

УДК 532.516:536.25

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СМЕШАННО-КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С ВОЛНИСТЫМИ ГРАНИЦАМИ

Возовой Л. П., Непомнящий А. А.

Исследуется устойчивость стационарных и колебательных конвективных движений, развивающихся в вертикальном слое с периодически искривленными границами при наличии продольной прокачки жидкости. Амплитуда волнистости границ и поток жидкости вдоль слоя предполагаются малыми; используются методы теории возмущений. Исследованы характерные свойства спектра инкрементов пространственно-периодических движений, определены типы наиболее опасных возмущений и форма областей устойчивости.

Теоретические исследования влияния пространственной неоднородности граничных условий на устойчивость конвекции немногочисленны и касаются преимущественно горизонтальных слоев жидкости [1—3]. Расчет стационарных пространственно-периодических движений в вертикальном слое с искривленными границами для случая свободной конвекции (при условии замкнутости потока) осуществлялся в [4], а исследование их устойчивости — в [5]. Установлено [6], что наличие малого, но конечного потока жидкости вдоль слоя приводит к увеличению числа различных режимов течения и появлению в припороговой области нестационарных конвективных движений.

1. Рассматривается двумерное движение жидкости в бесконечном вертикальном слое, на твердых границах которого

$$x = \pm d \left(1 - \eta \cos \frac{k_0 y}{d} \right)$$

поддерживаются постоянные разные температуры $T = \pm \Theta$. Поток жидкости через поперечное сечение равен Q . Система уравнений конвекции в безразмерных переменных имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= \Delta^2 \psi + D(\psi, \Delta \psi) - G \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{P} \Delta T + D(\psi, T) \\ D(\psi, F) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Здесь ψ — функция тока, T — температура, G — число Грасгофа, P — число Прандтля.

Граничные условия

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x = -(1 - \eta \cos k_0 y), \quad T = -1, \quad \psi = q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ x = 1 - \eta \cos k_0 y, \quad T = 1, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad |\psi| < \infty, \quad |T| < \infty \end{aligned}$$

($q = Q/\nu$ — безразмерный поток жидкости).

2. При $\eta = q = 0$ задача (1.1), (1.2) обладает решением

$$(2.1) \quad U_0 = (\psi_0, T_0), \quad \psi_0 = \frac{G}{24} (1 - x^2)^2, \quad T_0 = x$$

соответствующим плоскопараллельному течению. Для умеренных чисел Прандтля P данное решение монотонно неустойчиво по отношению к

возмущениям с волновым числом k при превышении порогового числа Грасгофа $G_0(k)$; нейтральная кривая $G_0(k)$ имеет минимум $G = G_c$ при некотором $k = k_c$ [7]. В случае $q \neq 0$ неустойчивость плоскопараллельного течения колебательная, причем для малых q частота колебаний пропорциональна q [8].

Ниже исследуются режимы конвекции при G , близких к G_c , которые реализуются в случае малых, но конечных q и η . Используется метод разложения по амплитуде неплоскопараллельной составляющей движения ε , примененный ранее [5] для случая $q = 0$. Введем преобразование координат, спрямляющее границы слоя

$$(2.2) \quad y' = y, \quad x' = x/(1 - \eta \cos k_0 y)$$

Решение $U = (\psi, T)$ задачи (1.1), (1.2), записанной в новых координатах, будем искать в виде ряда

$$(2.3) \quad U = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n$$

Полагая $G - G_c = O(\varepsilon^2)$, введем обозначение

$$(2.4) \quad G - G_c = \varepsilon^2 G_2$$

Безразмерный поток жидкости q является независимым параметром. Тем не менее, как и в [6], рассмотрим сначала подробно случай, когда величина q мала и наряду с $G - G_c$ имеет порядок ε^2

$$(2.5) \quad q = \varepsilon^2 q_2$$

Считаем также, что волновое число искривления границ k_0 близко к k_c .

$$(2.6) \quad k_0 - k_c = \varepsilon k_1$$

Следуя [9], предполагаем функции U_n зависящими от двух пространственных масштабов $y_0 = y'$, $y_1 = \varepsilon y'$ и нескольких временных масштабов $t_n = \varepsilon^n t$; в уравнениях производится замена

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}$$

Связь между параметрами ε , η и G представим в виде

$$(2.8) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta^{(n)}(G)$$

Подставляя (2.3) — (2.8) в (1.1), (1.2), с учетом (2.2) получаем в n -м порядке по ε краевую задачу, из условия разрешимости которой находим $\eta^{(n)}$.

В первом порядке по ε решение имеет вид

$$U_1 = 2 \operatorname{Re} [a_1(y_1, t_1, t_2, \dots) u(x') \exp(ik_c y_0)], \quad \eta^{(1)} = 0$$

где $u = (\varphi, \vartheta)$ — функция, описывающая нейтральное возмущение плоскопараллельного течения в слое с плоскими границами. Во втором порядке имеем

$$\eta^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t_1} = 0$$

Наконец, из условия разрешимости уравнений в третьем порядке (подробнее см. [5]) получаем

$$(2.9) \quad I \frac{\partial a_1}{\partial t_2} = R \frac{\partial^2 a_1}{\partial y_1^2} + (JG_2 + iBq_2) a_1 - S |a_1|^2 a_1 + D\eta_3 \exp(ik_1 y_1)$$

$$B = -k_c \int_{-1}^1 dx' \left\{ \frac{3}{4} (1 - x'^2) \left[-\bar{\varphi}_c \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - k_c^2 \varphi \right) + \bar{\vartheta}_c \vartheta \right] - \frac{3}{2} \bar{\varphi}_c \varphi \right\}$$

где I, R, J, S, D — вещественные постоянные, найденные в [5], (φ_c, ϑ_c) — решение сопряженной линейной задачи. Отличие амплитудного уравнения (2.9) от полученного ранее [6] для случая смешанной конвекции состоит в наличии дополнительного слагаемого дисперсионного типа $R \partial^2 a_1 / \partial y_1^2$ в правой части. Его появление связано с тем, что амплитуда a_1 зависит не только от времени (как предполагалось в [6]), но является также медленной функцией продольной координаты $y_1 = \varepsilon y'$ (в этом случае a_1 имеет смысл огибающей волнового пакета с несущим волновым числом k_c). Такое обобщение дает возможность исследовать устойчивость пространственно-периодических движений не только к возмущениям с тем же периодом, но и по отношению к неперриодическим возмущениям общего вида, имеющим форму функций Флоке. Отметим также, что наличие в амплитудном уравнении комплексного слагаемого $i B q_2 a_1$ в работе [6] было связано с перистальтическим прокачиванием, вызванным волнообразным движением границ слоя. В данной статье появление аналогичного члена обусловлено вынужденным прокачиванием жидкости относительно неподвижных искривленных границ.

Считая для определенности $B q_2 \gg 0$, преобразованием масштаба

$$Z = a_1 (S/Bq_2)^{1/2}, \quad \tau = Bq_2 t_2 / I, \quad Y = y_1 (Bq_2/R)^{1/2}$$

приведем уравнение (2.9) к виду

$$(2.10) \quad \frac{\partial Z}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} + (\gamma + i) Z - |Z|^2 Z + \delta \exp(iK_0 Y)$$

$$\gamma = J(G - G_c)/Bq, \quad K_0 = (k_0 - k_c)(R/Bq)^{1/2}$$

$$\delta = \eta_3 D S^{1/2} / (Bq_2)^{3/2}$$

Уравнение (2.10) выведено в предположении (2.5). В этом случае временные масштабы, определяющие рост амплитуды возмущения и изменение его фазы (характеризуемые инкрементом и частотой), имеют один порядок и уравнения оказываются наиболее содержательными. Случай $q \gg \varepsilon^2$ (сильное прокачивание жидкости) соответствует пределу $\gamma \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ и также может быть проанализирован на основе уравнения (2.10). Если же $q \ll \varepsilon^2$, то в уравнении (2.9) член с q_2 выпадает и приходим к случаю, рассмотренному ранее [5].

3. Пространственно-периодическим решениям задачи (1.1), (1.2) с периодом $2\pi/k_0$ соответствуют решения уравнения (2.10) вида

$$(3.1) \quad Z = z(\tau) \exp(iK_0 Y)$$

где $z(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$(3.2) \quad dz/d\tau = (\Gamma + i) z - |z|^2 z + \delta, \quad \Gamma = \gamma - K_0^2$$

Параметрический портрет для уравнения (3.2), установленный в [6], схематично изображен на фиг. 1. В области между линиями 1 и 2, описываемыми формулой

$$(3.3) \quad \Gamma = \Gamma_{\mp}(\delta), \quad \delta^2 = \frac{2}{27} [\Gamma_{\mp}(\Gamma_{\mp}^2 + 9) \pm (\Gamma_{\mp}^2 - 3)^{3/2}]$$

уравнение имеет три стационарных решения, вне этой области — одно.

Стационарные решения

$$(3.4) \quad z = X \exp(i\varphi)$$

определяются равенствами

$$(3.5) \quad \Gamma = X^2 \pm (\delta^2/X^2 - 1)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -1/(\Gamma - X^2)$$

Кроме того, в заштрихованной на фиг. 1 области существует цикл; граница 3 этой области описывается уравнением

$$(3.6) \quad \Gamma = \Gamma_0(\delta), \quad \delta^2 = 1/8 \Gamma_0(\Gamma_0^2 + 4)$$

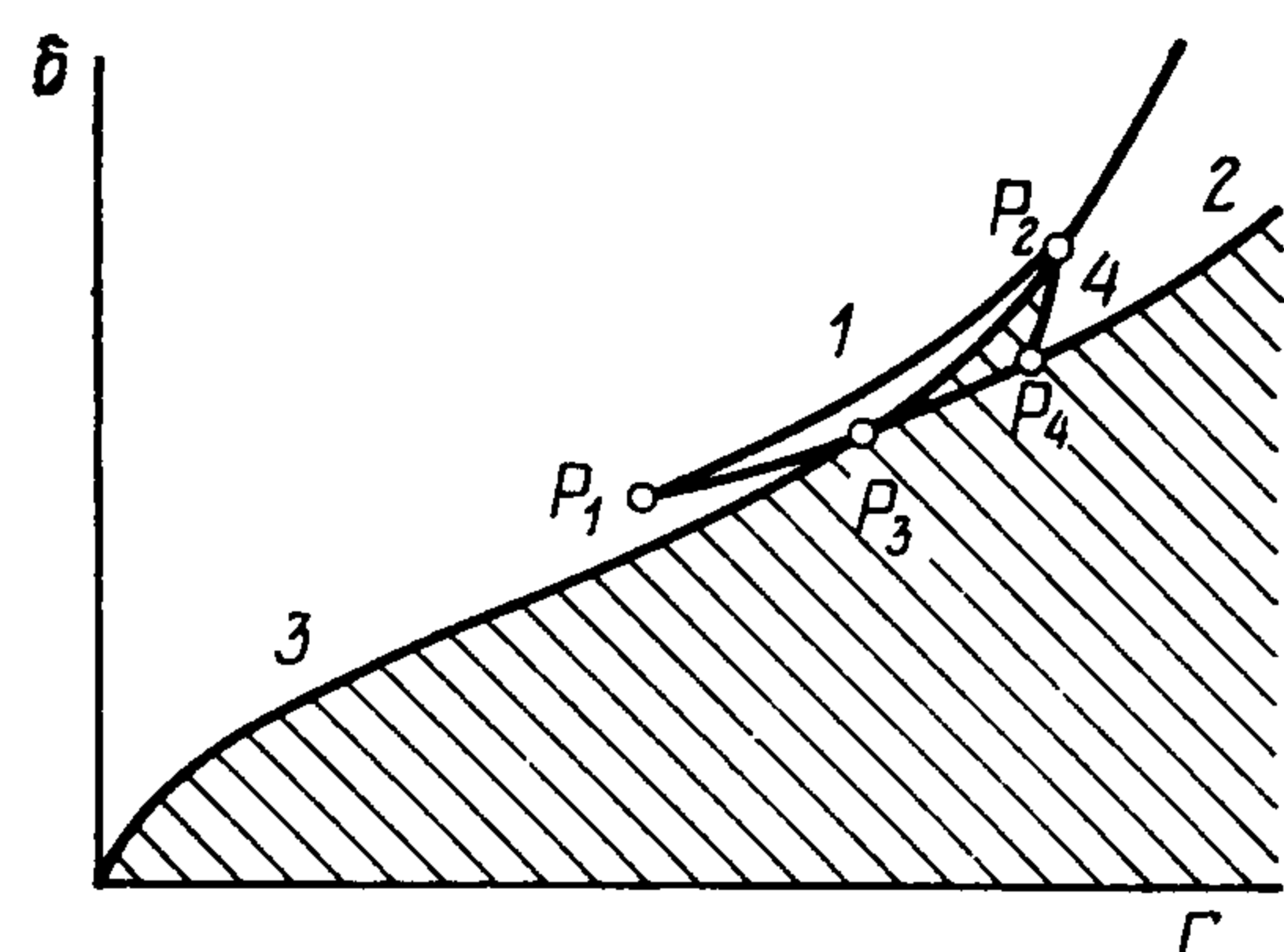
а граница 4 определена в [6] численно. Значения координаты δ для точек

P_1, P_2, P_3 и P_4 соответственно равны

$$\delta_1 = (8 \sqrt{3}/9)^{1/2} \approx 1,241,$$

$$\delta_2 = \sqrt{2} \approx 1,414,$$

$$\delta_3 \approx 1,269, \quad \delta_4 \approx 1,280$$



Фиг. 1

4. Перейдем к исследованию устойчивости пространственно-периодических движений. Рассмотрим здесь устойчивость стационарных, а в п. 5 колебательных движений, соответствующих периодическим во времени решениям уравнения (3.6).

Наложим на основное решение $Z_0 = z \exp(iK_0 Y)$, $z = X \exp(i\varphi)$ малое возмущение ζ . Подставляя $Z = Z_0 + \zeta$ в (2.10) и линеаризуя по ζ , получим

$$(4.1) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = (\gamma + i)\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial Y^2} - X^2(2\zeta + \exp[2i(\varphi + K_0 Y)]\bar{\zeta})$$

Полагая

$$(4.2) \quad \zeta = a \exp[i(K_0 + K)Y + \lambda\tau] + \bar{b} \exp[i(K_0 - K)Y + \bar{\lambda}\tau]$$

приходим к однородной системе уравнений для коэффициентов a и b , из условия разрешимости которой следует выражение для инкремента λ

$$(4.3) \quad \lambda_{\pm} = \gamma - K_0^2 - 2X^2 - K^2 \pm [X^4 + (2K_0K - i)^2]^{1/2}$$

Данная формула обобщает формулу (3.2) работы [6], в которой был рассмотрен случай $K = 0$ (возмущения имеют тот же период, что и основное движение). Отметим, что при $K_0 = 0$ ($k_0 = k_c$) формула (4.3) переходит в

$$(4.4) \quad \lambda_{\pm} = \gamma - 2X^2 - K^2 \pm (X^4 - 1)^{1/2}$$

Видно, что в этом случае для наиболее опасного возмущения $K = K_* = 0$, так что исследование устойчивости сводится к проделанному в [6].

Полный расчет области устойчивости стационарных движений на плоскости (γ, K_0^2) при заданном δ требует вычисления знака вещественной части инкремента

$$(4.5) \quad \operatorname{Re} \lambda_+ = \gamma - K_0^2 - 2X^2 - K^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} [\Delta + (\Delta^2 + 16K^2K_0^2)^{1/2}]^{1/2}$$

$$\Delta = X^4 - 1 + 4K^2K_0^2$$

Здесь X^2 — известная функция δ , γ и K_0^2 , неявно заданная первым из уравнений (3.5).

Пусть сначала $\delta < \delta_1$. В этом случае стационарное решение единственно при любом γ . Можно определить асимптотику границы устойчивости при малых K_0 . Полагая $4K^2K_0^2 \ll 1 - X^4$, из условия $\partial \operatorname{Re} \lambda_+ / \partial K = 0$

найдем величину $K = K_*$ для наиболее опасного возмущения

$$(4.6) \quad K_* = K_0 (1 - X^4)^{-1/2}$$

Уравнение границы устойчивости $\text{Re } \lambda_+(K_*) = 0$ с точностью до членов второго порядка приводится к виду

$$(4.7) \quad \gamma = \Gamma_0 + \frac{3\Gamma_0^2}{4 + 3\Gamma_0^2} K_0^2$$

где Γ_0 (δ) определяется равенством (3.6). Нетрудно также получить асимптотику границы устойчивости при больших K_0

$$(4.8) \quad K_* = K_0, \quad \gamma = 2\delta^2 K_0^{-4}$$

Видно, что при больших $K_0 \propto k_0 - k_c$ воздействие внешней модуляции на устойчивость движения ослабевает, а одно из волновых чисел критического возмущения стремится к k_c . Типичная граница устойчивости при $\delta < \delta_1$, построенная численно, показана на фиг. 2 (линия 1; $\delta = 1$).

Превышение δ над δ_1 приводит к появлению в некоторой области (γ, K_0^2) трех стационарных решений. Как показано в [6], одно из них (с промежуточным значением величины X^2) всегда неустойчиво. Для остальных двух решений существует область устойчивости по отношению к возмущениям с $K = 0$, причем решение с максимальным значением X^2 устойчиво при любых $\delta > \delta_1$ в области $-\infty < \gamma < \Gamma_+$, а решение с минимальным значением X^2 устойчиво при $\delta_1 < \delta < \delta_2$ в области $\Gamma_- < \gamma < \Gamma_0$.

Изменение картины областей устойчивости в случае $K \neq 0$ для обоих типов движений при увеличении δ схематично показано на фиг. 3 (фрагмент *a* соответствует $\delta = \delta_1$). Линия 2 обозначает границу устойчивости режима с максимальным X^2 , линии 1 и 3 — с минимальным; те же обозначения использованы на фиг. 4—6, где приведены границы областей устойчивости для $\delta = 1,278$, $\delta = 1,304$, $\delta = 3,161$.

Заметим, что область устойчивости движения с минимальным X^2 невелика и исчезает при $\delta > \delta_2$. Отметим также, что при $X^2 > 1$ асимптотика границы области устойчивости (для режима с максимальным значением X^2) отличается от (4.6), (4.7). Именно, анализ зависимости инкремента $\lambda_+(K)$ в пределе $4K^2 K_0^2 \ll X^4 - 1$ показывает, что при

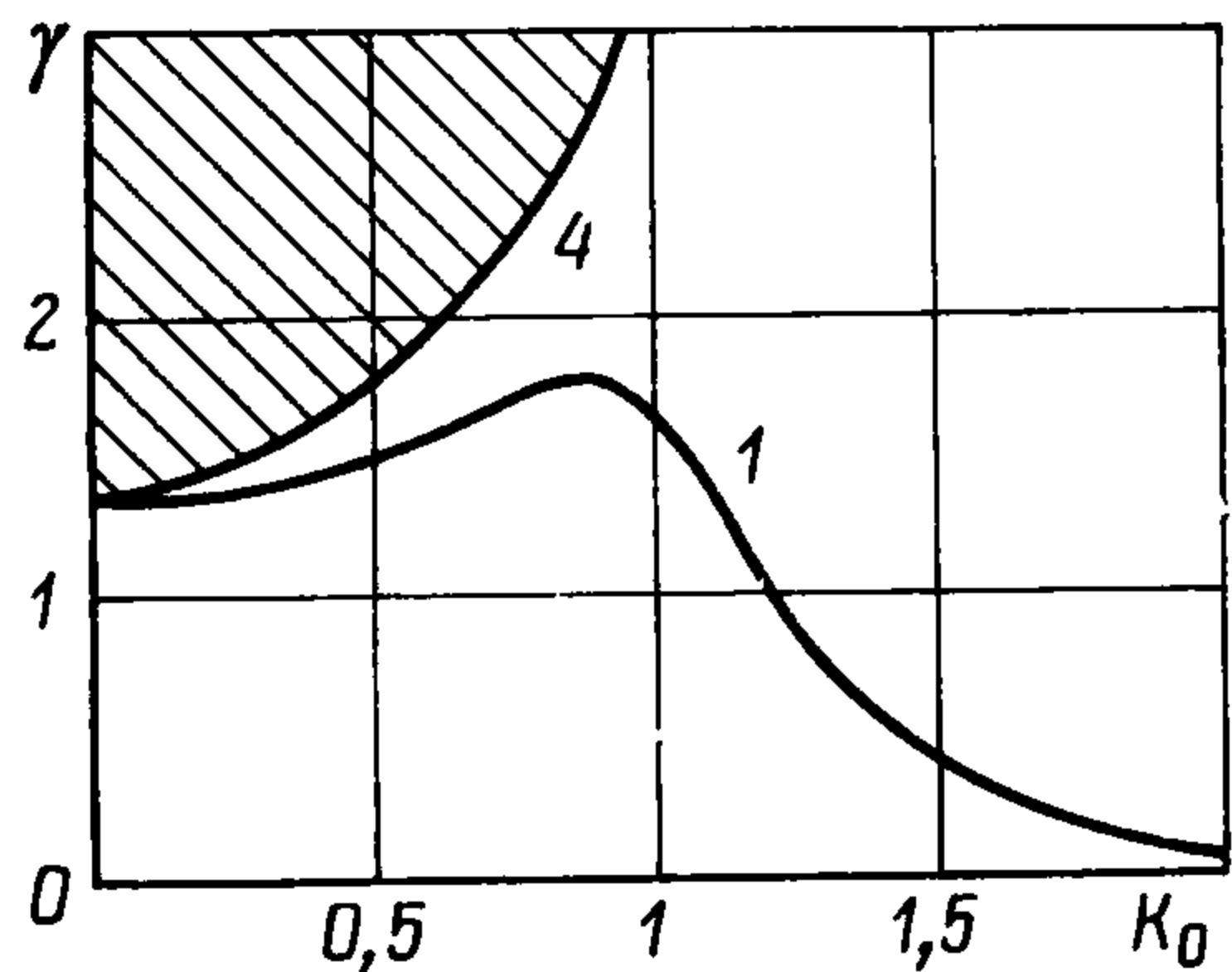
$$(4.9) \quad K_0 < K_m = \left[\frac{1}{2} X^{-4} (X^4 - 1)^{3/2} \right]^{1/2}$$

граница устойчивости стационарных решений определяется возмущениями с $K_* = 0$ и совпадает с границей их существования $\gamma = \Gamma_+(\delta) + K_0^2$, а при $K_0 > K_m$ наиболее опасными становятся возмущения с

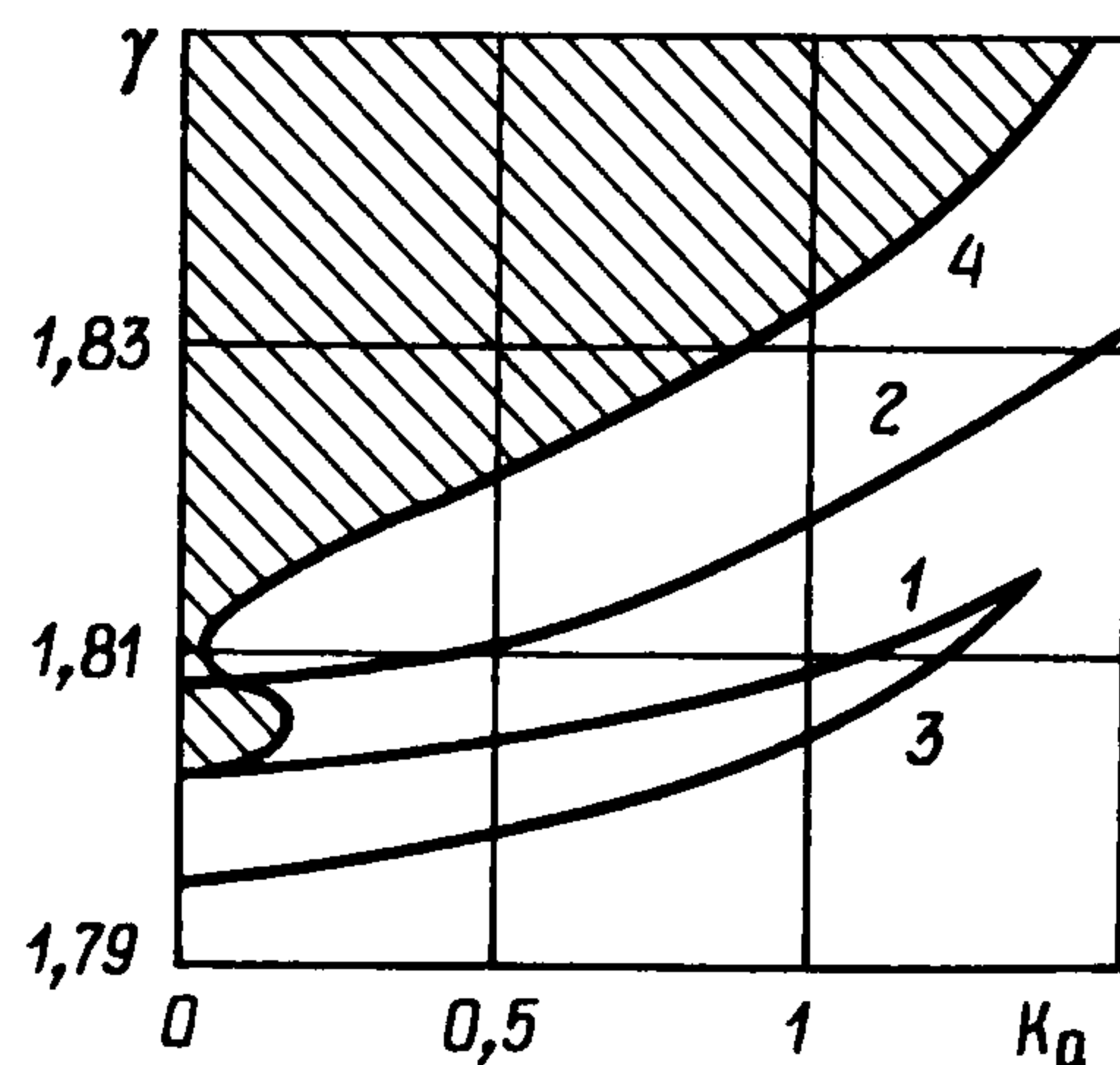
$$K_* = (X^4 - 1) (X^4 + 4)^{-1/2} (K_0 - K_m)^{1/2} K_m^{-3/2}$$

Таким образом, в интервале $K_0 < K_m$ имеет место своеобразный «захват волнового числа» — резонансная гармоника подстраивается под внешнее возмущение.

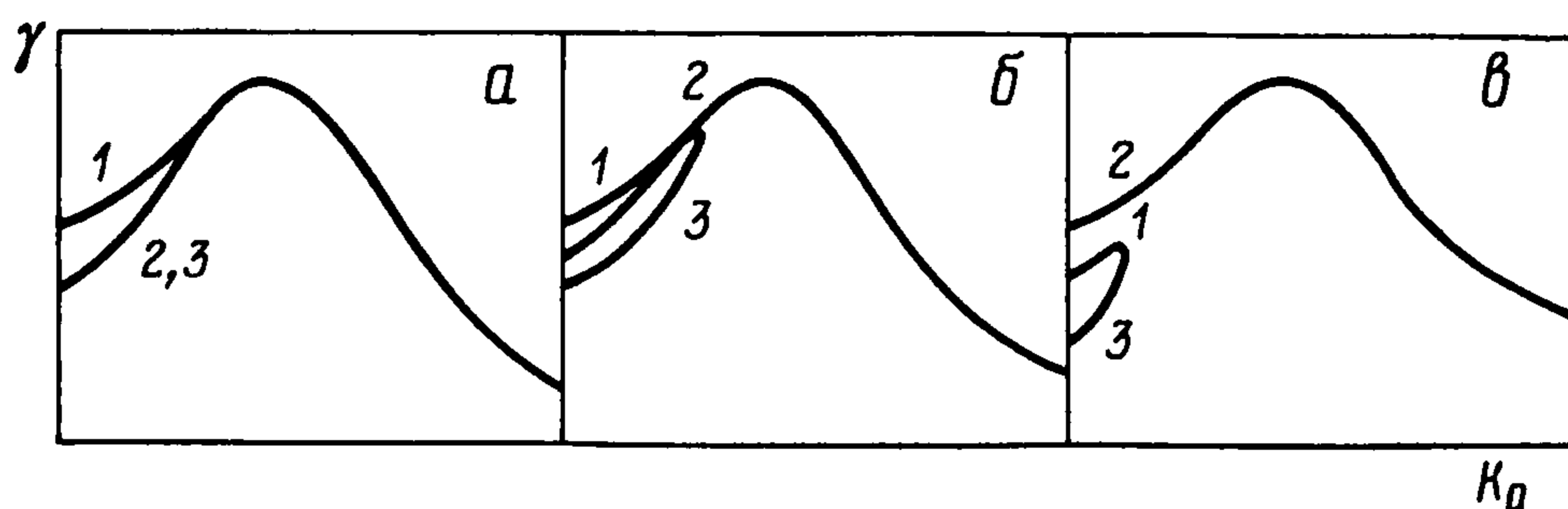
При достаточно больших δ (слабая прокачка жидкости) граница устойчивости приобретает вид, изображенный на фиг. 6 (кривая 2; $\delta = 3,161$). Характерной особенностью данного графика является наличие интервала волновых чисел $K_1 < K_0 < K_2$, внутри которого стационарное движение сначала теряет устойчивость при увеличении γ (точка *A*), затем восстанавливает свою устойчивость (точка *B*) и, наконец, вновь испытывает кризис (точка *C*).



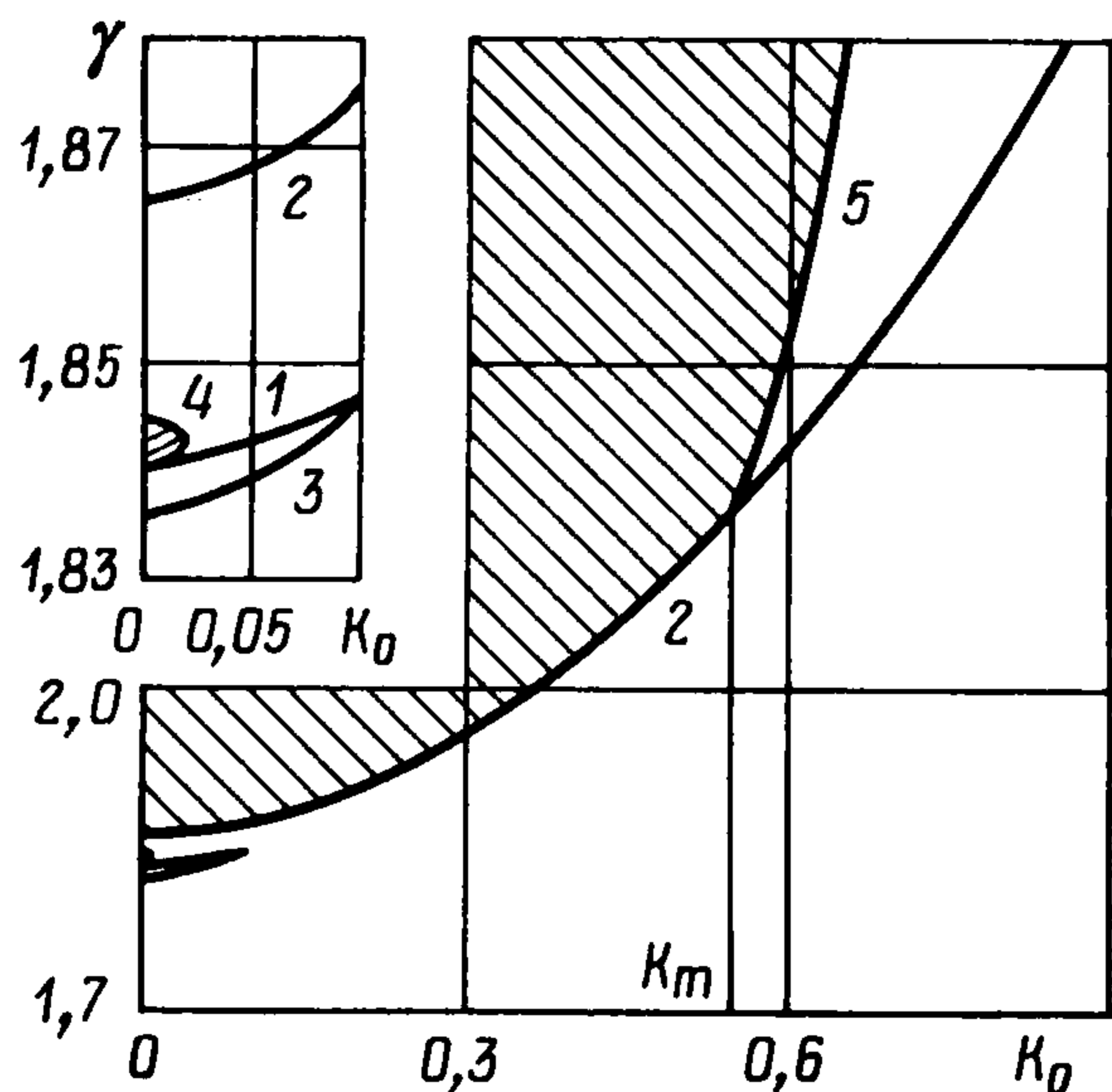
Фиг. 2



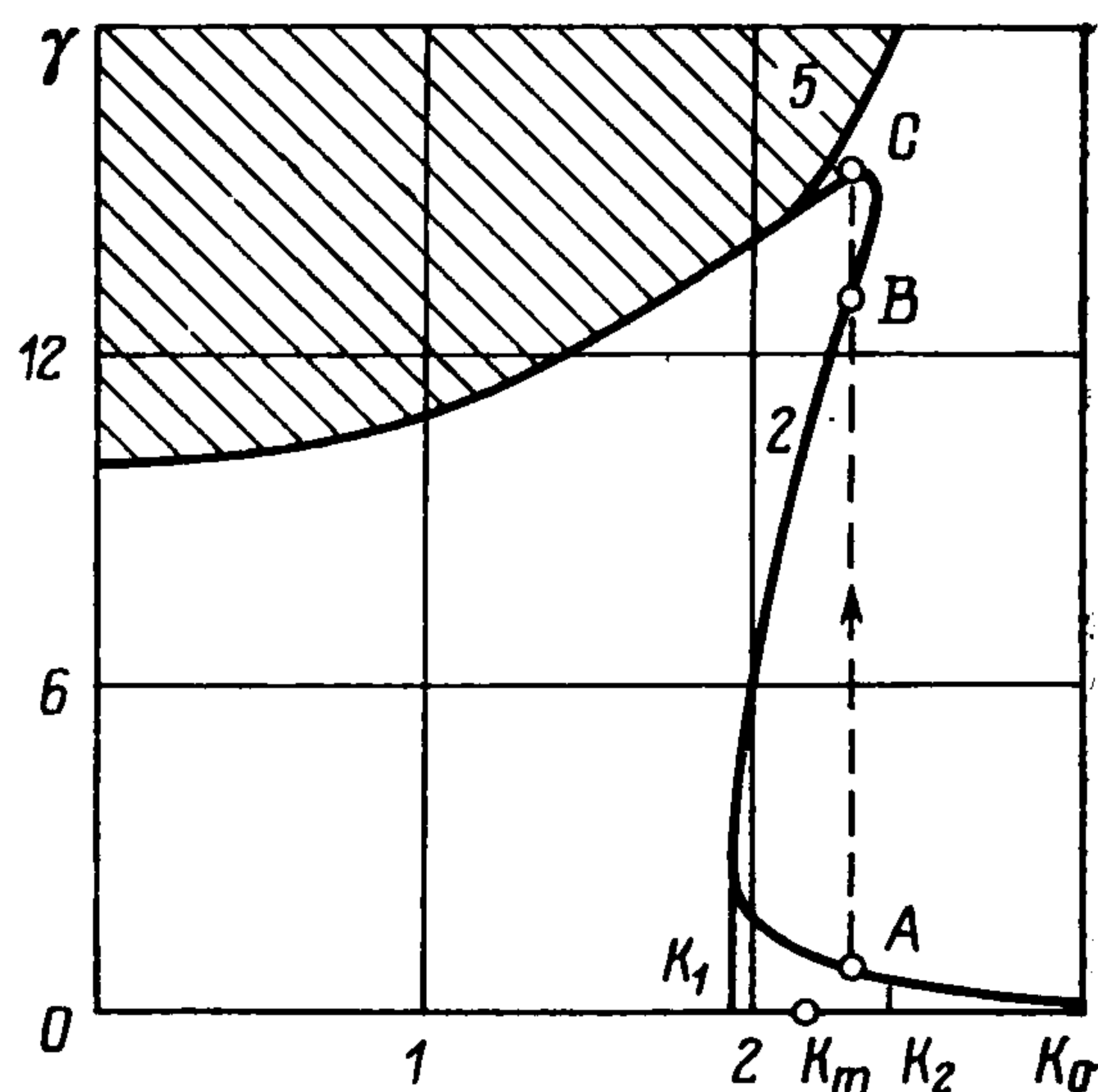
Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 6

5. Перейдем к исследованию устойчивости нестационарных режимов конвекции, соответствующих периодическим по времени решениям уравнения (3.2). Эволюция бесконечно малого возмущения по-прежнему описывается уравнением (4.1), однако теперь $z = X \exp(i\varphi)$ — периодическая функция времени. Представим возмущение в виде

$$(5.1) \quad \zeta = a(\tau) \exp[i(K_0 + K)Y] + b(\tau) \exp[i(K_0 - K)Y]$$

Функции $a(\tau)$, $b(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений с периодическими коэффициентами

$$(5.2) \quad \begin{aligned} da/d\tau &= [\gamma - (K_0 + K)^2 - 2X^2 + i] a - X^2 \exp(2i\varphi) \bar{b} \\ d\bar{b}/d\tau &= [\gamma - (K_0 - K)^2 - 2X^2 - i] \bar{b} - X^2 \exp(-2i\varphi) a \end{aligned}$$

фундаментальные решения которой имеют вид функций Флоке

$$(5.3) \quad \begin{aligned} f(\tau) &= (a(\tau), \bar{b}(\tau)), f(\tau) = g_+(\tau) \exp \lambda_+ \tau + g_-(\tau) \exp \lambda_- \tau \\ g_{\pm}(\tau) &= g_{\pm}(\tau + T), \operatorname{Re} \lambda_- \leq \operatorname{Re} \lambda_+ \end{aligned}$$

где T — период функции z . Условие устойчивости периодического режима: $\operatorname{Re} \lambda(K) \leq 0$ для всех K .

Границу области устойчивости колебательных движений проще всего определить в пределе $\delta \ll 1$. В этом случае автоколебания развиваются при $\gamma > \Gamma_0(\delta) + K_0^2$, $\Gamma_0(\delta) = 2\delta^2$ и описываются формулой [6]

$$z = (\Gamma - 2\delta^2)^{1/2} \cos \tau + i [\delta + (\Gamma - 2\delta^2)^{1/2}] \sin \tau, \quad \Gamma = \gamma - K_0^2$$

Для величины λ_{\pm} находим

$$\lambda_{\pm} = -(\gamma - 2\delta^2 - K_0^2 + K^2) \pm [(\gamma - 2\delta^2 - K_0^2)^2 + 4K_0^2 K^2]^{1/2}$$

Из этого выражения следует, что циклы устойчивы при $\gamma > 2\delta^2 + 3K_0^2$.

Для конечных δ производилось численное интегрирование системы (5.2). Инкремент наиболее быстро растущей моды рассчитывался по формуле

$$\text{Re } \lambda_+ = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \ln \frac{|a(\tau + T)|^2}{|a(\tau)|^2}$$

При $\delta < \delta_1$ форма области устойчивости циклов качественно выглядит так же, как и в случае $\delta \ll 1$ — фиг. 2, кривая 4; $\delta = 1$. По мере приближения δ к δ_4 (см. фиг. 1) граница области устойчивости принимает вид, изображенный на фиг. 4 (линия 4; $\delta = 1,278$). При $\delta_4 < \delta < \delta_2$, как видно из фиг. 1, цикл существует в двух интервалах изменения Γ , разделенных областью (между кривыми 4 и 2), в которых колебательный режим отсутствует. Соответственно существуют две области устойчивости циклов (фиг. 5; $\delta = 1,304$), одна из которых, ограниченная кривой 4, примыкает к области устойчивости стационарного режима с минимальной амплитудой, а другая (граница — кривая 5) — к области с максимальной амплитудой. Заметим, что пересечение линий 2 и 5 имеет место при $K_0 = K_m$ (см. формулу (4.9)), так что колебательные движения с $K_0 < K_m$ устойчивы всюду в области их существования.

При $\delta > \delta_2$ остается единственная граница области устойчивости циклов (фиг. 6, кривая 5; $\delta = 3,161$), имеющая излом при $K_0 = K_m$. В пределе $\delta \gg 1$ при помощи разложений по параметру δ^{-2} удается получить выражение для инкремента

$$\lambda_{\pm} = -(\gamma - K_0^2 + K^2) \pm [(\gamma - K_0^2)^2 + 4K_0^2 K^2]^{1/2}$$

откуда следует, что граница области устойчивости колебательного режима имеет вид $\gamma = 3K_0^2$ при $K_0^2 > \delta^2/2$; при $K_0^2 < \delta^2/2$ эта граница совпадает с границей области существования циклов $\gamma = \delta^2 + K_0^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Возовой Л. П., Непомнящий А. А. Конвекция в горизонтальном слое при наличии пространственной модуляции температуры на границах. — В кн.: Гидродинамика. Вып. 7. Пермь: Изд-е Пермск. гос. пед. ин-та, 1974, с. 105—117.
2. Kelly R. E., Pal D. Thermal convection with spatially periodic boundary conditions: resonant wavelength excitation. — J. Fluid Mech., 1978, v. 86, pt. 3, p. 433—456.
3. Батищев В. А., Колесов В. В., Слитинская С. К., Юдович В. И. Влияние пространственной модуляции температурного поля на устойчивость двумерного стационарного течения в горизонтальном слое жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 3, с. 128—132.
4. Возовой Л. П. Конвекция в вертикальном слое с волнистыми границами. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 2, с. 31—35.
5. Возовой Л. П., Непомнящий А. А. Об устойчивости пространственно-периодических конвективных течений в вертикальном слое с волнистыми границами. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 998—1007.
6. Левина Г. В., Непомнящий А. А. О режимах смешанной конвекции в вертикальном слое с нестационарно деформируемыми границами. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 402—410.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
8. Лобов Н. И. Об устойчивости смешанного конвективного течения в плоском вертикальном слое. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 6, с. 130—132.
9. Steuartson K., Stuart J. T. A nonlinear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. — J. Fluid Mech., 1971, v. 48, pt 3, p. 529—545.

Пермь

Поступила в редакцию
15.IX.1983