

УДК 532.516

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Брутян М. А., Крапивский П. Л.

В рамках уравнений Навье—Стокса рассматривается обтекание произвольного тела, на поверхности которого осуществляется управление касательной или нормальной скоростью. Получены необходимые условия минимума скорости диссипации энергии. В приближении Стокса найдены точные аналитические решения соответствующих задач для случая обтекания эллипсоида.

1. Пусть тело  $S$  обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти такое распределение скоростей отсоса (вдува) по поверхности тела, при котором скорость диссипации энергии  $D$  минимальна. При этом будем считать, что полный расход жидкости через поверхность  $S$  равен нулю.

В безразмерных переменных уравнения движения жидкости, граничные условия и минимизируемый функционал имеют вид

$$(1.1) \quad \Delta \mathbf{V} - \nabla p - R(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{V}|_S = W \mathbf{n}, \quad \mathbf{V}|_\infty = \mathbf{U}$$

$$(1.2) \quad D(W) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$$

где  $\Omega$  — внешность тела  $S$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  — единичный вектор внешней нормали.  $\mathbf{U}$  — скорость потока на бесконечности,  $R$  — число Рейнольдса. Уравнения Навье — Стокса (1.1) обезразмерены таким образом, чтобы в предельном случае течения Стокса  $R \rightarrow 0$  они приобрели наиболее простой вид.

2. Для получения необходимого условия минимума функционала (1.2) представим скорость отсоса (вдува)  $W$ , скорость течения  $\mathbf{V}$  и давление  $p$  в виде

$$(2.1) \quad W = W_0 + \varepsilon W_1, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \varepsilon \mathbf{V}_1 + O(\varepsilon^2) \\ p = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Функции  $W_0$ ,  $\mathbf{V}_0$  и  $p_0$  удовлетворяют краевой задаче (1.1), а  $W_1$ ,  $\mathbf{V}_1$  и  $p_1$  — краевой задаче

$$(2.2) \quad \Delta \mathbf{V}_1 - \nabla p_1 - R[(\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0] = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0 \\ \mathbf{V}_1|_S = W_1 \mathbf{n}, \quad \mathbf{V}_1|_\infty = 0$$

Варьируя (1.2) с использованием граничных условий и формулы Гаусса — Остроградского, получаем

$$(2.3) \quad \delta D = -2\varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{V}_1 \cdot \Delta \mathbf{V}_0 d\Omega - 4\varepsilon \int_S \frac{\partial V_{n0}}{\partial n} W_1 dS$$

Первое из уравнений (2.2) умножим скалярно на произвольную пока функцию  $\mathbf{V}^*$ , а второе — на функцию  $p^*$ . Складывая эти выражения и интегрируя, приходим к следующему соотношению:

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} \{ \mathbf{V}^* \cdot (\Delta \mathbf{V}_1 - \nabla p_1 - R[(\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0]) + p^* \nabla \cdot \mathbf{V}_1 \} d\Omega = 0$$

Наложим теперь на  $V^*$  однородные граничные условия  $V^*|_{\infty} = V^*|_{\infty} = 0$ . Интегрируя (2.4) по частям, имеем

$$(2.5) \quad \int_{\Omega} \{V_1 \cdot (\Delta V^* - \nabla p^* + R[(V_0 \cdot \nabla)V^* - (\nabla V_0) \cdot V^*]) + p_1 \nabla \cdot V^*\} d\Omega + \int_S \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial n} - p^* \right) W_1 dS = 0$$

где  $V_n^*$  — компонента функции  $V^*$  в направлении  $n$ . Определим функции  $V^*$  и  $p^*$  как решение краевой задачи

$$(2.6) \quad \Delta V^* - \nabla p^* + R[(V_0 \cdot \nabla)V^* - (\nabla V_0) \cdot V^*] = 2\Delta V_0, \quad \nabla \cdot V^* = 0 \\ V^*|_S = V^*|_{\infty} = 0$$

Система уравнений (2.6) обычно возникает при решении оптимизационных задач в вязкой несжимаемой жидкости. В частности, она была получена в работе [1]. Подробное изложение методов решения оптимальных задач, возникающих в различных разделах механики, содержится в [2]

Из (2.5), (2.6) находим, что

$$2 \int_{\Omega} V_1 \cdot \Delta V_0 d\Omega = - \int_S \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial n} - p^* \right) W_1 dS$$

В результате соотношение (2.3) приобретает окончательный вид

$$(2.7) \quad \delta D = \varepsilon \int_S \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial n} - p^* - 4 \frac{\partial V_{n0}}{\partial n} \right) W_1 dS$$

Поскольку минимум скорости диссипации ищется при условии равенства нулю полного расхода жидкости через поверхность тела  $S$ , функция  $W_1$  удовлетворяет условию

$$(2.8) \quad \int_S W_1 dS = 0$$

Из (2.7), (2.8) получаем необходимое условие экстремальности функционала  $D(W)$

$$(2.9) \quad \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial n} - p^* - 4 \frac{\partial V_{n0}}{\partial n} \right) \Big|_S = \text{const}$$

3. Рассмотрим теперь приближение Стокса ( $R \rightarrow 0$ ). В этом случае, как показано в работе [3], краевая задача (2.6) имеет лишь тривиальное решение  $V^* = 0$ ,  $p^* = -2p_0 + \text{const}$ . Поэтому необходимое условие минимума скорости диссипации приобретает исключительно простой вид

$$(3.1) \quad \left( p_0 - 2 \frac{\partial V_{n0}}{\partial n} \right) \Big|_S = \text{const}$$

Для примера найдем оптимальное распределение скорости отсоса (вдува) по поверхности сферы единичного радиуса, центр которой находится в начале сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Из соображений симметрии и линейности задачи решение ищем в виде

$$(3.2) \quad V = U + \text{rot rot}(fU), \quad f = f(r)$$

Более подробное обоснование представления решения в виде (3.2) было изложено [4] на примере задачи Стокса об обтекании сферы (при отсутствии отсоса). В [4] найдено решение  $f = Ar + B/r$ , где постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий. Таким образом, скорость и давле-

ние даются формулами

$$(3.3) \quad \mathbf{V} = \mathbf{U} - A \frac{\mathbf{U} + \mathbf{n}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})}{r} + B \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{U}}{r^3},$$

$$p = p_\infty - \frac{2A(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})}{r^2}$$

Граничное условие на поверхности сферы в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{U} - A[\mathbf{U} + \mathbf{n}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})] + B[3\mathbf{n}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{U}] = W\mathbf{n}$$

Это возможно только при выполнении следующих условий:

$$(3.4) \quad 1 - A - B = 0, \quad (3B - A)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) = W$$

Из (3.1), (3.3) и (3.4) получаем окончательное выражение для оптимальной скорости отсоса (вдува) на поверхности сферы

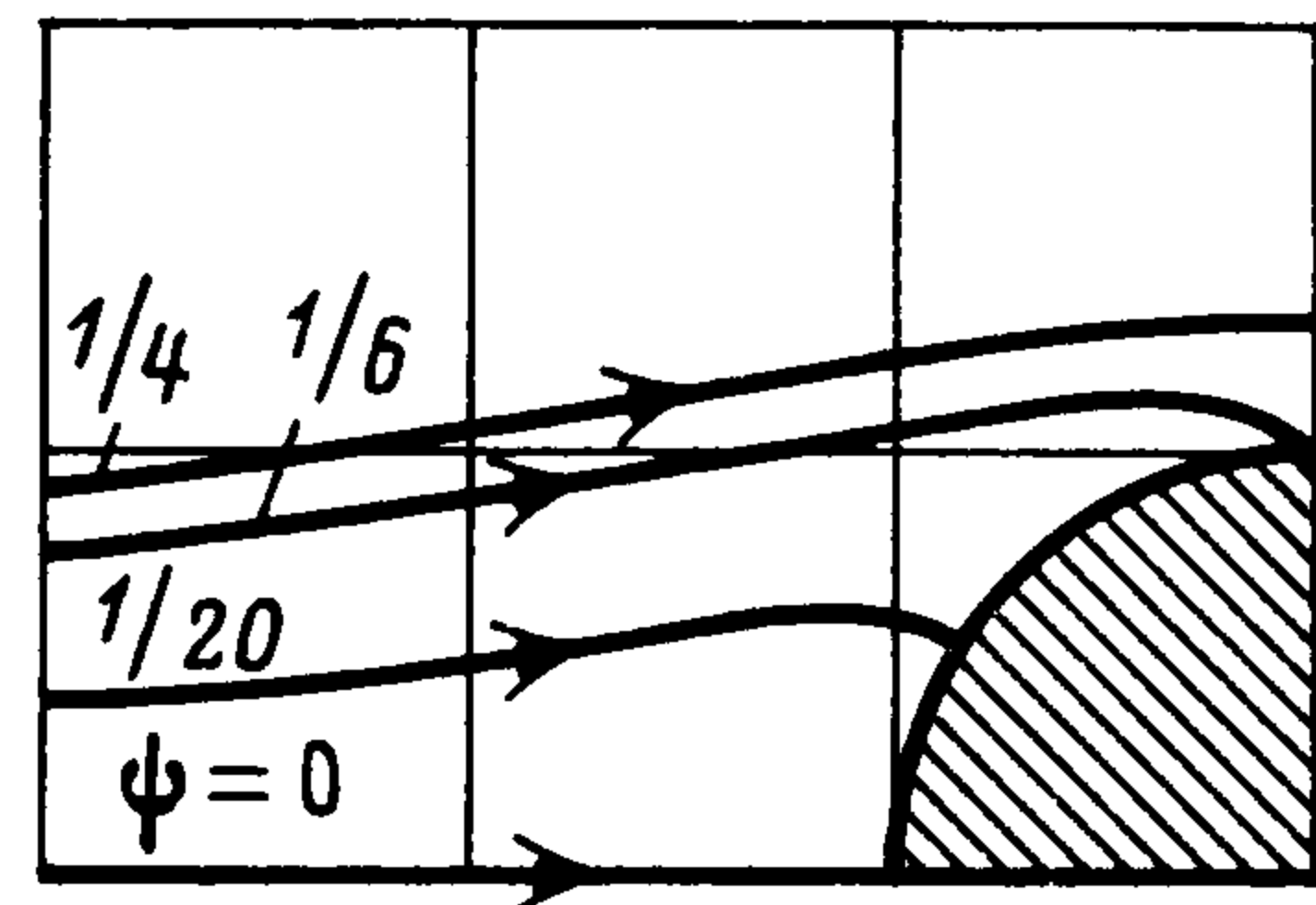
$$(3.5) \quad W = \frac{1}{3}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{3}U \cos \theta$$

Восстанавливая размерность, получаем, что скорость диссипации  $D$  и сопротивление  $X$  сферы в этом случае

$$(3.6) \quad D = \frac{16\pi}{3} \eta a U^2, \quad X = \frac{16\pi}{3} \eta a U$$

где  $a$  — радиус сферы,  $\eta$  — коэффициент вязкости.

По сравнению с обтеканием непроницаемой сферы диссипация и сопротивление уменьшились примерно на 11%. Заметим, что полученное оптимальное решение дает абсолютный минимум скорости диссипации среди всех вязких течений около сферы при наличии отсоса (вдува). Это следует из вариационного принципа Гельмгольца [5], в соответствии с которым скорость диссипации в течении, описываемом уравнениями Навье — Стокса, не может быть меньше скорости диссипации в стоксовом течении с теми же граничными условиями.



Фиг. 1

Картина линий тока около сферы при оптимальном законе скорости отсоса (вдува) показана на фиг. 1. Отметим, что в случае заданного расхода  $Q \neq 0$  все результаты п. 2 сохраняются. В частном случае стоксова обтекания сферы искомое решение будет суммой найденного решения с нулевым расходом и источника с расходом  $Q$ , расположенного в центре сферы.

Для реализации оптимального отсоса (вдува) необходимо затрачивать некоторую мощность

$$(3.7) \quad N = \int_S W^2 dS$$

Все полученные в п. 2 результаты обобщаются на случай наличия ограничения (3.7). Необходимое условие оптимальности (2.9) приобретает вид

$$(3.8) \quad \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial \mathbf{n}} - p^* - 4 \frac{\partial V_{n0}}{\partial \mathbf{n}} - 2\nu W \right) \Big|_S = \text{const}$$

где  $\nu$  — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению на мощность управляющего устройства. В приближении Стокса условие (3.8)

принимает вид

$$(3.9) \quad \left( p_0 - 2 \frac{\partial V_{n0}}{\partial n} \right) \Big|_S = \nu W + \text{const}$$

Решение оптимальной задачи вновь ищем в виде (3.2), (3.3). Из условия оптимальности (3.9) с учетом граничных условий находим

$$(3.10) \quad \nu (3B - A) + 2A + 2(2A - 6B) = 0$$

Ограничение на мощность  $N$  дает последнее соотношение для нахождения  $A$ ,  $B$  и  $\nu$

$$(3.11) \quad \frac{4\pi}{3} (3B - A)^2 = \frac{N}{U^2}$$

Из (3.4), (3.10) и (3.11) получаем

$$A = \frac{3}{4} \left( 1 - \sqrt{\frac{N}{12\pi U^2}} \right)$$

Таким образом, оптимальное решение в этом случае имеет вид

$$(3.12) \quad W = \sqrt{\frac{3N}{4\pi}} \cos \theta$$

$$D = 6\pi\eta a U^2 \left( 1 - \sqrt{\frac{N_*}{3}} + \frac{3N_*}{4} \right)$$

$$X = 6\pi\eta a U \left( 1 - \sqrt{\frac{N_*}{12}} \right); \quad N_* = \frac{N}{\pi U^2}$$

4. В качестве примера, иллюстрирующего точное решение оптимизационной задачи для неосесимметричного тела, рассмотрим эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ . При решении этой задачи будем следовать изложенному в [6] решению задачи о стоксовом обтекании эллипсоида без отсоса (вдува). Решение  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  ищем в виде

$$(4.1) \quad u = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B \left( x \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi \right) + U$$

$$v = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + Bx \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad w = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + Bx \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

$$\Phi = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \left( \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} - 1 \right) \frac{d\mu}{F}$$

$$\chi = abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\mu}{F}, \quad F = [(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)]^{1/2}$$

Здесь  $\lambda$  — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

а  $A$  и  $B$  — неизвестные пока постоянные. Давление дается формулой  $p = 2B \partial \chi / \partial x + p_{\infty}$ .

С учетом уравнений (4.1) и тождества

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2\pi \alpha x, \quad \alpha = \alpha(\lambda) = abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\mu}{(a^2 + \mu)F}$$

граничные условия  $u = Wn_1$ ,  $v = Wn_2$ ,  $w = Wn_3$  на поверхности эллипсоида запишем в виде

$$(4.2) \quad 2\pi A \alpha_0 + U + 2\pi A \left( x \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} + B \left( x \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{d\chi}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} -$$

$$- B \chi_0 = W \frac{x}{a^2 E}$$

$$(4.3) \quad 2\pi A \left( x \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} + B \left( x \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{d\chi}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = W \frac{y}{b^2 E}$$

$$(4.4) \quad 2\pi A \left( x \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} + B \left( x \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{d\chi}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = W \frac{z}{c^2 E}$$

Здесь

$$\alpha_0 = \alpha(0), \quad \chi_0 = \chi(0), \quad E = \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{1/2}$$

Из условий (4.3) и (4.4), учитывая, что на поверхности эллипсоида

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{2x}{a^2 E^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{2y}{b^2 E^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{2z}{c^2 E^2}$$

получаем

$$(4.5) \quad W = -2 \left( \frac{2\pi A}{a^2} + B \right) \frac{x}{E}$$

Подставляя выражение (4.5) в (4.2), находим  $2\pi\alpha_0 A + U = B\chi_0$ . Окончательная формула для оптимального закона отсоса (вдува) получается после нахождения из условия оптимальности (3.1) второго уравнения, связывающего  $A$  и  $B$ , и имеет вид

$$(4.6) \quad W = \frac{2U(d-1)}{d\alpha_0 a^2 + \chi_0} \frac{x}{E}, \quad d = \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{-1}$$

Сопротивление при этом дается формулой

$$(4.7) \quad X = 16\pi\eta U \frac{abc}{d\alpha_0 a^2 + \chi_0}$$

При  $a = b = c$ , что соответствует обтеканию сферы, выражения (4.6) и (4.7) переходят в (3.5) и (3.6). Заметим, что ввиду линейности уравнений Стокса из (4.6) можно получить явную форму решения оптимальной задачи в случае обтекания эллипсоида при произвольном направлении скорости потока на бесконечности.

5. Рассмотрим задачу о минимуме скорости диссипации энергии при управлении касательной скоростью  $\mathbf{q}$  на границе тела  $S$ . Некоторые теоретические и экспериментальные исследования течений вязкой несжимаемой жидкости с подвижной границей содержатся в работе [7]. Действуя аналогично случаю управления нормальной скоростью, получаем условие оптимальности

$$(5.1) \quad \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial n} - 2 \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial n} \right) \times \mathbf{n} \right] \Big|_S = 0$$

Здесь  $\mathbf{V}^*$  удовлетворяет краевой задаче (2.6),  $\mathbf{V}_0$  — скорость в оптимальном решении, которое является решением краевой задачи (1.1) с другим граничным условием на поверхности  $\mathbf{V}|_S = \mathbf{q}$ . В приближении Стокса условие оптимальности (5.1) приобретает вид

$$(5.2) \quad \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial n} \times \mathbf{n} \right] \Big|_S = 0$$

Полученное условие фактически означает, что в оптимальном решении вязкие касательные напряжения на поверхности тела равны нулю.

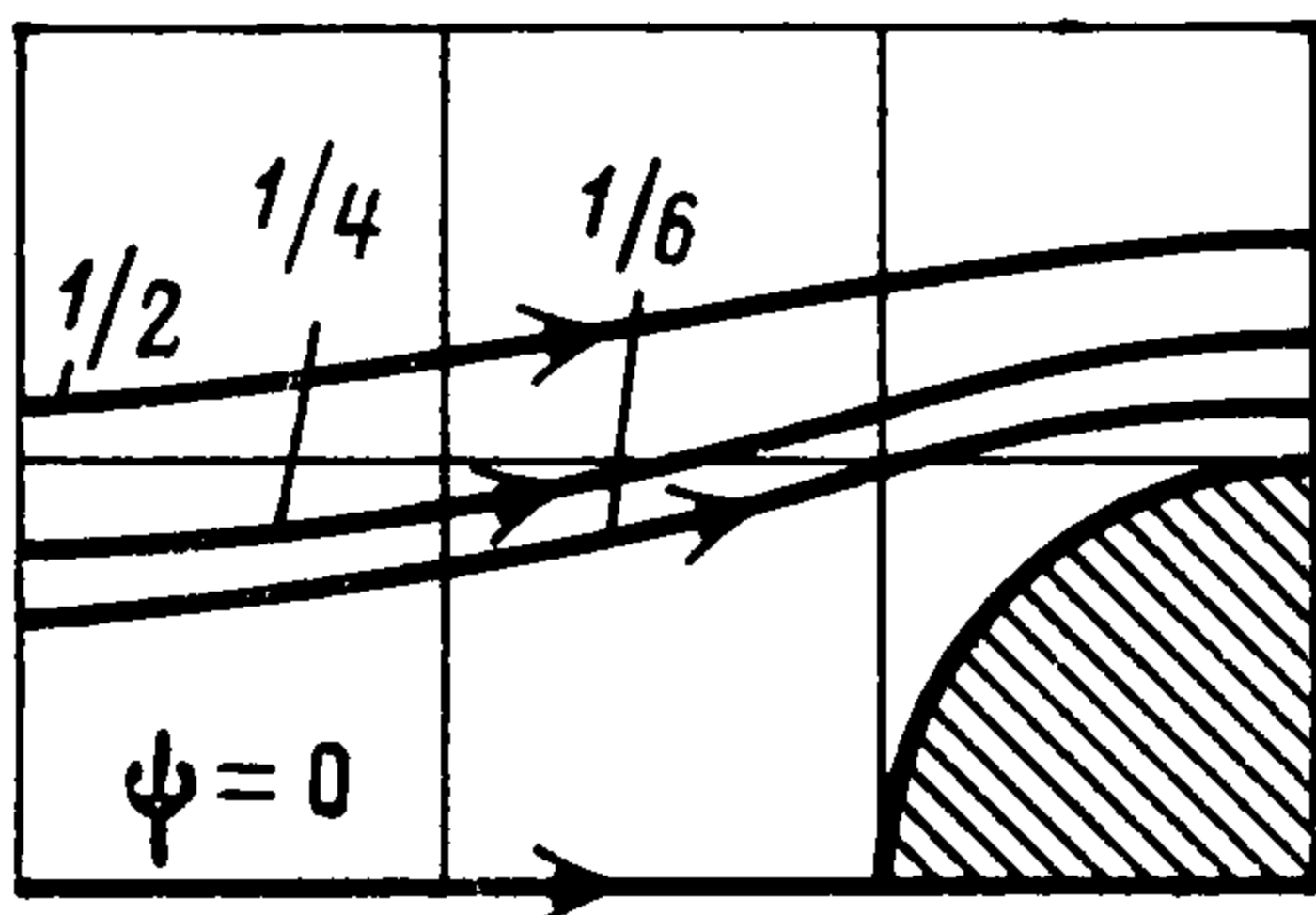
Рассмотрим обтекание сферы с подвижной границей. Решение задачи вновь ищем в виде (3.3). При этом из соображений симметрии в сферической системе координат имеем  $\mathbf{q} = (0, q, 0)$ . Из граничных условий следует

$$(5.3) \quad A - B = \frac{1}{2}, \quad q = (1 - A - B) U \sin \theta$$

Условие оптимальности (5.2) дает  $A + 3B = 0$ , и из (5.3) получаем окончательные выражения для оптимального решения (в размерных переменных)

$$(5.4) \quad q = \frac{3}{4} U \sin \theta, \quad D = \frac{3\pi}{2} \eta a U^2, \quad X = 3\pi \eta a U$$

По сравнению с обтеканием сферы с неподвижной границей скорость диссипации уменьшилась на 75%, а сопротивление — на 50%. Из вариационного принципа Гельмгольца следует, что  $D \geq \frac{3}{2}\pi\eta a U^2$  при любом вязком обтекании сферы с подвижной границей. Картина линий тока около сферы при оптимальном управлении подвижной границей показана на фиг. 2. При наличии ограничения на мощность



Фиг. 2

$$N = \int_S q^2 dS$$

получаем следующее оптимальное решение:

$$(5.5) \quad q = \sqrt{\frac{3N}{8\pi}} \sin \theta, \quad D = 6\pi\eta a U^2 \left( 1 - 3 \sqrt{\frac{N_*}{6}} + \frac{N_*}{2} \right)$$

$$X = 6\pi\eta a U \left( 1 - \sqrt{\frac{N_*}{6}} \right); \quad N_* = \frac{N}{\pi U^2}$$

Следуя методу, изложенному в п. 4, можно обобщить полученное оптимальное решение (5.4) и на случай обтекания трехосного эллипсоида.

Заметим, что при решении рассмотренных задач без ограничения на  $N$ , в которых вместо скорости диссипации минимизируется сопротивление, получается, что абсолютный минимум дается решением с бесконечной тягой. В случае обтекания сферы это немедленно получается из формулы  $X = 8\pi\eta a U A$ , так что при  $A \rightarrow -\infty$  сопротивление  $X \rightarrow -\infty$ . При наличии ограничения на  $N$  решение задачи о минимуме сопротивления в точности совпадает с соответствующими решениями (3.12) и (5.5) задач о минимуме скорости диссипации.

Авторы благодарят В. В. Сычева за замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Миронов А. А. К задаче оптимизации формы тела в вязкой жидкости. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 103—108.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Pironneau O. On optimum profiles in Stokes flow. — J. Fluid. Mech., 1973, v. 59, pt 1, p. 117—128.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
5. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
6. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. Меркулов В. И. Управление движением жидкости. Новосибирск: Наука, 1981. 173с.