Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 532.516:536.25

СЛАБОНАДКРИТИЧЕСКИЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ИСКРИВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Маломед Б. А., Старосельский И. Е.

Описываются ячеистые структуры малой амплитуды на цилиндрическом и сферическом фронтах газового горения и лазерного испарения. В случае сферического фронта все эти структуры оказываются неустойчивыми. При расширении цилиндрического фронта газового горения на нем должна наблюдаться смена квазиодномерной структуры, однородной по циклической координате, паркетом из прямоугольных ячеек с дальнейшим выходом на существенно нестационарный режим. На цилиндрическом фронте лазерного испарения глобально устойчивой является квазиодномерная структура максимальной амплитуды.

Наиболее известным гидродинамическим примером кинетической задачи, связанной с образованием диссипативных структур, т. е. термодинамически неравновесных стационарных структур, возникающих вследствие развития апериодической неустойчивости пространственно-однородного состояния, являются ячейки Бенара [1, 2]. Новые задачи такого рода связаны с неустойчивостью плоских фронтов лазерного испарения конденсированного вещества и газового горения [3—5]. Эта неустойчивость апериодическая и возникает при конечном значении волнового числа возмущения, представляющего собой искривление плоского фронта. Развитие неустойчивости приводит к формированию стационарного, периодически искривленного фронта [3].

Цель данной работы — изучение такого рода структур и их устойчивости на цилиндрической и сферической поверхностях, что отвечает задаче о распространении цилиндрического или сферического пламени в газе, а также о лазерном испарении сферического образца. Задачи о диссипативных структурах на искривленных поверхностях представляют также интерес для биофизики, где сферическая поверхность моделирует клеточную мембрану, а цилиндрическая — аксон [6].

1. В слабонадкритическом случае, т. е. сразу после потери устойчивости невозмущенного решения, эволюция формы газового пламени описывается безразмерным уравнением [7]:

$$\xi_t+\xi+2\alpha\Delta\xi+\Delta^2\xi+(\nabla\xi)^2=0,\quad \alpha=\sqrt{R/R_0} \tag{1.1}$$

Здесь $\xi\ (t, x, y)$ — координата отдельной точки пламени в локально сопутствующей системе отсчета, в которой невозмущенное цилиндрическое пламя описывается тривиальным решением $\xi\equiv 0$; градиент ∇ и лапласиан Δ действуют на координаты x, y, направленные вдоль невозмущенного пламени, R — радиус кривизны пламени, а R_0 — значение радиуса, начиная с которого тривиальное решение теряет устойчивость. Безразмерные координаты ξ, x, y измеряются в единицах тепловой толщины пламени l, а время — в единицах l/U, где U — нормальная скорость распространения пламени. Уравнение (1.1) выведено из уравнений Навье — Стокса, теплопроводности и диффузии в предположениях, что энергия активации горения много больше температуры на фронте, коэффициенты диффузии и теплопроводности близки и изменение плотности газа на фронте мало.

Испарение конденсированного вещества в поле лазерного излучения описывается феноменологическим уравнением [8]

$$\xi_t+\xi+2\alpha\Delta\xi+\Delta^2\xi+\xi^3=0 \tag{1.2}$$

Здесь α — параметр, пропорциональный интенсивности излучения; остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в (1.1).

2. В случае цилиндрической поверхности y считаем циклической координатой ($0 \leqslant y < 2\pi R$), а x направим вдоль образующей цилиндра. Тогда волновой вектор $\mathbf{k}$ малого возмущения может иметь произвольную компоненту k_x, а его компонента k_y «квантована», т. е.

(2.1) $\qquad k_y = nR^{-1}, \; n = 0, \; 1, 2 \; \ldots$

Тривиальное решение $\xi \equiv 0$ теряет при $\alpha > 1$ устойчивость к возмущениям с волновыми векторами, принадлежащими любой из следующих областей:

(2.2) $\qquad \varepsilon^2 \, (k_x^2 + n^2 R^{-2}) \geqslant 0, \; k_y = nR_0^{-1}, \; n \leqslant [R_0]$

(2.3) $\qquad \varepsilon^2 \, (k^2) \equiv 2 \, (\alpha - 1) - (k^2 - 1)^2$

Видно, что условие малой надкритичности означает малость величины $\lambda^2 \equiv 2 \, (\alpha - 1)$, а следовательно, малость ε^2. В случае уравнения (1.2) на цилиндрической поверхности имеются различные локально устойчивые решения. Наиболее простое из них — квазиодномерные структуры [8]

(2.4) $\qquad \xi \, (x) = \sqrt{{}^4/_3}\varepsilon \, (k^2) \cos kx + O \, (\varepsilon^3)$

где k принадлежит области (2.2) при $n = 0$. Имеется также решение в виде решетки из прямоугольных ячеек

(2.5) $\qquad \xi = {}^2/_3 \, [(2\varepsilon^2 \, (k_y^2) - \varepsilon^2 \, (k_x^2))^{1/2} \cos kx + (2\varepsilon^2 \, (k_x^2) - \varepsilon^2 \, (k_y^2))^{1/2} \cos ky]$

где вектор (k_x, k_y) принадлежит одной из областей (2.2) при $n \neq 0$, а также два решения в виде решеток из треугольных ячеек

(2.6) $\qquad \xi = \sqrt{{}^4/_{15}}\varepsilon \, (k^2) \left[\sin kx + \sin \frac{k}{2} (\sqrt{3}y - x) - \sin \frac{k}{2} (\sqrt{3}y + x)\right]$

(2.7) $\qquad \xi = \sqrt{{}^4/_{15}}\varepsilon \, (k^2) \left[\sin ky + \sin \frac{k}{2} (\sqrt{3}x - y) - \sin \frac{k}{2} (\sqrt{3}x + y)\right]$

и два решения, состоящие из гексагональных ячеек

(2.8) $\qquad \xi = \sqrt{{}^4/_{15}}\varepsilon \, (k^2) \left[\cos kx + \cos \frac{k}{2} (\sqrt{3}y - x) + \cos \frac{k}{2} (\sqrt{3}y + x)\right]$

(2.9) $\qquad \xi = \sqrt{{}^4/_{15}}\varepsilon \, (k^2) \left[\cos ky + \cos \frac{k}{2} (\sqrt{3}x - y) + \cos \frac{k}{2} (\sqrt{3}y + x)\right]$

В случаях (2.6), (2.8) $\sqrt{3}k = mR_0^{-1}$, а в случаях (2.7), (2.9) $k = mR_0^{-1}$ ($m = 1, 2 \ldots$), и в обоих случаях k^2 принадлежит интервалу (2.2) при $n = 0$.

Важно заметить, что уравнение (1.2) представимо в градиентном виде

(2.10) $\qquad \xi_t = -\frac{\delta H \{\xi\}}{\delta \xi}, \; H \{\xi\} = \int dx \, dy \left[\frac{\xi^2}{2} - \alpha \, (\nabla \xi)^2 + \frac{(\Delta \xi)^2}{2} + \frac{\xi^4}{4}\right]$

Отсюда видно, что функция H, подобно энергии в диссипативных механических системах, не возрастает со временем, т. е.

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\delta H}{\delta \xi} \xi_t \, dx \, dy = -\int \left(\frac{\delta H}{\delta \xi}\right)^2 dx \, dy$$

Поэтому наиболее устойчивым из решений (2.4) — (2.9) будет то, которое реализует абсолютный минимум среднего значения H на единицу поверхности: $h = H / \int dxdy$. Соответствующие вычисления показывают, что минимальное значение $h = -{}^1/_6 \varepsilon^4 \, (k^2)$ достигается на квазиодномерной структуре.

Необходимо убедиться, что решения (2.4) устойчивы также к малым возмущениям. Линеаризация уравнения (1.2) по малому возмущению u на фоне стационарного решения (2.4) дает

$$u_t + u + 2\alpha\Delta u + \Delta^2 u + 2\,(1 + \cos\,(2\mathbf{kx}))\,u = 0, \quad \mathbf{k} = (k,\,0) \tag{2.11}$$

Собственная мода, которая может привести к неустойчивости, имеет следующий общий вид:]

$$u = \exp\,[\Omega\,(\mathbf{p})\,t]\,(a_+ \cos \mathbf{p}_+\mathbf{x} + b_+ \sin \mathbf{p}_+\mathbf{x} + b_- \sin \mathbf{p}_-\mathbf{x} + a_- \cos \mathbf{p}_-\mathbf{x}), \quad \mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}, \quad |\mathbf{p}| \ll 1 \tag{2.12}$$

Дисперсионное соотношение, связывающее Ω и $\mathbf{p}$, находится путем подстановки (2.12) в (2.11) и приравнивания нулю коэффициентов при независимых гармониках. Получающийся при этом определитель четвертого порядка представляется в виде квадрата определителя второго порядка, и уравнение принимает вид

$$[\Omega - \varepsilon^2\,(\mathbf{p}_+^2) + 2\varepsilon^2\,(k^2)]\,[\Omega - \varepsilon^2\,(\mathbf{p}_-^2) + 2\varepsilon^2\,(k^2)] - \varepsilon^4\,(k^2) = 0 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) определяет две ветви инкремента $\Omega\,(\mathbf{p})$, из которых первая заведомо отрицательна при малых p^2, поскольку для нее $\Omega\,(0) = -2\varepsilon^2\,(k^2)$, а вторая обращается в нуль при $p^2 \to 0$

$$\Omega\,(\mathbf{p}) = {}^1/_2\,(-\varepsilon^2\,(k^2) + 2\,(k^2 - 1)^2)\,(\mathbf{kp})^2 - \mathbf{p}^4 \tag{2.14}$$

(Первая ветвь представляет фактически посторонний корень дисперсионного уравнения, появление которого связано с формальным повышением порядка при переходе от основного уравнения (2.11) к укороченным [9].)

Из выражения (2.14) следует, что квазиодномерная структура (2.4) локально устойчива тогда, когда выполняется условие, полученное в [8] для чисто одномерного случая

$${}^2/_3\lambda^2 \leqslant \varepsilon^2\,(k^2) \leqslant \lambda^2$$

т. е. в области, в которой квадрат амплитуды основной (первой) гармоники решения не менее двух третей своего максимального значения, достигаемого при $k^2 = 1$. Поскольку абсолютный минимум величины h достигается на решении (2.4) при $k^2 = 1$, именно к этой структуре должен в конце концов эволюционировать цилиндрический фронт испарения, возникающий из почти любых начальных условий. Излагаемые результаты, касающиеся устойчивости решений уравнения (1.2) с цилиндрическими граничными условиями, почти дословно можно перенести на случай неограниченной плоскости; вид решений (2.4) —(2.9) при этом также практически не изменяется.

Совершенно иначе обстоит дело в случае уравнения с квадратичной нелинейностью (1.1). На неограниченной плоскости это уравнение вообще не имеет устойчивых стационарных решений (по крайней мере, достаточно простого вида). Однако на цилиндрической поверхности, как будет показано ниже, имеются устойчивые решения. Одно из них — это квазиодномерное решение [1]

$$\xi\,(x) = 3\varepsilon\,(k^2)\sin kx - {}^9/_2\varepsilon^2\,(k^2) - {}^1/_2\varepsilon^2\,(k^2)\cos 2kx \tag{2.15}$$

Оно устойчиво, если радиус цилиндра $R < 1 - \lambda/2$, так как собственные моды малых возмущений, разрушающих структуру (2.15), запреща-

[1] Детали исследования таких решений на цилиндрической поверхности содержатся в работе: *Malomed B.A.*, *Staroselsky I. E.* Stability of Quasiharmonic Structures in Gas Flames.— Preprint. Chernogolovka, 1983. 15 p.

ются условием периодичности. При $R > 1 - \lambda/2$ решение (2.15) становится неустойчивым, например к возмущению $u \sim \exp(\Omega t) \sin(yR^{-1})$.

Когда R при дальнейшем увеличении попадает в узкий интервал

$$1 - \lambda/2 \leqslant R \leqslant 1 + \lambda/2 \tag{2.16}$$

впервые появляется разрешенное условием (2.1) значение k_y, при котором вектор (k_x, k_y) попадает в область (2.2) с $n = 1$. Возникающее при этом решение в виде прямоугольных ячеек

$$\xi = 3\varepsilon(k_x^2) \sin k_x x - {}^9/_2\varepsilon^2(k_x^2) - {}^1/_2\varepsilon^2(k_x^2) \times \times \cos 2k_x x + 3\varepsilon(k_y^2) \sin k_y y - {}^9/_2\varepsilon^2(k_y^2) - {}^1/_2\varepsilon^2(k_y^2) \cos 2k_y y \tag{2.17}$$

на плоскости локально неустойчиво, однако в интервале (2.16) собственные моды малых возмущений, разрушающих структуру (2.17), запрещаются условием периодичности. При дальнейшем увеличении R прямоугольная решетка исчезнет, так как это решение уже не удовлетворяет граничному условию и в этой области, по-видимому, возникнет стохастический режим. Уравнение (1.1) допускает также гексагональные решения, которые, однако, неустойчивы даже к чисто амплитудным возмущениям, т. е. возмущениям, не нарушающим симметрию решения, а следовательно, никакие граничные условия не могут их стабилизировать.

Таким образом, уравнение (1.2) имеет семейство устойчивых ячеистых решений на цилиндрической поверхности любого радиуса, из которых наиболее устойчиво квазиодномерное

$$\xi(x) = \sqrt{{}^4/_3}\lambda \cos x + O(\lambda^3)$$

При расширении же цилиндрического фронта горения в газовой смеси, описываемого уравнением (1.1), на его фронте должна наблюдаться смена квазиодномерной структуры прямоугольным паркетом с дальнейшим выходом на существенно нестационарный режим горения. Следует отметить, что ячеистые структуры в газовых пламенах наблюдались экспериментально [10] и они действительно переходили в стохастические при больших значениях R_0.

3. Если уравнения (1.1), (1.2) заданы на сферической поверхности радиуса R, тривиальное решение $\xi \equiv 0$ в слабонадкритической области $\lambda^2 \ll 1$ теряет устойчивость к малым возмущениям

$$\xi \sim e^{\Omega t} Y_{lm}(\theta, \varphi) = e^{\Omega t} P_{lm}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

при выполнении условия

$$\varepsilon^2(l, R) = \lambda^2 - [l(l+1)/R^2 - 1]^2 \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Здесь θ и φ — сферические координаты, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферическая гармоника, $P_{lm}(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра.

Если

$$R \ll R_c, \quad R_c = (2\lambda)^{-1} \tag{3.2}$$

то имеются узкие (шириной $\sim\lambda^2$) области значений радиуса R, для которых существует (причем единственное) целое l из (3.1) и расстояние между этими областями ~ 1.

Когда R становится сравнимым с R_c, области, в которых устойчив невозмущенный сферический фронт, исчезают, и в дальнейшем, при $R \gg R_c$, выражение (3.1) определяет, подобно (2.2), широкий спектр собственных мод, возбуждающихся при фиксированном R.

Здесь будет рассмотрен лишь случай (3.2), поскольку противоположная ситуация близка к описанной выше. Тогда диссипативная структура при выполнении условия (3.1) будет описываться формулой

$$(3.3) \qquad \xi(\theta, \varphi) = a_{lm} P_{lm}(\cos\theta)\cos m\varphi + o(a_{lm})$$

где амплитуда структуры a_{lm} — величина порядка $\varepsilon(l, R)$ или $\varepsilon^2(l, R)$ (см. ниже). Значение l определяется из (3.1), $0 \leqslant m \leqslant l$. При $m = 0$ эти структуры описывают кольца на сфере и аналогичны квазиодномерным структурам (2.4), (2.15), а при $m \geqslant 1$ описывают сетку из сферических трапеций, напоминающую структуры (2.5), (2.17). Здесь будут вычислены величины a_{lm} для уравнений (1.1), (1.2) в различных частных случаях и показана неустойчивость всех соответствующих решений.

Для описания решения уравнения (1.1) достаточно учитывать первый член ряда, начало которого выписано в (3.3), только если l четно и $m=0$. Тогда подстановка (3.3) в (1.1) дает

$$(3.4) \qquad a_{l0} = \varepsilon^2(l, R)\frac{R^2}{2l+1} \times \left[\int\limits_0^\pi \left(\frac{\partial P_{l0}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2 P_{l0}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{-1}$$

(При нечетном l интегрирование по $d\theta$ обратило бы правую часть (3.4) в ∞.) Поскольку получившаяся амплитуда имеет второй порядок малости, можно сразу заключить, что структура неустойчива.

Действительно, если выбрать на фоне (3.3) возмущение в виде $u \sim e^{\Omega t} Y_{lm_1}$ с любым $m_1 \neq 0$, стабилизирующий вклад в инкремент Ω за счет члена $(\nabla\xi)^2$ будет во всяком случае пропорционален $\varepsilon^4(l, R)$, тогда как дестабилизирующий, происходящий из линейной части уравнения, равен $\varepsilon^2(l, R)$.

В случае нечетных l либо $m \neq 0$ амплитуда стационарной структуры (3.3) формируется всеми сферическими гармониками Y_{LM}, для которых

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} Y_{lm}(\nabla Y_{LM} \nabla Y_{lm}) \sin\theta d\theta\, d\varphi \neq 0$$

Простейшее решение такого типа, соответствующее $l = 1$, $m = 0$, следует искать в виде (решения, соответствующего $l = 1$, $m = 1$, не существует)

$$(3.5) \qquad \xi = a_{10}\cos\theta + 3A\cos\theta\sin\theta\cos\varphi$$

Подставляя (3.5) в (1.1) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых гармониках, можно найти их амплитуды

$$(3.6) \qquad a_{10} = \sqrt{5}\,\varepsilon(1, R), \quad A = (^{18}/_{11})\,\varepsilon^2(1, R)$$

Таким образом, амплитуда основной (первой) гармоники решения пропорциональна $\varepsilon(1, R)$. Это утверждение справедливо и для любого нечетного $l > 1$. Если рассмотреть на фоне решения (3.5), (3.6) малое возмущение, пропорциональное $e^{\Omega t}\sin\theta\cos\varphi$, то можно видеть, что его инкремент неустойчивости положителен: $\Omega = \varepsilon^2$. По-видимому, этой неустойчивостью обладают стационарные решения со всеми нечетными $l > 1$.

Следует отметить, что, поскольку кривизна служит стабилизирующим фактором, а число l, определяемое из (3.1), растет при уменьшении кривизны, неустойчивость структур (3.4), (3.5) и (3.6), отвечающих минимальным $l = 1, 2$, сразу указывает на неустойчивость всех решений уравнения (1.1) на сфере. Этот вывод об отсутствии стационарных устойчивых структур в газовых пламенах, описываемых уравнением (1.1), совпадает с результатами численного эксперимента [11].

Для нахождения стационарного решения уравнения (1.2) учет только основной гармоники (3.3) оказывается всегда достаточным, так как функции $P_{lm}(x)$ и $[P_{lm}(x)]^3$ имеют одинаковую четность при всех l и m. Например, амплитуда, отвечающая $l = 1$ и $m = 0$, находится из соотношения

$$-\varepsilon^2 (1, R) \langle \cos^2 \theta \rangle + a_{10}{}^2 \langle \cos^4 \theta \rangle = 0$$

$$\left(\langle f(\theta) \rangle \equiv \int_0^\pi f(\theta) \sin\theta \, d\theta\right)$$

откуда

(3.7) $$a_{10} = \sqrt{5/3}\,\varepsilon (1, R)$$

Единственная собственная мода малого возмущения, которая может привести к неустойчивости этого решения, в нулевом по ε порядке имеет вид

(3.8) $$u = e^{\Omega t} \sin \theta \cos \varphi$$

Однако можно убедиться, что использование выражения (3.8) приводит лишь к сокращению дестабилизирующего вклада $\varepsilon^2 (1, R)$ в инкремент Ω, который таким образом следует искать с точностью до членов порядка $\varepsilon^4 (1, R)$. Для этого следует найти пропорциональную ε^2 поправку к собственной моде (3.8)

(3.9) $$u_1 = -{}^1/_{49}\varepsilon^2 (1, R) P_{31} (\cos \theta) \cos \varphi$$

Подстановка выражений (3.6) — (3.9) в (1.2) показывает, что решение, определяемое выражениями (3.3), (3.6), неустойчиво и $\Omega = (6 / 343)\, \varepsilon^4 (1, R)$. Амплитуда решения, пропорционального Y_{11}, и инкремент его неустойчивости совпадают с только что найденными. Приведем также значение $a_{20} = (56 / 339)\, \varepsilon$ для решения, пропорционального Y_{20}. Это решение также неустойчиво с инкрементом, пропорциональным $\varepsilon^4 (2, R)$. Следует, однако, иметь в виду, что внесение в уравнение (1.2) малых членов, например ξ^5, изменит инкремент на величину порядка ε^4, что может, в принципе, изменить его знак. Поэтому в рамках точности, с которой уравнение (1.2) описывает физическую задачу, решение (3.7) и аналогичные ему (см. ниже) следует считать нейтрально устойчивыми.

Получить компактные выражения для амплитуд ячеистых структур и исследовать их устойчивость удается также для случая, когда радиус сферы $R \gg 1$ (оставаясь при этом в области (3.2)). Тогда число l, определяемое из (3.1), также велико и применимы асимптотические выражения [12] для полиномов Лежандра. Все амплитуды удобно определять не по соотношению (3.3), а следующим образом:

(3.10) $$\xi = A_{lm} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] \sin^{-1/2}\theta \cos m\varphi, \quad m \text{ четно}$$

$$\xi = A_{lm} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] \sin^{-1/2}\theta \cos m\varphi, \quad m \text{ нечетно}$$

Подстановка (3.10) в (1.2) дает для квазиодномерной структуры

(3.11) $$A_{l0} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, I_l^{-1/2} \varepsilon (l, R)$$

и для всех паркетных структур вне зависимости от числа m

(3.12) $$A_{lm} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\, I_l^{-1/2} \varepsilon (l, R)$$

где I_l — величина, с логарифмической точностью равная $2 \ln l$. (Поскольку $l \gg 1$, при записи выражений (3.11), (3.12), величина $l + {}^1/_2$ заменялась на l.) Заметим, что при росте радиуса R относительное искривление поверхности, связанное с образованием диссипативной структуры, мало, т. е.

$$A_{lm}/R \sim \left(R\sqrt{\ln R}\right)^{-1} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty$$

Для того чтобы показать, что все паркетные структуры неустойчивы, достаточно взять на их фоне малое возмущение, не зависящее от φ

$$u \sim e^{\Omega t} \sin\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] \sin^{-1/2}\theta$$

что дает $\Omega = {}^2/_3 \varepsilon^2 (l, R)$. Можно показать также, что квазиодномерная структура устойчива относительно возмущений, пропорциональных Y_{lm} с четными m. Для возмущения же, пропорционального $Y_{l1}(\theta, \varphi)$, стабилизирующий вклад в инкремент оказывается равным ${}^3/_4 A_{l0}^2 (I_l/\pi)$, что в точности сокращает дестабилизирующий член $\varepsilon^2 (l, R)$ вне зависимости от способа вычисления величины I_l. Поэтому для выяснения устойчивости кольцевых структур необходимо, как показано выше, рассмотреть поправку к собственной моде, пропорциональную ε^2. В результате получается, что все кольцевые структуры неустойчивы с инкрементом порядка $\varepsilon^4 (l, R)$.

Отметим, что на сферической поверхности можно было бы искать решения уравнений (1.1), (1.2), в первом приближении пропорциональные комбинации гармоник Y_{lm} с разными m при одинаковом l, попадающем в область (3.1). Оказывается, однако, что по крайней мере при $l = 1, 2, 3$ такие решения отсутствуют как в случае уравнения (1.1), так и в случае уравнения (1.2). Такими решениями могут обладать уравнения, содержащие одновременно квадратичную и кубичную нелинейности.

4. Рассмотрим некоторые одномерные решения уравнений (1.1), (1.2) на плоскости, которые сами обладают нетривиальными топологическими свойствами [13]

$$\xi(x) = a(x)\sin kx + o(a), \quad |\nabla a| \ll 1 \tag{4.1}$$

Подстановка (4.1), например, в (1.2) показывает, что такое решение существует только при $k^2 = \alpha$ и амплитуда $a(x)$ имеет вид

$$a(x) = \sqrt{4/3}\,\lambda\, \mathrm{th}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{2}}\,x\right) \tag{4.2}$$

Его «топологический заряд» [13] проявляется в том, что при переходе от $x = -\infty$ к $x = +\infty$ амплитуда меняет знак; иными словами, в точке $x = 0$, где амплитуда обращается в нуль, фаза приобретает скачком сдвиг на π. Решение (4.1), (4.2) устойчиво, а аналогичное ему решение уравнения (1.1) на неограниченной плоскости неустойчиво.

Авторы благодарят С. И. Анисимова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. *Горьков Л. П.* Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 33, вып. 2, с. 402—407.
3. *Истратов А. Г., Либрович В. Б.* Устойчивость пламен.— В кн.: Итоги науки. Гидромеханика. М.: ВИНИТИ, 1966. 68 с.
4. *Алдушин А. П., Каспарян С. Г., Шкадинский К. Г.* Образование двумерной ячеистой структуры в теплодиффузионном пламени.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1112—1115.

5. *Анисимов С. И., Трибельский М. И., Эпельбаум Я. Г.* Неустойчивость плоского фронта испарения при взаимодействии лазерного излучения с веществом.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1981, т. 57, с. 1117.
6. *Scott A. C.* The Electrophysics of a Nerve Fiber.— Revs Mod. Phys., 1975, v. 47, No. 2, p. 487—533.
7. *Sivashinsky G. I.* On Flame Propagation under Conditions of Stoichiometry.— SIAM J. Appl. Math., 1980, v. 39, No. 1, p. 67—82.
8. *Анисимов С. И., Гольберг С. М., Маломед Б. А., Трибельский М. И.* Двумерные слабонадкритические структуры в лазерных волнах сублимации.— Докл. АН СССР, 1982, т. 262, № 5, с. 1117—1120.
9. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
10. Nonsteady Flame Propagation. Oxford: Pergamon Press, 1966. 328 p.
11. *Michelson D. M., Sivashinsky G. I.* Thermal — Expansion Induced Cellular Flames.— Combust. and Flame, 1982, v. 48, No. 2, p. 211—217.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
13. *Поляков А. М.* Изомерные состояния квантовых полей.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1975, т. 68, вып. 6, с. 1975—1990.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1983