Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 533.6.011

О СТРУКТУРЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ВЯЗКОГО ГАЗА

Шелухин В. В.

Рассматривается модельная система уравнений, описывающая нестационарные одномерные течения вязкого газа в предположении, что давление определяется адиабатическим законом Пуассона. Исследуются обобщенные решения системы в классе разрывных функций, выделяется класс корректности и выясняется структура решений этого класса. Показывается, что начальные разрывы скорости мгновенно сглаживаются, а из точек разрыва начальной плотности образуются линии контактного разрыва. Эти линии существуют бесконечное время и скачки давления на них исчезают по экспоненциальному закону.

1. Определение обобщенного решения. Изучается начально-краевая задача (задача А)

$$\rho\,(u_t + uu_x) = \mu u_{xx} - p_x,\ \rho_t + (\rho u)_x = 0,\ p = \rho^\gamma \tag{1.1}$$

$$u\,(0,\ t) = u\,(1,t) = 0,\ u\,(x,\ 0) = u_0\,(x),\ \rho\,(x,\ 0) = \rho_0\,(x);$$

$$\mu > 0,\ \gamma \geqslant 1$$

в области Q двух переменных $x,\ t,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T$. Здесь u — скорость, ρ — плотность, p — давление. Если начальные данные достаточно гладкие и удовлетворяют условиям согласования, то эта задача однозначно разрешима [1]. Исследуем случай разрывных начальных данных.

Определение 1. Измеримые функции u, ρ назовем обобщенным решением (ОР) задачи А при $u \in L_4\,(Q)$, $\operatorname{vrai\,min}\rho\,(Q) > 0$, $\operatorname{vrai\,max}\rho\,(Q) < \infty$, первые два уравнения (1.1) выполняются в смысле интегральных тождеств

$$\int_0^T\int_0^1 (\rho u\varphi_t + \rho u^2\varphi_x + p\varphi_x + \mu u\varphi_{xx})\,dx\,dt + \int_0^1 \rho_0 u_0\varphi\,(x,0)\,dx = 0$$

$$\int_0^T\int_0^1 (\rho\psi_t + \rho u\psi_x)\,dx\,dt + \int_0^1 \rho_0\psi\,(x,0)\,dx = 0$$

для произвольных функций $\varphi,\ \psi \in W_2^{\,1}\,(Q) \cap L_\infty\,(0,\ T;\ L_2\,(0,\ 1))$ с условиями

$$\varphi_{xx} \in L_2\,(Q),\ \varphi\,(x,\ T) = \psi\,(x,\ T) = 0,\qquad \varphi\,(0,\ t) = \varphi\,(1,\ t) = 0$$

$$\int_0^1 \rho\,(x,t)\,dx = \int_0^1 \rho_0\,(x)\,dx \equiv \alpha,\quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Здесь учтено, что левая часть первого уравнения (1.1) в силу второго уравнения может быть записана в виде $(\rho u)_t + (\rho u^2)_x$.

В дальнейшем будем рассматривать только устойчивые ОР.

Определение 2. ОР задачи А назовем устойчивым, если оно является пределом классических решений (КР).

Более точная формулировка будет приведена ниже.

Для выяснения структуры устойчивого ОР удобно воспользоваться другим его определением (доказательство эквивалентности определений пока тоже откладываем).

Остановимся сначала на одном свойстве КР задачи А.

Известно, что КР задачи А может быть получено заменой переменных [1] из КР следующей задачи (задачи Б):

$$(1.2)\qquad \begin{gathered} u_t' = \mu(\rho' u_\xi')_\xi - p_\xi', \quad v_t' = u_\xi', \quad v = \rho^{-1} \\ \xi,\ t \in Q':\ 0 < \xi < \alpha,\ 0 < t < T \\ u'(0, t) = u'(\alpha, t) = 0,\ u'(x, 0) = u_0'(x),\ \rho'(x, 0) = \rho_0'(x) \end{gathered}$$

(ξ, t — массовые лагранжевы координаты). Замена переменных $\xi, t \to x, t$

$$(1.3)\qquad x(\xi, t) = \int_0^\xi v'(\eta, t)\, d\eta$$

переводит КР задачи Б в КР задачи А. Связь начальных данных обеих задач порождается этой же заменой переменных. Например, для функции u

$$u_0'(\xi) = u_0\Big(\int_0^\xi v_0'(\eta)\, d\eta\Big), \quad u_0(x) = u_0'\Big(\int_0^x \rho_0(y)\, dy\Big)$$

Аналогично поступим при определении устойчивого ОР задачи А. Сначала определим ОР задачи Б, а затем, сделав замену переменных (1.3), назовем его устойчивым ОР задачи А.

Введем обозначения

$$\Omega' = \{\xi : 0 < \xi < \alpha\},\ Q_\delta' = Q' \cap (\delta < t < T)$$
$$|u'|_\delta = \operatorname*{vraimax}_{\delta \leqslant t \leqslant T} \| u'(\xi, t) \| + \| u_\xi' \|_\delta$$

$\| u' \|$, $\| u' \|_\delta$ — нормы в $L_2(\Omega')$, $L_2(Q_\delta')$ соответственно, $\| u' \|_V$ — норма $u'(\xi)$ в пространстве $V[\Omega']$ функций ограниченной вариации.

Перепишем систему (1.2) в виде

$$(1.4)\qquad u_t' \times \mu(\ln v')_{\xi t} - p_\xi',\ v_\xi' = u_\xi'$$

Определение 3. Измеримые функции u', ρ' назовем ОР задачи Б, если $u' \in L_4(Q')$, $\operatorname{vraimin} \rho'(Q') > 0$, $\operatorname{vraimax} \rho'(Q') < \infty$ и уравнения (1.4) выполняются в смысле интегральных тождеств

$$\iint_{Q'} (\mu \ln v' \varphi_{\xi t} + u' \varphi_t + p' \varphi_\xi)\, d\xi\, dt + \int_{\Omega'} (\mu \ln v_0' \varphi_\xi(\xi, 0) + u_0' \varphi(\xi, 0))\, d\xi = 0$$

$$\iint_{Q'} (u' \psi_\xi - v' \psi_t)\, d\xi\, dt - \int_{\Omega'} v_0' \psi(\xi, 0)\, d\xi = 0, \quad v = \rho^{-1}$$

для произвольных функций $\varphi(\xi, t), \psi(\xi, t) \in W_2^1(Q') \cap L_\infty(0, T; L_2(0'))$ с условиями

$$\varphi \in L_\infty(0, T, W_2^1(\Omega')),\ \varphi_{\xi t} \in L_2(Q'),\ \varphi(\xi, T) = \psi(\xi, T) = 0$$
$$\varphi(0, t) = \varphi(\alpha, t) = 0, \quad \int_{\Omega'} v'(\xi, t)\, d\xi = 1, \quad 0 < t < T$$

Определение 4. Функции $u(x, t)$, $\rho(x, t)$ назовем устойчивым ОР задачи A, если они получены из какого-нибудь ОР задачи Б заменой переменных (1.3).

2. **Существование и единственность.** *Теорема* 1. ОР задачи Б единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два различных ОР. Тогда для их разности $u' = u_1' - u_2'$, $v' = v_1' - v_2'$ в силу определения 3 выполняется равенство

$$\iint\limits_{Q'} (v' L_1(\varphi, \psi) + u' L_2(\varphi, \psi))\, d\xi\, dt = 0 \tag{2.1}$$

$$L' \equiv \mu a \varphi_{\xi t} + b\varphi_\xi - \psi_t, \quad L_2 = \varphi_t + \psi_\xi$$

$$a = (\ln v_1' - \ln v_2')(v_1' - v_2')^{-1}, \quad b = (p_1' - p_2')(v_1' - v_2')^{-1}$$

Из предположений о решениях следует, что a, b — ограниченные измеримые функции и $\operatorname{vrai\,min} a(Q') = a_0 > 0$. Приблизим их в $L_2(Q')$ достаточно гладкими функциями a_ε, b_ε, такими, что их модули равномерно ограничены по ε и $2\cdot \operatorname{vrai\,min} a_\varepsilon(Q') \geqslant a_0$.

Перепишем (2.1) в виде

$$\iint\limits_{Q'} [\mu(a - a_\varepsilon) v' \varphi_{\xi t} + (b - b_\varepsilon) v' \varphi_\xi + L_1^\varepsilon(\varphi, \psi) v' + L_2(\varphi, \psi) u']\, d\xi\, dt = 0$$

Чтобы получить противоречие, достаточно доказать разрешимость задачи

$$L_1^\xi(\varphi, \psi) = f, \quad L_2(\varphi, \psi) = g \tag{2.2}$$

для функций φ, ψ из класса, указанного в определении 3, где f, g — произвольные функции из $C^\infty(Q')$. Кроме того, необходимо для каждых f, g иметь равномерную по ε оценку

$$\| \varphi_{\xi t} \|_0 + \| \varphi_\xi \|_0 \leqslant c \tag{2.3}$$

Здесь и далее c — положительная постоянная.

Введем новую переменную $t \to T - t$, тогда задача (2.2) станет эквивалентной следующей:

$$\psi_t = \mu a_\varepsilon \psi_{\xi\xi} - b_\varepsilon \int_0^t \psi_{\xi\xi}\, d\tau + F, \quad \psi(\xi, 0) = 0 \tag{2.4}$$

$$F = f + b_\varepsilon \int_0^t g_\xi\, d\tau - \mu a_\varepsilon g_\varepsilon, \quad \psi_\xi(0, t) = \psi_\xi(\alpha, t) = 0$$

Разрешимость линейной задачи (2.4) может быть доказана, например методом Галеркина.

Оценка (2.3) следует из формулы

$$\varphi_\xi = \int_0^t \psi_{\xi\xi}\, d\tau - \int_0^t g_\xi\, d\tau$$

если оценить $\| \psi_{\xi\xi} \|_0$, а это достигается умножением уравнения (2.4) на $\psi_{\xi\xi}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $u_0' \in L_2(\Omega')$, $v_0' \in V(\Omega')$, $\operatorname{vraimax} v_0'(\Omega') \leqslant \varkappa$, $\varkappa \cdot \operatorname{vrai\,min} v_0'(\Omega') \geqslant 1$, $\varkappa = \mathrm{const} > 0$.

Тогда задача Б имеет ОР.

Доказательство. Пусть функции $u_{0\varepsilon}'$, $v_{0\varepsilon}'$ достаточно гладкие и могут быть начальными данными для КР задачи Б. Приблизим ими начальные данные u_0', v_0' в следующем смысле:

$$\| u_0' - u_{0\varepsilon}' \| + \| v_0' - v_{0\varepsilon}' \|_V \to 0, \quad \int\limits_{\Omega'} v_{0\varepsilon}'\, d\xi = 1, \quad \varepsilon \to 0$$

Заметим, что такое приближение, удовлетворяющее условиям согласования, всегда можно сделать, поскольку от $u_{0\varepsilon}'$ требуется сходимость только в $L_2(\Omega')$.

Рассмотрим задачу Б с начальными данными $u_{0\varepsilon}'$, $v_{0\varepsilon}'$. Для ее решения u_ε', v_ε' в силу [1] справедливы равномерные по ε оценки

(2.5)
$$| u_\varepsilon' |_0 + \| v_{\varepsilon t}' \|_0 \leqslant c, \quad c^{-1} \leqslant v_\varepsilon' \leqslant c$$

в которых c зависит от $\| u_0' \|$, $\varkappa$. В частности, по теореме вложения u_ε' равномерно по ε ограничены в $L_4(Q')$.

Обозначим

$$\omega_\varepsilon = \ln v_\varepsilon'(\xi_2, t) - \ln v_\varepsilon'(\xi_1, t)$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (1.2)

$$\omega_\varepsilon + \int_0^t q\omega_\varepsilon \, d\tau = G, \quad q = -\mu [p'(\xi_2, t) - p'(\xi_1, t)] \omega_\varepsilon^{-1}$$

$$G = \frac{1}{\mu} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (u_\varepsilon' - u_{0\varepsilon}') \, d\eta + \ln v_{0\varepsilon}'(\xi_2) - \ln v_{0\varepsilon}'(\xi_1)$$

Отсюда по лемме Гронуолла следует

(2.6)
$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| v_\varepsilon'(t) \|_V \leqslant c$$

Из семейства функций v_ε', удовлетворяющих условиям (2.5), (2.6), по теореме Хелли [2] можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в Q' почти всюду. Семейство u_ε' слабо компактно в $L_2(Q')$. Таким образом, существует некоторая последовательность КР $(u_\varepsilon', v_\varepsilon')$ задачи Б, которая при $\varepsilon \to 0$ сходится к измеримым функциям u', v' в следующем смысле: $u_\varepsilon' \to u'$ слабо в $L_2(Q')$, $v_\varepsilon' \to v'$ почти всюду в Q'.

Очевидно, (u', v') — ОР задачи Б. Кроме того, из (2.5) следует, что существуют производные u_ξ', v_t' и

(2.7)
$$| u' |_0 \leqslant c, \; \| u' \|_{L_4(Q')} \leqslant c, \; c^{-1} \leqslant v' \leqslant c, \; \| v_t' \|_0 \leqslant c$$

Теорема доказана.

Пусть (u', v') — ОР задачи Б. Сделаем замену переменных (1.3):

(2.8)
$$u(x, t) = u'(\xi(x, t), t), \quad v(x, t) = v'(\xi(x, t), t)$$

Здесь $\xi(x, t)$ — обратная к функции $x(\xi, t)$ при фиксированном t

(2.9)
$$x(\xi, t) = \int_0^\xi v'(\eta, t) \, d\eta, \quad x = \int_0^{\xi(x, t)} v'(\eta, t) \, d\eta$$

Функции (u, v) являются устойчивым ОР задачи А по определению 4. Покажем, что они являются устойчивым ОР и в смысле определения 2, т. е. удовлетворяют интегральным равенствам из определения 1 и являются пределами КР задачи А. Попутно уточним содержание этого предельного перехода.

Пусть u_n', v_n' — та последовательность КР задачи Б из теоремы 2, которая сходится к функциям u', v'. Перейдем на КР u_n', v_n' к эйлеровым координатам x, t по формулам

(2.10)
$$x(\xi, t) = \int_0^\xi v_n'(\eta, t) \, d\eta, \quad \frac{\partial(x, t)}{\partial(\xi, t)} = v_n'$$

$$u_n(x, t) = u_n'(\xi_n(x, t), t), \quad v_n(x, t) = v_n'(\xi_n(x, t), t)$$

Здесь $\xi_n(x, t)$ — функция, которая при фиксированном t является обратной к функции $x(\xi, t)$, т. е.

$$x = \int\limits_0^{\xi_n(x,t)} v_n'(\eta, t)\, d\eta$$

Очевидно (u_n, v_n) — КР задачи А, поэтому для него выполняются интегральные равенства из определения 1, если в качестве начальных данных взять функции u_{0n}, v_{0n}.

Лемма 1. Для почти всех $x, t \in Q$ справедливо предельное соотношение $\lim v_n(x, t) = v(x, t)$, $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть в точке ξ_0, t_0 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} v_n'(\xi_0, t_0) = v'(\xi_0, t_0) \tag{2.11}$$

Покажем, что в соответствующей точке (x_0, t_0)

$$x_0 = \int\limits_0^{\xi_0} v'(\eta, t_0)\, d\eta$$

выполняется утверждение леммы.

Имеем

$$x_0 = \int\limits_0^{\xi_0} v'(\eta, t_0)\, d\eta = \int\limits_0^{\xi_{0n}} v_n'(\eta, t_0)\, d\eta, \quad \xi_{0n} = \xi_n(x_0, t_0)$$

Поэтому

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi_{0n}} v_n'(\eta, t_0)\, d\eta = \int\limits_0^{\xi_0} [v'(\eta, t_0) - v_n'(\eta, t_0)]\, d\eta$$

Значит, последовательность $\xi_n(x_0, t_0)$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(x_0, t_0) = \xi_0$$

Далее

$$|v_n(x_0, t_0) - v(x_0, t_0)| = |v_n'(\xi_{0n}, t_0) - v'(\xi_0, t_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |v_n'(\xi_{0n}, t_0) - v_n'(\xi_0, t_0)| + |v_n'(\xi_0, t_0) - v'(\xi_0, t_0)|$$

Тем самым утверждение леммы для точки x_0, t_0 доказано ввиду равномерной непрерывности функции v_n'. Справедливость леммы для почти всех x, $t \in Q$ следует из того, что (2.11) выполняется почти всюду и якобиан замены переменных (2.10) равномерно ограничен снизу и сверху.

Лемма 2. Последовательность $u_n(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ слабо в $L_2(Q)$.

Доказательство. В силу неравенства (2.5)

$$|u_n|_0 \leqslant c, \ \|u_n\|_{L_4(Q)} \leqslant c \tag{2.12}$$

(здесь вторая оценка — следствие первой). Отметим, что эти оценки зависят только от $\|u_0\|$, vraimax $v_0(\Omega)$, vraimin $v_0(\Omega)$.

Пусть $u_*(x, t)$ — предел какой-нибудь слабо сходящейся в $L_2(Q)$ подпоследовательности $\{u_k\} \subset \{u_n\}$. Тогда для любой функции $\varphi(x, t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_Q u_k \varphi\, dx\, dt = \iint\limits_Q u_* \varphi\, dx\, dt = \iint\limits_{Q'} u_*'(\xi, t)\, \varphi'(\xi, t)\, v'(\xi, t)\, d\xi\, dt$$

$$\left(\varphi'(\xi, t) = \varphi(x(\xi, t), t),\ x(\xi, t) = \int\limits_0^{\xi} v'(\eta, t)\, d\eta\right)$$

С другой стороны

$$\iint\limits_{Q} u_k \varphi\, dx\, dt = \iint\limits_{Q'} u_k (x_k (\xi, t), t)\, \varphi (x_k (\xi, t), t)\, v_k' (\xi, t)\, d\xi \equiv$$

$$\equiv \iint\limits_{Q'} u_k' (\xi, t)\, \varphi_k' (\xi, t)\, v_k' (\xi, t)\, d\xi\, dt$$

$$\left(x_k (\xi, t) = \int\limits_0^{\xi} v_k' (\eta, t)\, d\eta \right)$$

Так как $\lim x_k (\xi, t) = x (\xi, t)$ всюду в Q' и $u'_k \to u'$ слабо в $L_2 (Q')$, то

$$\iint\limits_{Q} u_* \varphi\, dx\, dt = \iint\limits_{Q} u \varphi\, dx\, dt$$

Значит, $u_* = u$ почти всюду в Q.

Сходящаяся последовательность u_k была произвольной, поэтому вся последовательность u_n слабо сходится в $L_2 (Q)$ к u.

Лемма 3. Последовательность u_n сходится к u в $L_2 (Q)$.

Доказательство. Ввиду леммы 2 достаточно доказать компактность последовательности u_n в $L_2 (Q)$.

Компактность будет следовать из оценки (2.12) и оценки

$$\int\limits_0^{T-\delta} \int\limits_0^{1} | u_n (x, t + \delta) - u_n (x, t) |^2\, dx\, dt \leqslant c\delta^{1/2}$$

Ввиду равномерной ограниченности снизу и сверху функции v_n' — якобиана замены переменных $\xi, t \to x, t$ на решении u_n', v_n' — эта оценка эквивалентна такой:

$$\int\limits_0^{T-\delta} \int\limits_0^{\alpha} | u_n' (\xi, t + \delta) - u_n' (\xi, t) |^2\, d\xi\, dt \leqslant c\delta^{1/2}$$

Получим ее. Пусть $w_n = u_n' (\xi, t + \delta) - u_n' (t)$. Проинтегрируем первое уравнение системы (1.2) по переменной t от t до $t + \delta$ и умножим на w_n.

Получим

$$w_n^2 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(w_n \int\limits_t^{t+\delta} \sigma_n\, d\tau \right) - w_{n\xi} \int\limits_t^{t+\delta} \sigma_n\, d\tau, \quad \sigma_n = \mu \rho_n' u_{n\xi}' - p_n'$$

Интегрируя это равенство и применяя оценки (2.5), приходим к требуемому неравенству.

Леммы 1, 3 и оценки (2.12) позволяют перейти к пределам в интегральных равенствах определения 1, записанных для u_n, v_n.

Таким образом, $u (x, t)$, $v (x, t)$ — устойчивое ОР задачи А в смысле определения 2. Из теоремы 1 следует, что другого устойчивого ОР быть не может.

Подытожим сказанное.

Теорема 3. Пусть $u_0 (x) \in L_2 (\Omega)$, $v_0 (x) \in V (\Omega)$, $\operatorname{vrai\,max} v_0 (\Omega) < \infty$, $\operatorname{vrai\,min} v_0 (\Omega) > 0$.

Тогда задача А однозначно разрешима в классе устойчивых ОР.

3. Структура устойчивого ОР. Для выяснения дифференциальных свойств устойчивого ОР задачи А удобно оперировать определением 4. Предварительно исследуем свойства функций $u' (\xi, t)$, $v' (\xi, t)$.

Лемма 4. Пусть u_δ', v_δ' — ОР задачи Б в подобласти $Q_\delta' \subset Q'$ с начальными данными

$$u_\delta' (\xi, \delta) = u' (\xi, \delta), \quad v_\delta' (\xi, \delta) = v' (\xi, \delta)$$

Тогда $u' = u_\delta'$, $v' = v_\delta'$ почти всюду в Q_δ'.

Доказательство. В определении 3 вместо выполнения интегральных равенств можно потребовать выполнения других интегральных соотношений

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\alpha}(\mu \ln v'\varphi_{\xi t}+u'\varphi_t+p'\varphi_\xi)\,d\xi\,dt=I_1(t_2)-I_1(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\alpha}(u'\psi_\xi-v'\psi_t)\,d\xi\,dt=-I_2(t_2)+I_2(t_1)$$

$$I_1=\int_{\Omega'}(\mu\ln v'\varphi_\xi+u'\varphi)\,d\xi,\quad I_2=\int_{\Omega'}v'\psi\,d\xi,\ \lim_{t\to 0}I_i(t)=I_i(0)$$

для любых функций φ, ψ, удовлетворяющих тем же условиям, что и в определении 3, но без условия $\varphi=\psi=0$ при $t=T$.

Равносильность интегральных тождеств доказывается аналогично известному ([3], с. 110). При таком определении u', v' будет ОР задачи Б в области Q_δ' с начальными данными $u'(\xi,\delta)$, $v'(\xi,\delta)$. В силу единственности $(u_\delta', v_\delta')=(u',v')$ почти всюду в Q_δ'.

Лемма 5. Существует счетное всюду плотное множество $\{t_k\}\subset[0,T]$: $u_\xi'(\xi,t_k)\in L_2(\Omega')$, $v'(\xi,t_k)\in V(\Omega')$.

Доказательство. Пусть u_n', v_n' — та последовательность из теоремы 2, которая сходится к ОР u', v'. Так как $u_\xi'\in L_2(Q')$, то по теореме Фубини существует счетное всюду плотное множество $\{t_k\}\subset[0,T]$, такое, что $u'(\xi,t_k)\in L_2(\Omega')$. В силу оценки (2.6) при любом t_k имеем $\|v_n'(t_k)\|_V\leqslant c$. Поэтому по теореме Хелли можно выделить подпоследовательность $\{v_m'\}\subset\{v_n'\}$, сходящуюся при каждом t_k в каждой точке $\xi\in\Omega'$. Таким образом, $\|v'(t_k)\|_V\leqslant c$ при любом t_k.

Таким же образом можно показать, что

(3.1) $$\|v'(t)\|_V\leqslant c,\ 0\leqslant t\leqslant T$$

Теорема 4. В любой подобласти $Q_\delta'\subset Q'$ функция $u'(\xi,t)$ равномерно непрерывна по Гельдеру с показателями $1/2$, $1/4$ по ξ и t соответственно.

Доказательство. По лемме 5 при некотором t_k, $0<t_k<\delta$

$$u'(\xi,t_k)\in W_2^1(\Omega'),\ v'(\xi,t_k)\in V(\Omega)'$$

Пусть u_k', v_k' — ОР задачи Б в подобласти $Q_{t_k}'\subset Q'$ с начальными данными $u'(\xi,t_k)$, $v'(\xi,t_k)$. Приблизим эти данные гладкими функциями u_{0h}', v_{0h}' в следующем смысле:

$$\|u_{0h}'-u'(\xi,t_k)\|_{W_2^1(\Omega')}+\|v_{0h}'-v'(\xi,t_k)\|_V\to 0,\ \int_0^{\alpha}v_{0h}'\,d\xi=1,\ h\to 0$$

Соответствующее этим функциям КР u_h', v_h' задачи Б сходится к u_k', v_k' в силу единственности, причем для него справедлива оценка

(3.2) $$|\sigma_h'|_{t_k}\leqslant c,\quad \sigma_h'=\mu\rho_h'u_{h\xi}'-p_h'$$

Она получается умножением уравнения $u_t'=\sigma_\xi'$ на σ_ξ' с использованием тождества

$$u_{t\xi}'=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}(v'\sigma')+\frac{1}{\mu}\left(p'+v'\frac{\partial p'}{\partial v'}\right)v_t'$$

Из (3.2) следуют оценки

(3.3) $$\sup_{t_k\leqslant t\leqslant T}\|u_h'(t)\|_{W_2^1(\Omega')}\leqslant c,\quad \|u_{ht}'\|_{t_k}\leqslant c$$

Они равномерны по h и обеспечивают утверждение леммы для функции $u_h'(\xi,t)$. Из семейства u_h' по лемме Арцела можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к u_k' равномерно в Q_{t_k}'. Таким образом, теорема доказана и для функции u'.

Выясним свойства функции $v'(\xi, t)$. Начальная функция $v_0'(\xi) \in V(\Omega')$, поэтому имеет не более чем счетное множество точек разрыва.

Теорема 5. Пусть β_k — точки разрыва функции $v_0'(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Тогда функция $v'(\xi, t)$ непрерывна всюду в Q', кроме линий $\xi = \beta_k$, и ее разрывы на этих линиях убывают по экспоненциальному закону, т. е.

$$c_1 \exp(-c_2 t) \leqslant V_k(t) \leqslant c_3 \exp(-c_4 t) \tag{3.4}$$

$$V_k(t) = |\, v'(\beta_k + 0, t) - v'(\beta_k - 0, t)\, |$$

где постоянные c_i не зависят от времени.

Доказательство. Вся информация, содержащаяся в утверждении теоремы, вытекает из формулы

$$p' = \frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Big(1 + \int_0^t E(\xi, \tau)\, d\tau\Big), \quad t > 0 \tag{3.5}$$

$$E(\xi, t) = \frac{\gamma}{\mu} p_0'(\xi) \exp\Big\{\frac{\gamma}{\mu}\Big[\int_0^t\int_0^\alpha ((u')^2 + p'v')\, d\xi\, d\tau + B(\xi, t)\Big]\Big\}$$

$$B(\xi, t) = -\int_0^\alpha v'(\eta, t)\int_\eta^\xi u'(\zeta, t)\, d\zeta\, d\eta -$$

$$-\int_0^\alpha v_0'(\eta)\int_0^\eta u_0'(\zeta)\, d\zeta\, d\eta + \int_0^\xi u_0'(\eta)\, d\eta$$

Предположим, что формула справедлива. Тогда функция $p'(\xi, t)$ непрерывна по ξ в точках непрерывности функции $p_0'(\xi)$, так как $B(\xi, t)$ непрерывна по ξ. Оценка (3.4) также получается из (3.5).

Чтобы доказать справедливость формулы (3.5), достаточно это сделать для КР задачи Б, поскольку $v_n' \to v'$ почти всюду в Q', а $u_n' \to u'$ равномерно в любой подобласти $Q_\delta' \subset Q'$ и в $L_2(Q')$.

Проинтегрируем уравнения

$$\sigma' = -\mu(\ln \rho')_t - p', \quad u_t' = \sigma_\xi'$$

Имеем

$$p' \exp\Big(\frac{\gamma}{\mu}\int_0^t p'\, d\tau\Big) = p_0' \exp\Big(-\frac{\gamma}{\mu}\int_0^t \sigma'\, d\tau\Big) \tag{3.6}$$

$$z(\xi, t) = z(\eta, t) + \int_\eta^\xi [u'(\zeta, t) - u_0'(\zeta)]\, d\zeta, \quad z(\xi, t) = \int_0^t \sigma'(\xi, \tau)\, d\tau$$

Обозначим

$$U_0(\xi) = \int_0^\xi u_0'(\eta)\, d\eta, \quad \Phi(\xi, t) = z(\xi, t) + U_0(\xi)$$

Функция Φ удовлетворяет соотношениям

$$z(\xi, t) = \Phi(\eta, t) + \int_\eta^\xi u'(\zeta, t)\, d\zeta - U_0(\xi)$$

$$(v'\Phi)_t = \mu\Phi_{\xi\xi} + (\Phi_\xi\Phi)_\xi - p'v' - \Phi_\xi^2$$

Проинтегрируем их соответственно по переменным η, ξ предварительно умножив первое соотношение на $v'(\eta, t)$

$$z(\xi, t) = \int_0^\alpha v'\Phi\, d\eta + \int_0^\alpha v'(\eta, t)\int_\eta^\xi u'(\zeta, t)\, d\zeta - U_0(\xi)$$

$$\int_0^\alpha v'\Phi\, d\xi = -\int_0^t\int_0^\alpha ((u')^2 + p'v')\, d\xi\, d\tau + \int_0^\alpha v_0'(\xi)\, U_0(\xi)\, d\xi$$

Здесь использовано равенство

$$\int_0^\alpha v'(\xi, t)\, d\xi = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Подставляя найденное выражение для $z(\xi, t)$ в первое из соотношений (3.6), получаем формулу (3.5).

Из формулы (3.5) и равномерной по времени оценки $|u'|_0 \leqslant c$ можно получить равномерную по времени оценку $c^{-1} \leqslant v' \leqslant c$ [4].

Теорема 6. ОР u', v' задачи Б имеет почти всюду в Q' конечные производные u_t', u_ξ', $u_{\xi\xi}'$, v_t', v_ξ' и удовлетворяет уравнениям (1.2) почти всюду в Q'.

Доказательство. Из оценок (2.7), (3.2), (3.3) следует, что u_ξ', u_t', v_t', $\sigma_\xi' \in L_2(Q_\delta')$ для любой подобласти $Q_\delta' \Subset Q'$, и почти всюду в Q_δ' справедливы равенства $u_t' = \sigma_\xi'$, $v_t' = u_\xi'$.

Далее, в силу (3.1) функция v' имеет почти всюду в Q' конечную производную v_ξ'. Существование конечных производных σ_ξ', u_ξ' обеспечивает аналогичное свойство для $u_{\xi\xi}'$.

Перейдем теперь к свойствам функций u, v. Они будут определяться заменой переменных (2.8), (2.9).

Лемма 6. Функция $\xi(x, t)$, определяемая формулами (2.8), (2,9), непрерывна по Липшицу по переменной x и непрерывна по Гельдеру по переменной t с показателем $^1/_2$ равномерно в Q.

Доказательство вытекает из оценок (2.7) для функции v'.

Сформулируем окончательный результат о свойствах функций u, v.

Теорема 7. Устойчивое ОР u, v задачи А имеет следующую структуру:

1) в любой подобласти $Q_\delta \subset Q$ функция u равномерно непрерывна по Гельдеру с показателями $^1/_2$, $^1/_4$ по x и t соответственно;

2) функция $v(x, t)$ при каждом t имеет ограниченную вариацию по переменной x, из точек разрыва начальной функции $v_0(x)$ исходят непересекающиеся и не сближающиеся линии разрыва по переменной x функции v, эти разрывы исчезают по экспоненциальному закону (формула (3.4));

3) функции u, v имеют почти всюду в Q конечные производные, входящие в систему (1.1), и удовлетворяют системе (1.1) почти всюду.

Доказательство. Свойства 1, 2 вытекают из теорем 4, 5 и леммы 6.

Докажем свойство 3. Пусть u_n, v_n — та последовательность из (2.10), которая сходится к u, v. В силу оценок (2.12), (3.2), (3.3) в любой подобласти $Q_\delta \subset Q$ существуют производные u_t, u_x v_t, $(\rho u)_x$, σ_x как функции из $L_2(Q_\delta)$, где $\sigma = \mu u_x - p$, и справедливы равенства (в $L_2(Q_\delta)$)

$$\rho(u_t + uu_x) = \sigma_x, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0$$

Поскольку при каждом t функция $v(x, t)$ для почти всех x имеет конечную производную v_x, то из равенства $\sigma = \mu u_x - p$ следует, что почти всюду существует конечная производная u_{xx}. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кажихов А. В.* Корректность «в целом» смешанных краевых задач для модельной системы уравнений вязкого газа.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 21. Новосибирск, Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975, с. 18—47.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
3. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
4. *Шелухин В. В.* Эволюция контактного разрыва в баротропном течении вязкого газа.— ПММ, 1983, вып. 5, т. 47, с. 870—872.

Новосибирск

Поступила в редакцию 17.I.1984