

УДК 536.25

ТЕПЛОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ

Гольдштик М. А., Яворский Н. И.

Рассматривается общее решение тепловой задачи конвективной теплопроводности с объемным выделением тепла за счет вязкой диссипации кинетической энергии жидкости, поле скорости которой определяется точным решением [1] уравнений Навье—Стокса для затопленной струи. Изучаются возможные постановки тепловой задачи и характерное поведение решений. Особенность полученных решений — существование при определенных условиях двух режимов конвективного теплообмена.

Частное решение рассматриваемой задачи, соответствующее точечному источнику тепла, совмещенному с источником струи, было получено [2] без учета диссипативного тепловыделения и соответствует первому члену разложения температуры в ряд по мультиполям

$$(1) \quad T(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(\theta) R^{-\alpha_n}$$

где R, θ — сферические координаты; угол θ отсчитывается от оси струи. Наличие в (1) дробных показателей α_n связано с наличием в уравнении теплопроводности

$$(2) \quad LT = \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad L = (u, \nabla) - a\Delta$$

конвективного члена, который изменяет спектр оператора L .

Поле скорости для затопленной струи имеет вид [1]

$$(3) \quad u_R = \nu \frac{y'(x)}{R}, \quad u_\theta = \nu \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{R}; \quad y(x) = -2 \frac{1-x^2}{A-x}, \\ x = \cos \theta$$

Коэффициенты кинематической вязкости ν и температуропроводности a считаются постоянными, $A > 1$ — постоянная, монотонно связанная с импульсом струи

$$(4) \quad I = 16\pi\rho\nu^2 A \left[1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right]$$

причем согласно (4) $I \rightarrow 0$ при $A \rightarrow \infty$ и $I \rightarrow \infty$ при $A \rightarrow 1$.

Разложение (1) справедливо лишь для решения однородного уравнения (2), решение неоднородного уравнения теплопроводности (2) помимо (1) содержит член, вид которого определяется диссипативным источником тепла. При отсутствии конвективных членов в однородном уравнении разложение (1) становится классическим с $\alpha_n = n$ и τ_n — сферическими функциями. В общем случае $\alpha_n \neq n, n > 1$. Согласно (3), диссипативная функция в (2) пропорциональна R^{-4} , что порождает в (1), за некоторым исключением, о котором пойдет речь ниже, дополнительный член вида $z(x) R^{-2}$, отвечающий частному решению неоднородного уравнения.

Подставляя (1) и (3) в (2), для $\alpha_n \neq 2$ получим

$$(5) \quad (1-x^2)\tau_n'' - 2x\tau_n' + \text{Pr}(y\tau_n' + \alpha_n y'\tau_n) + \alpha_n(\alpha_n - 1)\tau_n = 0$$

Частное решение неоднородного уравнения соответствует значению $\alpha_n = 2$ и удовлетворяет уравнению

$$(6) \quad (1 - x^2) u'' - 2xu' + \text{Pr} (yu' + 2y'u) + 2u + \Phi(x) = 0$$

$$(7) \quad \Phi(x) = -\frac{(A^2 - 1)^3}{(A - x)^6} + \frac{2A(A^2 - 1)^2}{(A - x)^5} + \frac{2(A^2 - 1)^2}{(A - x)^4} - \\ - \frac{5A(A^2 - 1)}{(A - x)^3} + \frac{A^2}{(A - x)^2} + \frac{A}{A - x}; \quad z = \frac{16 \text{Pr} \nu^2}{c_p} u, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

Здесь $\Phi(x)$ — нормированная диссипативная функция, c_p — теплоемкость.

Поскольку ось струи ($x = \pm 1$) при $R \neq 0$ принадлежит области течения, то от решений уравнений (5) и (6) следует требовать ограниченности в точках $x = \pm 1$, в которых поле скоростей (3) аналитично. Линейные уравнения (5), (6) принадлежат классу Фукса [3], а поскольку в точках $x = \pm 1$ определяющие уравнения имеют двукратные нулевые корни, то в окрестности каждой из особых точек $x = \pm 1$ одно из решений каждого уравнения аналитично, а другое имеет логарифмическую особенность.

Таким образом, решения ведут себя подобно функциям Лежандра. Для аналитических решений $(1 - x^2) \tau_n'' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm 1$. Отсюда следуют условия (берутся только верхние или нижние знаки плюс и минус)

$$(8) \quad 2\tau_n'(\pm 1) \mp [\text{Pr} \alpha_n y'(\pm 1) + \alpha_n(\alpha_n - 1)] \tau_n(\pm 1) = 0$$

$$(9) \quad u'(\pm 1) \mp [\text{Pr} y'(\pm 1) + 1] u(\pm 1) \mp \frac{1}{2} \Phi(\pm 1) = 0$$

Заметим, что условие ограниченности производных $\tau_n'(\pm 1)$, $u'(\pm 1)$ влечет за собой равенства

$$d\tau_n/d\theta = du/d\theta |_{\theta=0, \pi}$$

соответствующие осевой симметрии температурного поля. Задача (5), (8) является задачей на собственные значения $\lambda_n = \alpha_n(\alpha_n - 1)$ и соответствующие им собственные функции τ_n мультипольного разложения (1). При этом τ_n находятся с точностью до произвольных постоянных множителей C_n , задание которых определяет структуру и интенсивность тепловой особенности в точке $R = 0$. Видно, что при $\alpha_1 = 1$ собственное значение задачи $\lambda_1 = 0$, которому соответствует собственная функция

$$(10) \quad \tau_1(x) = C_1 \Phi(x), \quad \Phi(x) = (A - x)^{-2\text{Pr}}$$

Решение (10), полученное в [2], соответствует тепловому источнику, задание интенсивности которого определяет постоянную C_1 .

Вместо задания интенсивностей C_n для задачи (5), (8) можно было бы, например, задать произвольное поле температур $T(R_0, \theta)$ на сфере радиуса R_0 . Тогда коэффициенты C_n однозначно определяются в случае полной системы линейно-независимых функций.

Уравнение (5) — результат действия несамосопряженного обобщенного дифференциального оператора Лежандра [4] на τ_n , спектр которого состоит из изолированных собственных значений, не имеющих конечных предельных точек. Линейная оболочка множества собственных функций этого оператора плотна в $L_2((-1, 1))$ [4]. Следовательно, система функций τ_n полна в $L_2([-1, 1])$, так как допускает аналитическое продолжение в точки $x = \pm 1$.

Собственные значения $\lambda_n = \alpha_n(\alpha_n - 1)$ дифференциального оператора в (5) вещественны, а собственные функции ортогональны с весом $1/\Phi$.

Действительно, подставляя $\tau_n = \Phi g_n$ в (5), имеем $[(1 - x^2) \Phi g_n']' + (\alpha_n - 1) \text{Pr} y' \Phi g_n + \lambda_n \Phi g_n = 0$

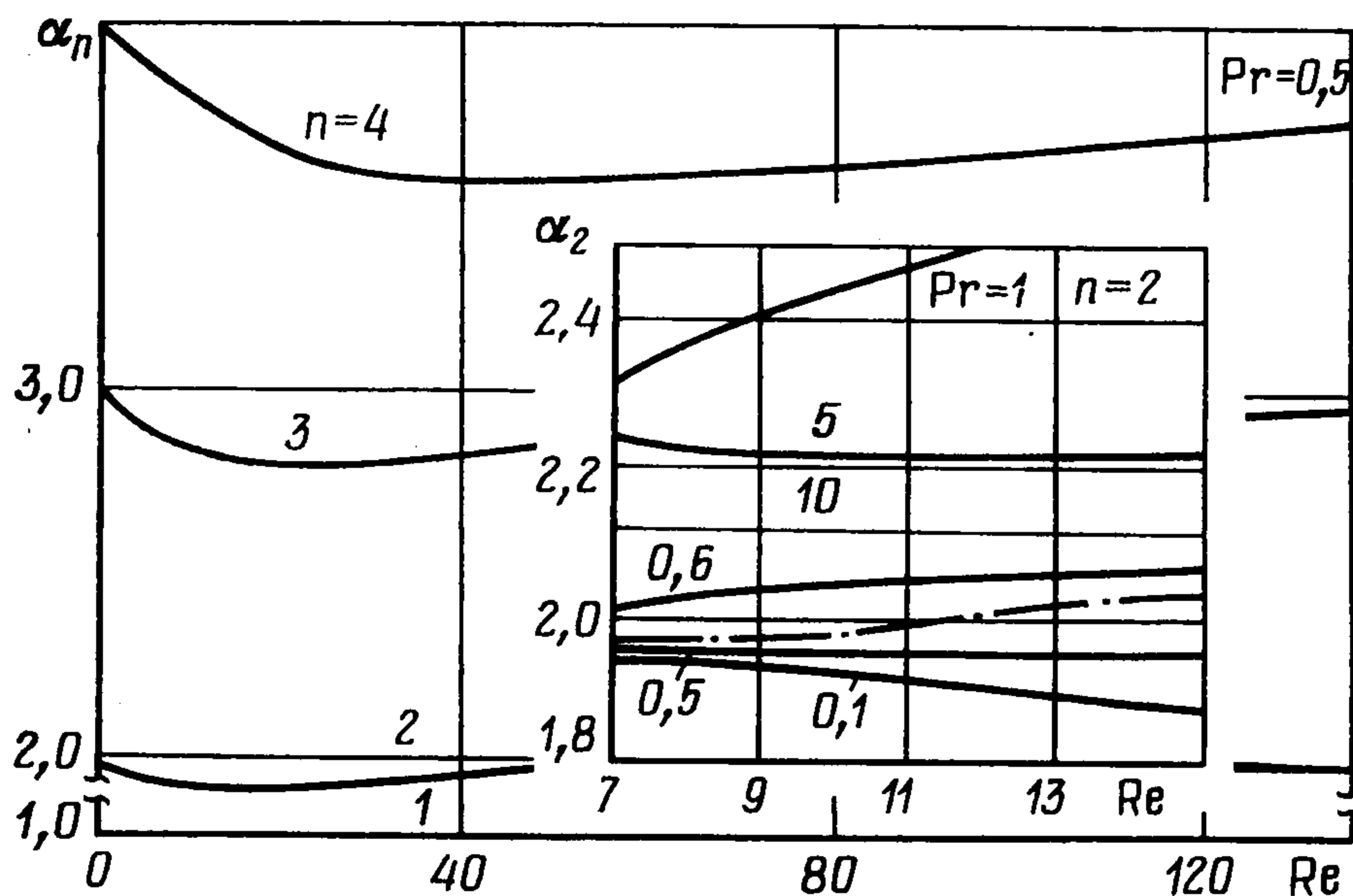
Отсюда, используя стандартную процедуру, получим

$$[(1 - x^2) \varphi (g_m g_n' - g_n g_m')] |_{-1}^1 + \Lambda = 0$$

$$\Lambda = (\lambda_n - \lambda_m) \int_{-1}^1 \varphi g_n g_m dx$$

Поскольку φ, g_n, g_m аналитичны в точках $x = \pm 1$, то $\Lambda = 0$, откуда при $n \neq m$, так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, следует ортогональность системы функций τ_n .

Заменяя τ_m на τ_n^* и, соответственно, λ_m на λ_n^* (звездочка означает комплексно-сопряженную величину), из условия $\Lambda = 0$ получим ($\tau_n \neq 0$) $\lambda_n = \lambda_n^*$, т. е. все собственные числа несамосопряженного дифференциального оператора уравнения (5) вещественны.



Фиг. 1

Собственные значения λ_n , как и α_n , зависят от двух параметров: импульса струи и числа Прандтля. Очевидно, что при $Pr = 0$ или $I \rightarrow 0$ конвективные члены в (5) исчезают и $\alpha_n = n$, а соответствующие $\lambda_n = n(n-1) \geq 0$ при любом целом n . Заметим, что при произвольных числах Pr и $A (>1)$ все собственные числа $\lambda_n(Pr, A) \geq 0$, поскольку минимальное собственное значение $\lambda_1 = 0$ при всех числах Pr и A , что следует из решения [2] и изолированности всех собственных значений, непрерывных по Pr и A . Отсюда вытекает, что показатели α_n в (1) также изолированы и вещественны. С физической точки зрения это означает, что решения однородного уравнения (2) с полем скорости (3) не имеют волнового характера. Вместо числа A или импульса I удобно ввести число Рейнольдса

$$Re = \left(\frac{I}{\pi v^2} \right)^{1/2}$$

Зависимости $\alpha_n = \alpha_n(Pr, Re)$, найденные численно (метод излагается ниже), показаны на фиг. 1 для $n = 1, 2, 3, 4$ и $Pr = 0,5$, а также для $n = 2$ и разных значений Pr . Отметим, что кривые $\alpha_2(0,5; Re)$ и $\alpha_2(0,6; Re)$ лежат по разные стороны от горизонтали $\alpha_2 = 2$. Для $0,5 < Pr < 0,6$ кривые зависимости α_2 от Re пересекают эту горизонталь, как показано штрихпунктиром для случая $Pr = 0,54$. Это обстоятельство в дальнейшем играет важную роль.

Итак, задача (5), (8) разрешима при всех допустимых значениях чисел Pr и Re . Решение однородного уравнения (2), таким образом, существует и единственно в виде (1) по крайней мере для тепловой задачи вне некото-

рого шара радиуса R_0 с каким-либо видом тепловых граничных условий на его поверхности и нулевой (или конечной постоянной) температурой на бесконечности.

Для тепловой задачи в шаровом слое ряд (1) необходимо дополнить членами с положительными степенями R . Этому соответствует представление решения в виде

$$T(R, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n(\theta) R^{-\alpha_n}$$

Решение такой задачи, очевидно, также существует и единственно, если задать какие-либо тепловые условия на границах шарового слоя. Видимо, существование и единственность решения краевой задачи для однородного уравнения конвективной теплопроводности будет иметь место, как в случае уравнения Лапласа, и для областей более общего вида.

Несколько иначе обстоит дело для неоднородной задачи (6), (9), в которой учитывается диссипативное тепловыделение. Если в уравнении (5) формально положить $\alpha_n = 2$, то оно совпадет с уравнением (6), в котором положено $\Phi(x) \equiv 0$.

Расчет показывает, что при определенных значениях Pr и Re задача (5), (8) имеет в качестве собственного значения $\lambda_n = 2$, соответствующее $\alpha_n = 2$. В таких случаях разрешимость неоднородной задачи ставится под сомнение. Можно показать аналитически, используя альтернативу Фредгольма, что при $Re \rightarrow \infty$ задача (6), (9) решения не имеет, если $Pr = 1/2$.

При произвольных значениях числа Re имеется кривая $Pr_* = Pr(Re)$, на которой решение краевой задачи (6), (9) не существует. Эта кривая была рассчитана численно.

Расчет проводился следующим образом. Для однородного уравнения (6) ставились две задачи Коши

$$u_+(1), u_-(-1), u_{\pm}'(\pm 1) \text{ из (9) при } \Phi(\pm 1) = 0$$

Решение находилось методом Рунге—Кутты—Мерсена с относительной погрешностью на шаге 10^{-6} . Интегрирование проводилось до некоторой точки сшивки x_c , лежащей в области наибольших градиентов. Решение $u_-(x)$, аналитическое в окрестности точки $x = -1$, при $x = 1$, вообще говоря, становится неограниченным. Если, однако, существует набор параметров Pr и Re , при котором решение $u_-(x)$ будет аналитическим и при $x = 1$, то с точностью до постоянных множителей функции $u_-(x)$ и $u_+(x)$ совпадут всюду на интервале $[-1, 1]$. Чтобы это произошло, для решений однородного уравнения второго порядка (6) с однородными краевыми условиями (9) достаточно совпадения функций и первых производных в произвольной точке интервала x_c :

$$Au_-(x_c) = Bu_+(x_c), \quad Au_-'(x_c) = Bu_+'(x_c)$$

Условием нетривиальной разрешимости этой системы является обращение в нуль определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_-(x_c) & u_+(x_c) \\ u_-'(x_c) & u_+'(x_c) \end{vmatrix}$$

Если в некотором значении $Pr(Re)$ величина $\Delta = 0$, то вопрос разрешимости неоднородной задачи рассматривается следующим образом. Решение неоднородных задач Коши, где $\Phi(\pm 1)$ из (7), для уравнения (6) можно записать в форме $Au_- + Bu_-^{\circ}$ и $Bu_+ + u_+^{\circ}$, где индексом $^{\circ}$ отмечены частные решения неоднородных уравнений. Для совпадения этих решений и тем самым для разрешимости неоднородной задачи необходимо также, если $\Delta = 0$, обращение в нуль определителя

$$(11) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} u_-(x_c) & u_+^{\circ}(x_c) - u_-^{\circ}(x_c) \\ u_-'(x_c) & u_+^{\circ}'(x_c) - u_-^{\circ}'(x_c) \end{vmatrix}$$

Если $\Delta_1 \neq 0$, то неоднородная задача неразрешима.

Результаты расчетов представлены на фиг. 2 в виде зависимости $Pr_* = Pr(Re)$, когда $\Delta = 0$. Как видно, численные расчеты соответствуют асимптотическому анализу для случая $Re \rightarrow \infty$. Отметим, что тот же алгоритм был использован для определения собственных значений $\alpha_n(Pr, Re)$ уравнения (5), которые являются корнями уравнения $\Delta(\alpha_n) = 0$.

Следует подчеркнуть, что неразрешимость задачи (6), (9) не означает неразрешимости исходной стационарной задачи конвективной теплопроводности с вязким нагревом (2), если поле скоростей задано в виде (3). На кривой неразрешимости $Pr_* = Pr(Re)$ показатель дипольного члена в (1) $\alpha_2(Pr, Re)$ и решение неоднородного уравнения, пропорциональное R^{-2} , вступает во взаимодействие с решением однородного уравнения так, что зависимость от R для неоднородного уравнения становится иной; таким образом задача (6), (9) на кривой $Pr(Re)$, где $\alpha_2(Pr, Re) = 2$, теряет смысл.

Частное решение неоднородного уравнения (2) в этом случае будем искать в виде

$$(12) \quad T(R, x) = \frac{u_0(x)}{R^2} + C \frac{u_1(x)}{R^2} \ln R, \quad C = \text{const}$$

который диктуется степенной зависимостью от R решения однородного уравнения и источника тепла в (2). Подставляя (12) в (2), с учетом (3) получим

$$(13) \quad [(1-x^2)u_0']' + 2u_0 + Pr(2y'u_0 + yu_0') = (3 + Pr y')Cu_1 - \Phi(x)$$

$$(14) \quad [(1-x^2)u_1']' + 2u_1 + Pr(2y'u_1 + yu_1') = 0$$

Граничные условия для (13) следуют из (9) при замене $u \rightarrow u_0$, $\Phi \rightarrow \Phi - (3 + Pr y')Cu_1$, а для (14) из (8) при замене $\tau_n \rightarrow u_1$, $\alpha_n \rightarrow 2$, полагаем также $u_1(1) = 1$. Постоянная C выбирается из условия разрешимости (13) $\Delta_1(x_c) = 0$ (11).

Постоянная C не зависит от точки сшивки x_c , поскольку C эквивалентным образом можно найти из условия ортогональности решения уравнения, сопряженного к однородному уравнению (14), с правой частью (13). То, что решение сопряженного уравнения нетривиально, следует из неразрешимости задачи (6), (9) и альтернативы Фредгольма. Решения (13) и (14) при некоторых $Pr(Re)$ представлены на фиг. 3, где положено $u_1(1) = 1$. Кривые 1 соответствуют $Pr = 0,56$, $Re = 7,08$; 2 — $Pr = 0,55$, $Re = 9,23$; 3 — $Pr = 0,54$, $Re = 12,1$; 4 — $Pr = 0,53$, $Re = 16,3$.

Особенностью решений уравнения (7) является наличие области, где $u(x) < 0$. Таким образом, вязкий нагрев приводит к появлению отрицательного вклада в температуру, что обусловлено дипольным характером члена с $n = 2$ в разложении (1).

Действительно, в предельном случае $Pr = 0$ имеем $u(x) = Cx$, так что $u(x)$ меняет знак при $x = 0$.

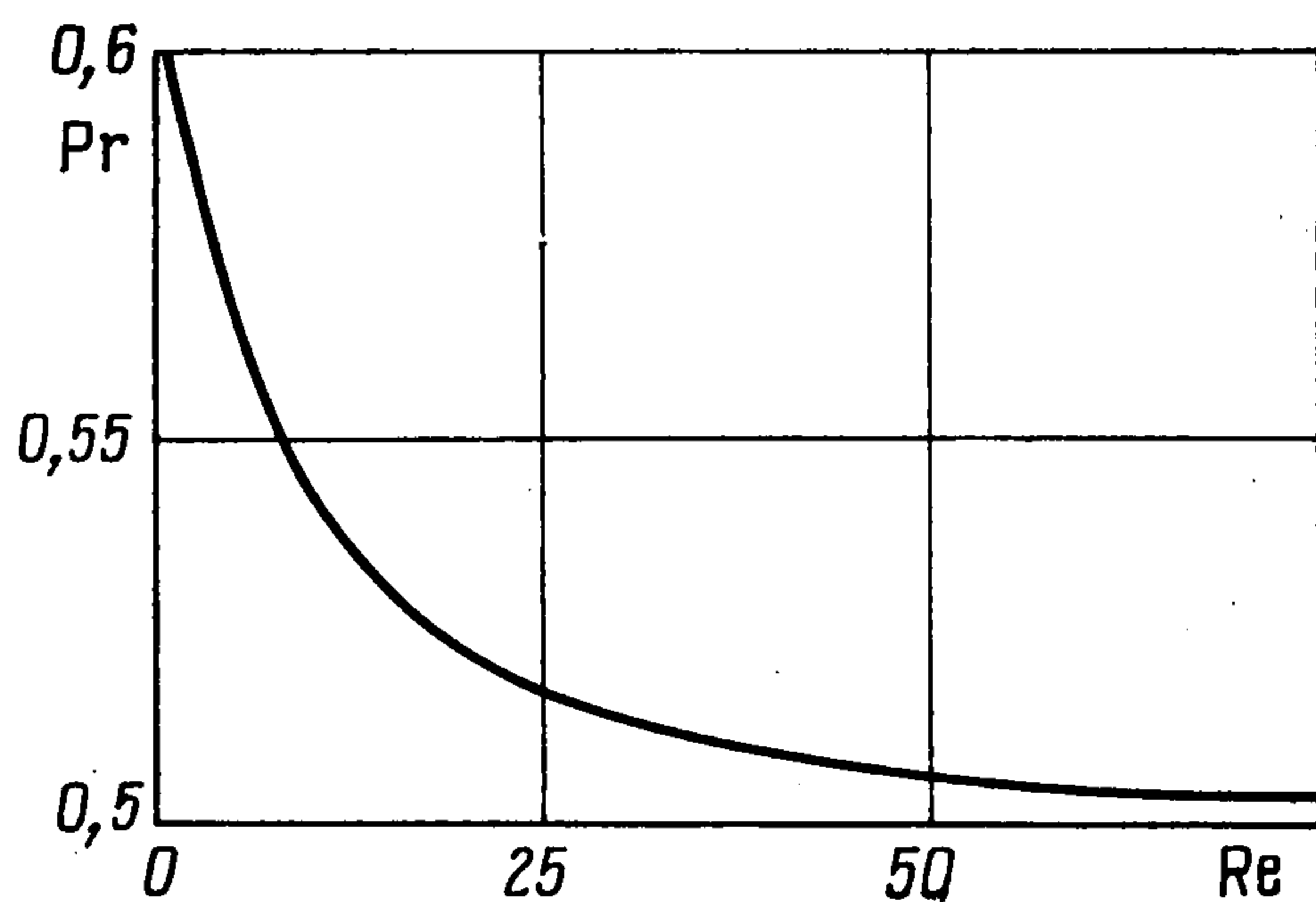
Рассмотрим случай $Pr \rightarrow \infty$. Исследуем решение уравнения (7) в окрестности точки $x = 1$. Положим $t = 1 - x \ll 1$, $\mu = 2Pr/(A - 1)$, тогда из (6) получим

$$tu'' + (1 + \mu t)u' + 2\mu u + \Phi(1)/2 = O(1/\mu, t), \quad u = u(t)$$

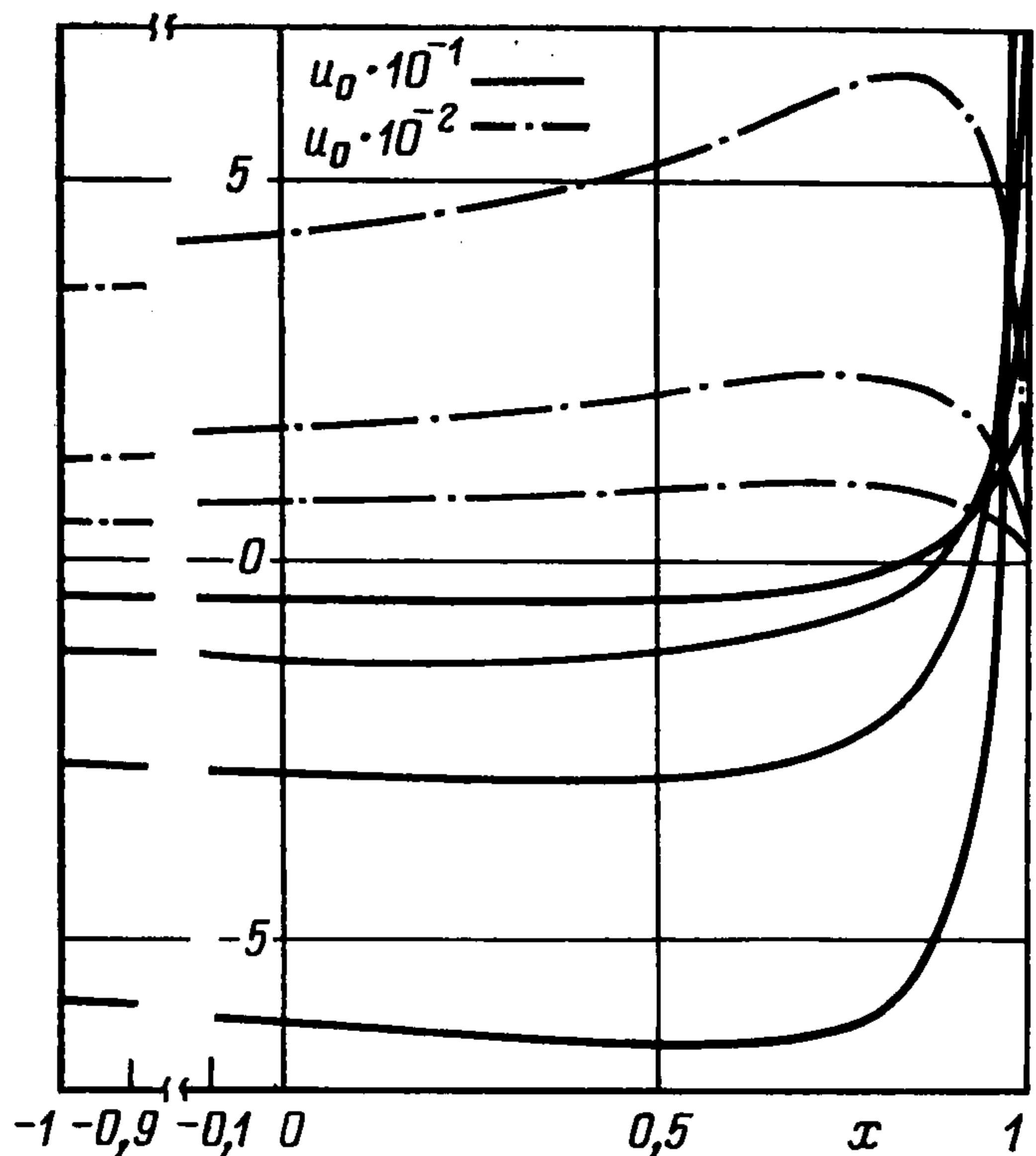
Решение этого уравнения с точностью до малых второго порядка имеет вид

$$u(t) = C(1 - \mu t)e^{-\mu t} - \Phi(1)/(4\mu), \quad C = \text{const}$$

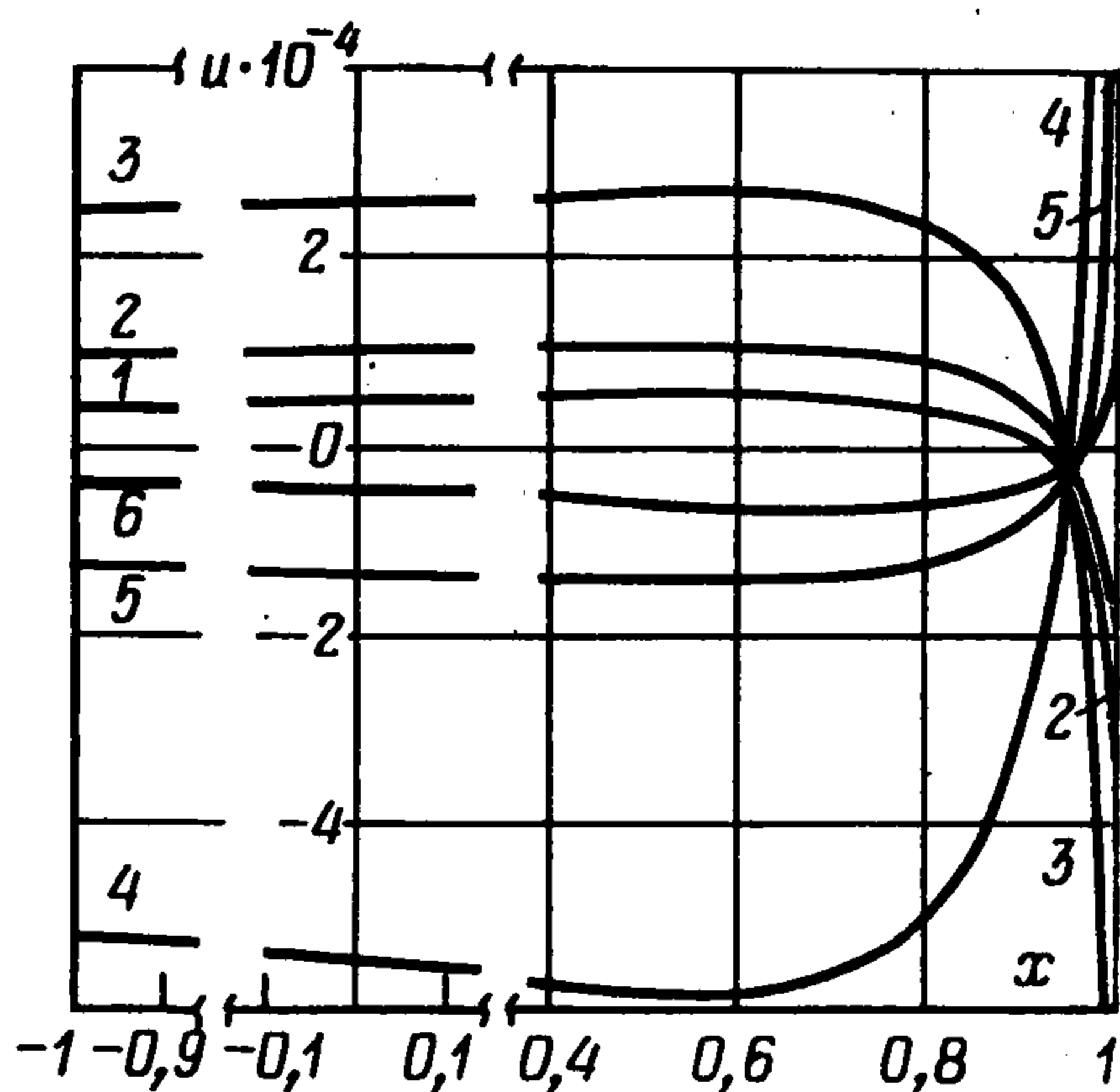
Отсюда при $t = 1/\mu$ имеем $u < 0$, следовательно, по непрерывности существует область значений x , где $u < 0$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

В случае произвольных чисел Pr , Re решение уравнения (6) находилось численно. Характерные профили $u(x)$ вблизи кривой неразрешимости приведены на фиг. 4. Параметром служит число Pr при фиксированном $Re = 15,2$. Кривым 1—6 соответствуют значения числа Прандтля, равные 0,525; 0,529; 0,531; 0,533; 0,535; 0,539. Видно, что решение при переходе через число Pr_* , лежащее на кривой неразрешимости, качественно изменяется, изменяется и физический смысл решений.

Заметим, что решение вида (12) для рассматриваемой задачи является полным, поскольку собственные значения однородной задачи изолированы. Если бы какие-либо собственные значения были бы кратны, то в (1), равно как и в (12), необходимо было бы добавить члены, являющиеся полиномами степени $k - 1$ от $\ln R$, где k — кратность, умноженными на $R^{-\alpha_n}$, где α_n определяет k -кратное собственное значение $\lambda_n = \alpha_n (\alpha_n - 1)$.

Для того чтобы прояснить физический смысл кривой неразрешимости, рассмотрим простой пример тепловой задачи конвективной теплопроводности с вязким нагревом для плоского гидродинамического стока.

Уравнение теплопроводности (2) аксиально-симметричной задачи с полем скорости

$$u_r = -\frac{Q}{2\pi r}, \quad u_\theta \equiv 0$$

где (r, θ) — полярные координаты, Q — расход, принимает вид (Pe — число Пекле)

$$(15) \quad -\frac{Pe}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dT}{dr} + \frac{q}{r^2}, \quad Pe = \frac{Q}{2\pi a}, \quad q = \frac{4\nu a Pe^2}{c_p}$$

Решение уравнения (15) с граничными условиями $T(r_0) = T_0$, $T(\infty) = 0$ имеет вид

$$(16) \quad T(r) = \left[T_0 - \frac{q}{2(Pe-2)} \frac{1}{r_0^2} \right] \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-Pe} + \frac{q}{2(Pe-2)} \frac{1}{r^2}, \quad Pe \neq 2$$

$$T(r) = q \frac{\ln(r/r_0)}{2r^2} + T_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad Pe = 2$$

Видно, что решение имеет такой же характер, как и в случае струи Ландау. Кривой неразрешимости соответствует точка $Pe = 2$. При $Pe \rightarrow \infty$ из решения (16) следует, что член $\sim r^{-Pe}$ характеризует тепловой пограничный слой при $r=r_0$. При $Pe = \infty$ тепловая задача становится задачей конвективного переноса тепла без тепловой диффузии. Для такой задачи граничные условия можно ставить только на границе вытекания жидкости, в нашем случае это условие $T(\infty) = 0$. При больших, но конечных значениях Pe , конвективный перенос тепла доминирует над кондуктивным, так что условия на границе вытекания ($r=r_0$) не имеют принципиального значения. Эта область конвективного переноса тепла соответствует $Pe > 2$.

При $Pe < 2$ постановка граничного условия при $r=r_0$ носит принципиальный характер, поскольку при $r \rightarrow \infty$ член $\sim r^{-Pe}$ становится главным и определяет температуру жидкости в области вытекания. В этом случае граничные условия взаимодействуют, а это характерно для диффузионного переноса тепла. Граница $Pe = 2$ отделяет два этих характерных режима теплообмена.

Заметим, что решение задачи в области с выколотой точкой $r=0$ имеет физический смысл лишь при $Pe > 2$. При $Pe < 2$ и $r \rightarrow 0$ получаются нефизические отрицательные температуры.

В случае струи Ландау физически приемлемые решения можно получить лишь в области $0 < R_0 \leq R$, поскольку всегда существует область с $u(x) < 0$. Подобно плоскому гидродинамическому стоку, кривая неразрешимости задачи (6), (9) $Pr_* = Pr(Re)$ отделяет область преимущественного конвективного переноса тепла ($Pr > Pr_*$) от области преимущественного кондуктивного переноса тепла ($Pr < Pr_*$).

Действительно, если тепловой поток на бесконечности равен нулю, то $\tau_1 \equiv 0$ и при $Pr > Pr_*$ главным членом при $R \rightarrow \infty$ является частное решение неоднородного уравнения (2): $z(x) R^{-2}$, то температура на бесконечности определяется диссипативным нагревом, а не источником тепла на сфере $R = R_0$. Если же $Pr < Pr_*$, то дипольный член решения однородного уравнения (2) становится главным при $R \rightarrow \infty$, т. е. в этом случае влияние граничного условия при $R = R_0$ простирается на бесконечность, что характерно для кондуктивной теплопроводности.

Если тепловой поток на бесконечности не равен нулю, то различать эти два режима теплообмена вряд ли имеет смысл. Следует отметить, что возможность выделения режимов теплообмена существенным образом зависит от вида распределения в объеме теплового источника, которым в данном случае являлась вязкая диссипация кинетической энергии жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса. — Докл. АН СССР, 1944, т. 43, № 7, с. 299—301.
2. Румер Ю. В. Конвективная диффузия в затопленной струе. — ПММ, 1953, т. 17, вып. 6, с. 743—744.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1953. 676 с.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
8.IV.1983