = \text{const}$). Формулу (2.1) в этом случае можно записать в виде

$$(2.2) \quad \sigma = -p\delta + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} c_e - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} c_e^{-1}$$

где множитель p определяется из граничных условий, I_1 и I_2 — инварианты, фигурирующие в равенстве Гамильтона — Кели

$$(2.3) \quad I_1 = \text{tr } c_e, \quad I_2 = \text{tr } c_e^{-1} \quad (I_3 = \det c_e \equiv 1)$$

Под изотропной упругой средой здесь понимается среда типа сшитого каучука, что отражается на конкретном виде упругого потенциала W (см. ниже).

В области малых упругих деформаций формула (2.2) переходит в закон Гука (μ — модуль упругости)

$$(2.4) \quad \sigma = -p\delta + 2\mu\Delta$$

3. **Определение скорости необратимой деформации через упругую деформацию.** Для замыкания системы реологических уравнений (1.5), (1.7) и (2.2) требуется задать вид изотропной функции $e_p(c_e)$. Ее изотропность следует из выражения для диссипации слабонервновесной системы [7]. В этом случае, используя законы сохранения и выражение Гиббса, а также полагая, что локально равновесным (базовым) состоянием является изотропно-упругое, можно записать в изотермических условиях выражение для диссипативной функции в форме

$$(3.1) \quad D = \sigma : e - \rho_0 f^* |_T = \sigma : e_p = \sigma^* : e_p \geq 0 \quad (\sigma^* : e_p = \text{tr } \sigma^* \cdot e_p)$$

где e_p удовлетворяет уравнению (1.5), что было показано в [7]; σ^* — девиатор напряжения. Окончательное выражение для D несколько другим способом было получено также в [8].

Из предположения о линейной зависимости между силами и потоками ($e_p, i_j = A_{ijklm}(c_e, T) \sigma_{km}^*$) и формулы (2.2) следует [7] изотропность зависимости $e_p(c_e)$, которую с учетом условия несжимаемости в общем случае можно представить в виде

$$(3.2) \quad e_p = b_1(I_1, I_2)(c_e - 1/3 I_1 \delta) - b_2(I_1, I_2)(c_e^{-1} - 1/3 I_2 \delta)$$

где выражения для I_1 и I_2 даются формулами (2.3).

В области линейной вязкоупругости ($c_e \rightarrow \delta$) имеем

$$(3.3) \quad e_p = \Delta / (2\theta), \quad \theta = \eta / (2\mu)$$

где η — вязкость системы, θ — время релаксации.

Отметим еще, что антисимметричный тензор ω_p по аналогии с e_p правдоподобно считать [12] изотропной функцией c_e , что приводит к равенству $\omega_p \equiv 0$ (см. (1.1), (1.4)).

Дальнейшая конкретизация $b_1(I_1, I_2)$ и $b_2(I_1, I_2)$ в (3.2) проводится постулативно, на основании соображений о простоте и соответствии экспериментальным данным.

В работах [7, 10] предполагалось, что, как и в области линейной вязкоупругости, в нелинейной области деформирования среды справедливо соотношение (см. (2.3) и (3.3))

$$(3.4) \quad \sigma^* = 2\eta e_p$$

В этом случае

$$b_1 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad b_2 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial I_2}$$

где η в общем случае может зависеть от инвариантов тензора c_e . Сходная с (3.4) формула была предложена также в [8].

Отметим, что полученная система реологических уравнений (1.5), (1.7), (2.2), (3.4) характеризует деформацию металлов. В случае полимеров в вязкотекучем состоянии она не описывает ряда простейших экспериментальных фактов, например поведение нормальных напряжений при стационарном простом сдвиге (см. ниже).

В работе [7] в отличие от (3.4) вводилась анизотропия вязкостных свойств. При этом предполагалось, что

$$(3.5) \quad b_1 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial I_1}, \quad b_2 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial I_2}, \quad 2\psi = W(I_1, I_2) + W(I_2, I_1)$$

Отметим, что для полимеров $W(I_1, I_2)$ — несимметричная функция I_1 и I_2 и равенство (3.4) для случая (3.5) поэтому не выполняется.

С помощью системы реологических уравнений (1.5), (1.7), (2.2), (3.2), (3.5), полученной в [7], впервые качественно удалось описать основную совокупность нелинейных эффектов при деформировании полимерных жидкостей. Решение этой системы для $\eta = \text{const}$ в случае классического потенциала сеточной теории высокоэластичности [14]

$$(3.6) \quad W = \mu (I_1 - 3)$$

дало хорошее количественное описание (для количественного описания брались два параллельно соединенных максвелловских элемента) экспериментальных данных по упругим деформациям при простом сдвиге и растяжении [15, 16]³. Однако описание напряжений в рассмотренных случаях было неудовлетворительным при больших скоростях деформаций.

Была предпринята попытка [9] исправить указанные несоответствия путем введения потенциала более общего вида [17] (см. ниже), ибо область применимости потенциала (3.6) по деформациям ограничена [14]. Применение потенциала [17], хотя и улучшило соответствие между теоретическими и экспериментальными зависимостями касательных напряжений от скорости деформации при сдвиге, но не исправило несоответствия, наблюдаемые при растяжении.

Ниже для устранения отмеченных несоответствий предлагается положить при $T = \text{const}$

$$(3.7) \quad b_1 = b_2 = \text{const}$$

Тогда выражение для e_p (3.2), согласно обозначениям (3.3), примет вид (θ — время релаксации)

$$(3.8) \quad e_p = (4\theta)^{-1} [(c_e - 1/3 i_1 \delta) - (c_e^{-1} - 1/3 I_2 \delta)]$$

Уравнения (1.5), (1.7), (2.2), (3.8) при θ , не зависящем от c_e , образуют замкнутую систему реологических уравнений, в пользу которых говорит следующее:

для упругого потенциала сеточной теории высокоэластичности (3.6) они совпадают с системой уравнений [7] (см. (1.5), (1.7), (2.2), (3.2), (3.5)), решение которой в этом случае дает хорошее количественное описание большой совокупности экспериментов по сдвигу и растяжению [15, 16];

реологические уравнения упрощаются по сравнению с предложенными в [7], позволяя, в частности, легко применять различные упругие потенциалы при рассмотрении течений с заданной кинематикой;

при использовании в уравнениях (1.5), (1.7), (2.2), (3.8) более общего, чем (3.6), вида упругого потенциала [17] (см. ниже) удастся исправить в решении системы отмеченные выше несоответствия с экспериментом по напряжениям без изменения при этом теоретического описания развития во времени движений и поведения упругих деформаций.

Отметим еще, что для каждого конкретного потенциала W надо проверить выполнение второго закона термодинамики, т. е. неравенства (3.1).

4. Конкретизация вида упругого потенциала. Экспериментально показано [18], что по крайней мере до степеней удлинений, приблизительно равных десяти, для спитых каучуков справедлив двухпараметрический потенциал

$$(4.1) \quad W = (4\mu/n^2) \text{tr} (c_e^{n/2} - \delta)$$

где μ — модуль упругости, $n > 0$ — числовая постоянная. При $n = 2$ потенциал (4.1) совпадает с классическим потенциалом (3.6).

Выражение для напряжения в случае упругого потенциала (4.1) согласно (2.2) имеет вид

$$(4.2) \quad \sigma = -p\delta + (4\mu/n) c_e^{n/2}$$

где шаровой тензор появляется вследствие учета условия несжимаемости.

Можно показать, что для рассматриваемых реологических уравнений жидкости в случае потенциала (4.1) выполняется второй закон термодинамики (положительность диссипативной функции $D(c_e)$ при $c_e \neq \delta$).

³ См. также: Прокунин А. Н. Нелинейные упругие явления при растяжении полимерных жидкостей. Эксперимент и теория.— Препринт Ин-та проблем механ. АН СССР. М., 1978, № 104. 60 с.

Тензоры $c_e^{n/2}$ и $e_p(c_e)$ в этом случае приводятся одним и тем же преобразованием координат к диагональному виду

$$(4.3) \quad c_e^{n/2} = \text{diag} \{c_{e,1}^{n/2}, c_{e,2}^{n/2}, c_{e,1}^{-n/2}, c_{e,2}^{-n/2}\}$$

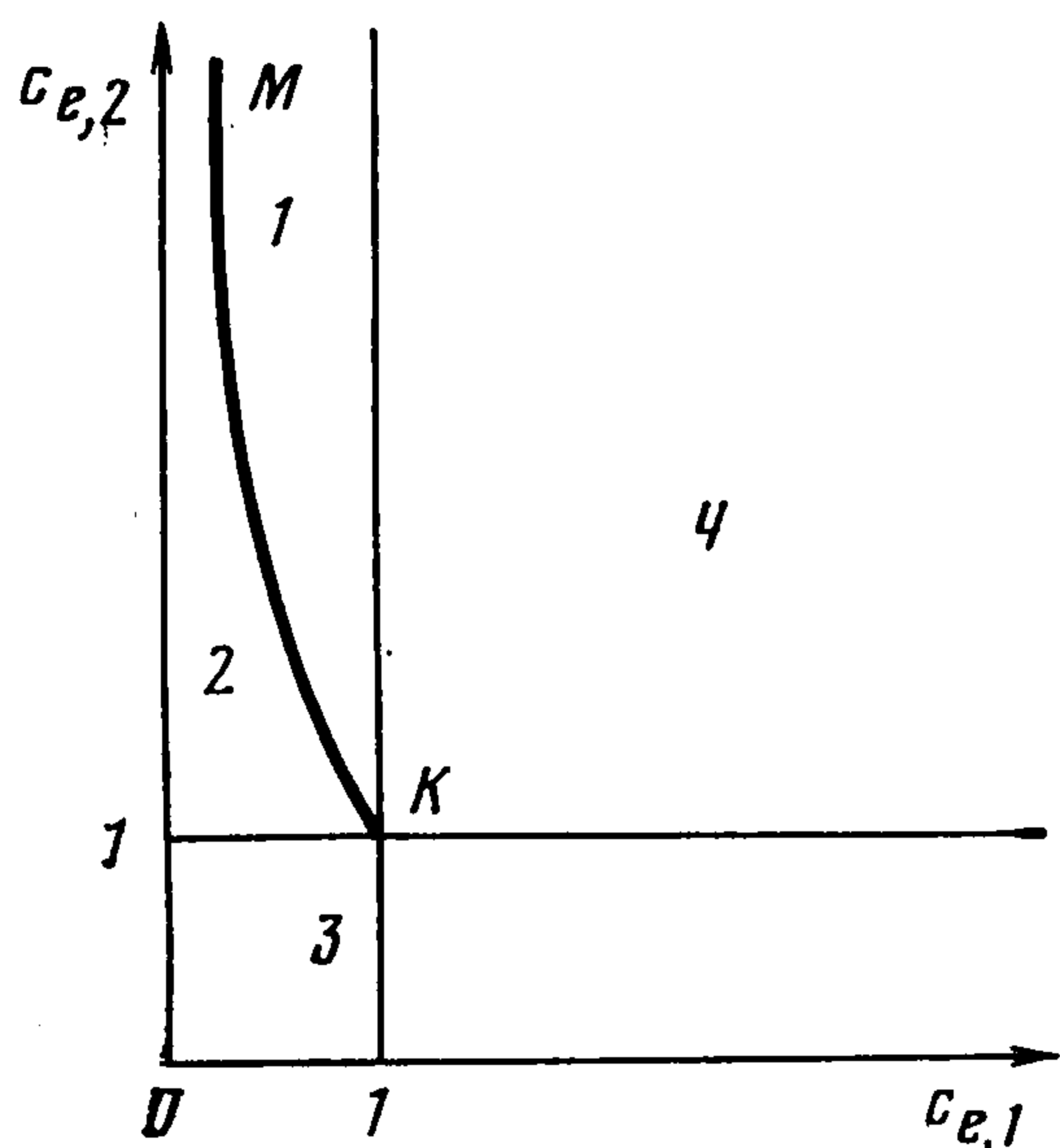
$$e_p = \text{diag} \{e_{p,1}, e_{p,2}, -(e_{p,1} + e_{p,2})\}$$

где $c_{e,2} > 0$ и $c_{e,1} > 0$ — главные независимые значения тензора c_e . Здесь учтены условия несжимаемости (1.7). Выражения, связывающие величины $e_{p,1}$, $e_{p,2}$ и $c_{e,1}$, $c_{e,2}$, на основании (3.8) имеют вид

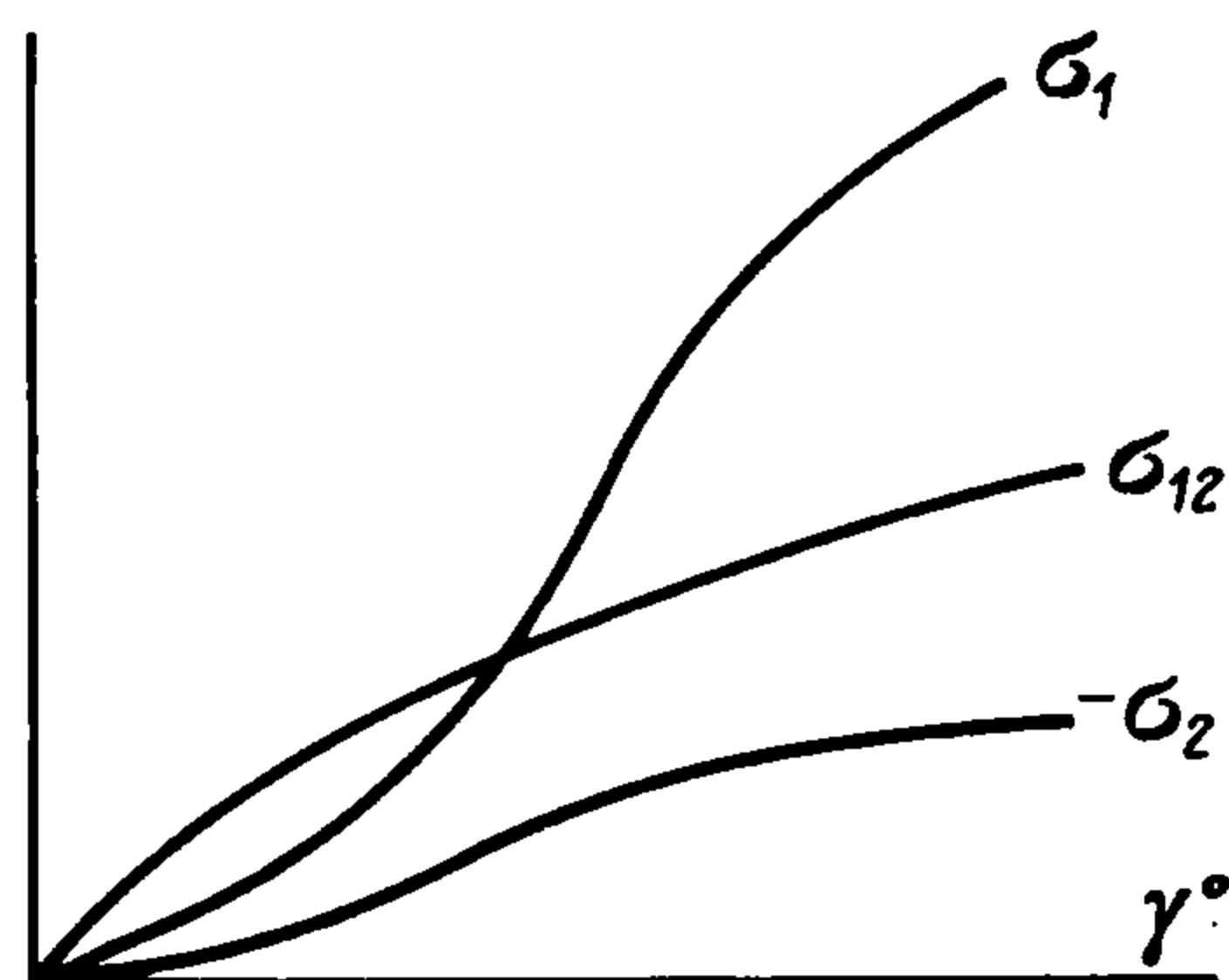
$$(4.4) \quad e_{p,1} = (12\theta c_{e,1} c_{e,2})^{-1} (c_{e,1} - 1) [c_{e,1} c_{e,2}^2 + 2c_{e,2} (c_{e,1} + 1) + 1]$$

$$e_{p,2} = (12\theta c_{e,1} c_{e,2})^{-1} (c_{e,2} - 1) [c_{e,1}^2 c_{e,2} + 2c_{e,1} (c_{e,2} + 1) + 1]$$

Из соотношений (4.4) следует, что $e_{p,1} > 0$, $e_{p,2} > 0$ для $c_{e,1} > 1$, $c_{e,2} > 1$ и $e_{p,1} < 0$, $e_{p,2} < 0$ для $c_{e,1} < 1$, $c_{e,2} < 1$. Выражение для диссипативной функции



Фиг. 1



Фиг. 2

в случае, когда напряжение определено формулой (4.2), в главных осях можно записать так:

$$(4.5) \quad D = (4\mu/n) \text{tr} c_e^{n/2} \cdot e_p = (4\mu/n) [e_{p,1} c_{e,1}^{n/2} + e_{p,2} c_{e,2}^{n/2} - (e_{p,1} + e_{p,2}) c_{e,1}^{-n/2} c_{e,2}^{-n/2}]$$

Видно, что для $n > 0$ в области значений $c_{e,1} \geq 1$, $c_{e,2} \geq 1$ и $c_{e,1} \leq 1$, $c_{e,2} \leq 1$ функция $D(c_e) \geq 0$.

Для окончательного доказательства положительности D при произвольных значениях $c_{e,1}$ и $c_{e,2}$ покажем, что D принимает все свои возможные значения при $c_{e,1} \leq 1$, $c_{e,2} \leq 1$ (область 3 на фиг. 1) и $c_{e,1} \geq 1$, $c_{e,2} \geq 1$ (область 4).

Перейдем к системе переменных I_1, I_2

$$(4.6) \quad I_1 = c_{e,1} + c_{e,2} + (c_{e,1} c_{e,2})^{-1}, \quad I_2 = c_{e,1}^{-1} + c_{e,2}^{-1} + c_{e,1} c_{e,2}$$

Так как значения I_1 и I_2 симметричны относительно $c_{e,1}$ и $c_{e,2}$, то достаточно в дальнейшем рассмотреть поведение $D(I_1, I_2)$ в области $c_{e,1} < 1$, $c_{e,2} > 1$. Эту область гиперболы $c_{e,2} = c_{e,1}^{-1}$ (см. фиг. 1, кривая KM) делит на две: $c_{e,1} < 1$, $c_{e,2} \geq c_{e,1}^{-1}$ (область 1) и $c_{e,1} < 1$, $c_{e,2} \leq c_{e,1}^{-1}$ (область 2). Можно проверить (см. (4.6)), что с любой точкой области 1 $c_{e,1} = t$, $c_{e,2} = t^{-n}$ ($n \geq 1$, $0 < t < 1$) можно сопоставить такую точку области 3 $c_{e,1} = t$, $c_{e,2} = t^{n-1}$, для которой I_1 и I_2 будут такими же. С любой точкой области 2 $c_{e,1} = t$, $c_{e,2} = t^{-n}$ ($0 < n \leq 1$, $0 < t < 1$) можно аналогично сопоставить точку области 4 $c_{e,1} = t^{-n}$, $c_{e,2} = t^{n-1}$. Таким образом, все возможные значения функции $D(I_1, I_2) = D_*(c_{e,1}, c_{e,2})$ реализуются в областях 3 и 4 и $D(c_e) > 0$ при $c_e \neq \delta$.

5. Сравнение теоретических результатов с экспериментом. Перейдем далее к рассмотрению на основе предложенного варианта максвелловской модели простого и чистого сдвигов и однородного одноосного растяжения. Результаты соответствующих экспериментов с раствором бутылкаучука в трансформаторном масле и расплавом полиизобутилена можно найти,

например, в [15, 16]⁴. Первые предварительные эксперименты по чистому сдвигу для полиизобутилена были проведены в [18].

Простой сдвиг обычно осуществляется между двумя пластинами, одна из которых неподвижна, а другая перемещается параллельно первой в направлении 1. Ось 2 при этом направлена перпендикулярно пластинам. В этом случае кинематические матрицы имеют вид

$$(5.1) \quad \mathbf{e} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}_e = \begin{vmatrix} c_{e.11} & c_{e.12} & 0 \\ c_{e.12} & c_{e.22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

где $\dot{\gamma} > 0$ — скорость деформации, в общем случае зависящая от времени.

Матрица \mathbf{c}_e приводится ортогональным преобразованием \mathbf{q} к диагональному виду

$$(5.2) \quad \mathbf{c}_e^* = \text{diag} \{c_e, c_e^{-1}, 1\} = \mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{c}_e \cdot \mathbf{q}$$

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

где при записи \mathbf{c}_e^* в (5.2) учтено условие несжимаемости (1.7). Подставляя матрицы (5.1) в уравнения (1.5), (3.8), с учетом (5.2) и условия несжимаемости среды получим

$$(5.3) \quad \begin{aligned} c_{e,11} + (4\theta)^{-1} (c_e - c_e^{-1}) [c_e - c_e^{-1} + (c_e + c_e^{-1}) \cos 2\varphi] &= 2\dot{\gamma} c_{e,12} \\ c_{e,12} + (4\theta)^{-1} (c_e - c_e^{-1}) (c_e + c_e^{-1}) \sin 2\varphi &= \dot{\gamma} c_{e,22} \\ 2c_{e,11} &= c_e + c_e^{-1} + (c_e - c_e^{-1}) \cos \varphi \\ 2c_{e,22} &= c_e + c_e^{-1} - (c_e - c_e^{-1}) \cos \varphi \\ 2c_{e,12} &= (c_e - c_e^{-1}) \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Из системы уравнений (5.3) можно определить зависимости $c_e(t)$ и $\varphi(t)$.

Принимая во внимание, что $\mathbf{c}_e^{n/2} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{c}_e^{*n/2} \cdot \mathbf{q}^{-1}$, можно получить выражения для компонент тензора напряжения (4.2) через c_e и φ .

В экспериментах с полимерными жидкостями обычно измеряют следующие величины:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} &= 4 (\mu/n) (c_e^{n/2} - c_e^{-n/2}) \cos 2\varphi \\ \sigma_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} &= 2 (\mu/n) [c_e^{n/2} + c_e^{-n/2} - 2 - (c_e^{n/2} - \\ &- c_e^{-n/2}) \cos 2\varphi] \\ \sigma_{12} &= 2 (\mu/n) (c_e^{n/2} - c_e^{-n/2}) \sin 2\varphi \end{aligned}$$

В случае стационарного течения ((5.3) при $\dot{\gamma} = \text{const}$)

$$(5.5) \quad \cos 2\varphi = \frac{c_e - c_e^{-1}}{c_e + c_e^{-1}}, \quad \sin \varphi = \frac{2}{c_e + c_e^{-1}}, \quad (c_e + c_e^{-1})(c_e - c_e^{-1}) = 4\theta\dot{\gamma}$$

и формулы (5.4) примут вид

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{12} &= 4 (\mu/n) (c_e^{n/2} - c_e^{-n/2}) (c_e + c_e^{-1})^{-1} \\ \sigma_1 &= \sigma_{12} (c_e - c_e^{-1}) \\ \sigma_2 &= 2 (\mu/n) [c_e^{n/2} + c_e^{-n/2} - 2 - \sigma_1 n / (4\mu)] \end{aligned}$$

⁴ См. сноску на с. 960.

Экспериментальные зависимости σ_{12} , σ_1 и σ_2 от $\dot{\gamma}$ качественно представлены на фиг. 2. Отметим еще, что зависимость эффективной вязкости $\sigma_{12}/\dot{\gamma}$ от $\dot{\gamma}$ — монотонно уменьшающаяся функция, а для нормальных напряжений справедливо условие $|\sigma_2| \ll \sigma_1$.

Для сопоставления с экспериментом рассмотрим асимптотические зависимости σ_1 , σ_2 и σ_{12} от безразмерного параметра $\Gamma = \dot{\gamma}\theta$

$$(5.7) \quad \Gamma \ll 1: \sigma_{12} = \eta\dot{\gamma} + O(\Gamma^3), \quad \sigma_1 = 4\mu\theta^2\dot{\gamma}^2 + O(\Gamma^4)$$

$$\sigma_2 = -2\mu\theta^2\dot{\gamma}^2 (1 - n/4) + O(\Gamma^4), \quad \eta = 2\mu\theta$$

$$(5.8) \quad \Gamma \gg 1: \sigma_{12} \approx 2(\mu/n)(4\Gamma)^{n-2/4}, \quad \sigma_1 \approx 4(\mu/n)\Gamma^{n/4}$$

$$\sigma_2 = 4(\mu/n)[1 - (4\Gamma)^{-n/4} - (4\Gamma)^{n-4/4}]$$

Чтобы получить соответствие с экспериментом, положим

$$(5.9) \quad 4 \geq n \geq 2$$

При $n < 2$ зависимость $\sigma_{12}(\Gamma)$ проходит через максимум. Падающая ветвь в этом случае неустойчива.

При замене направления движения пластины на противоположное скорость деформации меняет знак. В этом случае из уравнений (5.5) следует, что $c_e(-\dot{\gamma}) = c_e^{-1}(\dot{\gamma})$. Тогда компоненты напряжений σ_1 и σ_2 не изменяются, а касательная компонента σ_{12} меняет лишь знак (см. (5.4)). При $\Gamma < 0$ асимптотические формулы для $(-\Gamma) \ll 1$ аналогичны (5.7). При $(-\Gamma) \gg 1$ в формулах (5.8) следует заменить Γ и σ_{12} на $(-\Gamma)$ и $(-\sigma_{12})$.

Одноосное однородное растяжение. Обычно осуществляется при растяжении цилиндра из полимерной жидкости. Этот вид деформирования в декартовой неподвижной системе координат задается матрицами ($\kappa > 0$ — скорость деформации)

$$(5.10) \quad e = \kappa \text{diag} \{1, -1/2, -1/2\}, \quad \omega \equiv 0, \quad c_e = \text{diag} \{\lambda^2, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}\}$$

В выражениях для тензоров e и c_e учтено условие несжимаемости среды (1.7). Подставляя матрицы (5.10) в уравнения (1.5), (3.8), (4.2), получим систему определяющих уравнений для растяжения

$$(5.11) \quad \frac{\theta}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{(\lambda+1)(\lambda^3-1)}{6\lambda^2} = \kappa\theta, \quad \sigma = \frac{4\mu}{n} (\lambda^n - \lambda^{-n/2})$$

где σ — растягивающие напряжения. При выводе второй формулы (5.11) предполагалось, что на свободной поверхности растягиваемого цилиндра напряжение обращается в нуль.

Эксперименты⁵, проведенные на расплаве полиизобутилена, показали, что при стационарном течении ($\kappa = \text{const}$) напряжение σ и вязкость σ/κ монотонно растут с ростом κ . Для сопоставления с этими экспериментальными данными рассмотрим асимптотическое поведение σ в зависимости от величины безразмерного параметра $\Gamma = \kappa\theta$

$$(5.12) \quad \Gamma \ll 1: \sigma = 3\eta\kappa + O(\Gamma^2); \quad \Gamma \gg 1: \sigma \approx 4(\mu/n)(6\Gamma)^{n/2}$$

Формулы (5.12) согласуются с указанными экспериментальными данными при $n > 2$. Отметим, что при $n = 2$ вязкость растет от 3η до 6η . При $n > 2$ вязкость растет неограниченно, что дает возможность лучше, чем при $n = 2$, описывать эксперимент.

Чистый сдвиг осуществляется, например, при растяжении пленки в направлении 1, при этом в перпендикулярном к 1 направлении 2 деформирования не происходит. Концы пленки в этом направлении

⁵ См. ссылку на работу в сноске на с. 960.

закреплены, а поверхности, перпендикулярные направлению 3, свободны. В этом случае имеем ($\kappa > 0$ — скорость деформации)

$$(5.13) \quad \mathbf{e} = \kappa \operatorname{diag} \{1, 0, -1\}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv 0, \quad \mathbf{c}_e = \operatorname{diag} \{c_e, 1, c_e^{-1}\}$$

Подставляя матрицы (5.13) в (1.5), (3.8), (4.2), получим систему реологических уравнений, описывающую чистый сдвиг

$$(5.14) \quad \frac{\theta}{c_e} \frac{dc_e}{dt} + \frac{c_e^2 - 1}{2c_e} = 2\kappa\theta$$

$$\sigma_{11} = 4 (\mu/n)(c_e^{n/2} - c_e^{-n/2}), \quad \sigma_{22} = 4 (\mu/n)(1 - c_e^{-n/2})$$

При выводе выражений для σ_{11} и σ_{22} в (5.14) учтено, что $\sigma_{33} \equiv 0$ на свободной поверхности среды.

Предварительные эксперименты, проведенные при $\kappa = \text{const}$ на полиизобутилене в [18], показали, что σ_{11} и σ_{22} растут с ростом κ при стационарном течении. Эффективная вязкость σ_{11}/κ примерно постоянна в исследованном интервале κ , а отношение σ_{22}/κ интенсивно падает с ростом κ .

При стационарном течении ($\kappa = \text{const}$ в каждом эксперименте), как показывают уравнения (5.14), связь между упругой деформацией c_e и безразмерным параметром $\Gamma = \kappa\theta$ имеет вид

$$(5.15) \quad c_e = 2\Gamma + \sqrt{1 + 4\Gamma^2}$$

Из (5.14) и (5.15) следует

$$(5.16) \quad \Gamma \ll 1: \sigma_{11} = 4\eta\kappa + O(\Gamma^3), \quad \sigma_{22} = 2\eta\kappa + O(\Gamma^2)$$

$$(5.17) \quad \Gamma \gg 1: \sigma_{11} \approx 4 (\mu/n)(4\Gamma)^{n/2}, \quad \sigma_{22} = 4 (\mu/n)[1 - (4\Gamma)^{-n/2}]$$

Таким образом, при $n \geq 2$ имеем соответствие теории с результатами экспериментов [18].

Рассмотрим случай, когда в кинематических матрицах (5.10) и (5.13) величина $\kappa = \text{const} < 0$ ($\Gamma < 0$), что соответствует сжатию цилиндрического образца или пленки с закрепленными краями вдоль оси 1. Для $|\Gamma| \ll 1$ асимптотические формулы (5.12) и (5.16) остаются в этом случае теми же, что и при $1 \gg \Gamma > 0$. При $|\Gamma| \rightarrow \infty$ в рассматриваемых задачах упругая деформация $\lambda \rightarrow 0$. При одноосном сжатии для $|\Gamma| \gg 1$

$$\sigma \approx -4 (\mu/n) (-6\Gamma)^{n/4}$$

Так как $0 < n < 4$, то эффективная вязкость при одноосном стационарном сжатии уменьшается начиная с величины 3η (см. (5.12)). В случае деформирования пленки с закрепленными краями при $\Gamma < 0$ и $|\Gamma| \gg 1$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -4 (\mu/n) (-4\Gamma)^{n/2}$$

Отметим еще, что экспериментально осуществить эти два вида деформирования, особенно пленки, крайне сложно из-за неустойчивости формы образцов и влияния на деформирование неоднородностей в области зажимов.

На основе вышеизложенного можно заключить, что существует класс полимеров, нелинейное поведение которых в вязкотекучем состоянии в широкой области деформирования описывается максвелловской моделью с временем релаксации, не зависящим от упругой деформации.

Как показали эксперименты [19], проведенные на расплаве кристаллизующегося полимера (полиэтилен низкой плотности), поведение его при растяжении существенно отличается от предсказываемого моделью с временем релаксации, не зависящим от упругой деформации. Так, например, на этом полимере наблюдалось явление замедления течения. При этом полимер в процессе деформирования терял текучесть, но далее течение снова развивалось как у пластических сред.

Для описания потери текучести полимера в [7] время релаксации θ задавалось как экспоненциально растущая функция от упругого потенциала. Качественное описание явления замедления течения можно найти в работах [20, 21]. Отметим, что в [21] для

характеристики деформационной ориентации макромолекул наряду с тензором упругой деформации вводился тензор, учитывающий направление сегментов, из которых состоят макромолекулы. Для описания эффекта замедления течения может оказаться полезным и скалярный параметр, характеризующий концентрацию ориентированного полимера [22].

Автор благодарит В. А. Пальмова за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meixner J. Z. Thermodynamik und Relaxations-erscheinung. — Z. Naturforschung, 1949, В. 4а, Н. 8, S. 594—600.
2. Meixner J. Z. Thermodynamische Theorie der elastischen Relaxation. — Z. Naturforschung, 1954, В. 9а, Н. 7/8, S. 654—663.
3. Kluitenberg G. A. A unified thermodynamic theory for large deformations in elastic media and in Kelvin (Voigt) media, and for viscous fluid flow. — Physica, 1964, v. 30, No. 10, p. 1945—1972.
4. Городцов В. А., Леонов А. И. О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 1, с. 70—94.
5. Бувич Ю. А. О кинематике упруговязких сред с конечными деформациями. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 2, с. 217—231.
6. Годунов С. К., Роменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах. — ПМТФ, 1972, № 6, с. 124—144.
7. Леонов А. И. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. — Rheol. Acta, 1976, v. 15, No. 2, p. 85—98.
8. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
9. Леонов А. И., Прокунин А. Н. An improved simple version of a nonlinear theory of elasto-viscous polymer media. — Rheol. Acta, 1980, v. 19, No. 4, p. 393—403.
10. Пальмов В. А. Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел. — Успехи механики, 1980, т. 3, вып. 3, с. 75—115.
11. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 274 с.
12. Леонов А. И. On the equivalence of simplest nonlinear rheological equations for viscoelastic polymer media. — Rheol. Acta, 1982, v. 21, No. 6, p. 683—691.
13. Murnaghan F. D. Finite deformations of an elastic solids. — Amer. J. Math., 1937, v. 59, No. 2, p. 235—260.
14. Трелоар Л. Физика упругости каучука. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 240 с.
15. Леонов А. И., Липкина Е. Н., Пашкин Е. Д., Прокунин А. Н. Theoretical and experimental investigation of shearing in elastic polymer liquids. — Rheol. Acta, 1976, v. 15, No. 7/8, p. 411—426.
16. Прокунин А. Н., Исаев А. И., Липкина Э. Х. О параллельном наложении колебаний на стационарное сдвиговое течение полимерных жидкостей. — Механика полимеров, 1977, № 4, с. 699—705.
17. Blatz P. J., Sharda S. C., Tschoegl N. W. Strain energy function for rubberlike materials based on a generalized measure of strain. — Trans. Soc. Rheol., 1974, v. 18, No. 1, p. 145—161.
18. Meissner J., Stephenson S. E., Demarmels A., Portmann P. Multiaxial elongational flows of polymer melts classification and experimental realization. — J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1982, v. 11, No. 3/4, p. 221—237.
19. Прокунин А. Н., Филиппова Н. Н. Замедление течения полимерной жидкости при больших упругих деформациях. — Инж.-физ. ж., 1979, т. 37, № 4, с. 724—729.
20. Прокунин А. Н., Севрук В. Д. Проявление эффекта замедления течения при различных видах деформирования. — Инж.-физ. ж., 1981, т. 41, № 1, с. 74—81.
21. Степанов В. И. Реологическое описание жидкокристаллических полимеров. — В кн.: Структурные превращения в полимерах и жидких кристаллах. Свердловск: Изд-е УНЦ АН СССР, 1981, с. 3—8.
22. Баренблатт Г. И. О распространении шейки при растяжении полимерных образцов. — ПММ, 1964, т. 28, с. 1048—1060.