Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 531/534

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВАРИАЦИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Цыпкин А. Г.

Даны определения основных видов вариаций, используемых в механике сплошных сред. Установлены связи между различными типами вариаций векторов и тензоров.

Построение новых, усложненных моделей сплошных сред может быть основано на использовании вариационного уравнения [1]. При конструировании моделей континуальных дислокаций, пластических сред, сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем (как в рамках ньютоновской механики, так и в теории относительности) [2—6], а также ряда других моделей, необходимо оперировать с вариациями разных типов от различных величин: скаляров, векторов, тензоров, которые могут рассматриваться как функции эйлеровых или лагранжевых координат. Поэтому необходимо иметь установленные связи между различными типами вариаций, имеющих ту же природу, что и варьируемые функции.

Ниже будут рассмотрены некоторые простейшие типы вариаций, используемых при построении моделей сплошных сред в специальной теории относительности. Далее через x^i ($i = 1, 2, 3, 4$) будем обозначать эйлеровы координаты, а через ξ^a ($a = 1, 2, 3, 4$) — лагранжевы координаты четырехмерного пространства Минковского, полагая, что глобальные координаты x^4 и ξ^4 имеют временную природу $x^4 = ct$, $\xi^4 = c\tau$ (c — скорость света в вакууме).

В системе координат x^i с базисными векторами $\mathrm{э}_i$, определенными как единичные касательные векторы к линиям $x^i = \mathrm{const}$, мировые линии частиц определяются уравнениями $x^i = x^i(\xi^a)$ (законом движения точки с лагранжевыми координатами ξ^α относительно системы x^i). Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, а малые латинские — 1, 2, 3, 4.

В каждой точке четырехмерного пространства — времени Минковского как для системы координат x^i, так и для системы ξ^a можно ввести ковариантные и контравариантные векторы базисов ($\mathrm{э}_i$ и $\mathrm{э}^i$, $\mathrm{э}_a^\wedge$ и $\mathrm{э}^{\wedge a}$ соответственно), которые связаны между собой равенствами

$$\mathrm{э}_a^{\frown} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a}\,\mathrm{э}_i = x_a{}^i \mathrm{э}_i, \quad \mathrm{э}_i = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} = \xi_i{}^a \mathrm{э}_a^{\frown}$$

Наряду с законом движения $x^i = x^i(\xi^a)$ при построении моделей сред и полей рассматриваются различные скалярные, векторные и тензорные поля, представляющие собой механические, физические или химические характеристики изучаемых явлений и процессов и являющиеся функциями координат x^i или координат ξ^a (подробнее об этих характеристиках см., например, [6]). В задачах, связанных с заданием или отысканием законов движения сплошной среды и законов изменения полей кроме действительных законов и полей $\mu^{(A)}$ ($A = 1, 2, \ldots$) можно мысленно вводить варьированный закон движения и варьированные скалярные, векторные и тензорные поля $\mu^{(A)\prime}$. Разность между варьированным $\mu^{(A)\prime}$ и действительным значением $\mu^{(A)}$ обычно называют вариацией функции $\mu^{(A)}$. Вариации функций можно вводить разными способами в соответствии с различными определениями. Например, вариацию функции $\mu^{(A)}$ в точке M можно определить как приращение этой функции за счет смещения из данной точки M в близкую точку M', как приращение за счет бесконечно малого преобразования координат в фиксированной точке M и т. д. Определяя вариации скаляров, векторов и тензоров, необязательно требовать, чтобы вариации представляли собой приращения варьируемых функций по некоторым вспомогательным параметрам, определяющим глобальные поля варьируемых функций. Необходимо также отметить, что при варьировании тензоров целесообразно определять вариации тензоров таким образом, чтобы они представляли собой тензоры того же ранга и с тем же строением индексов, что и варьируемый тензор.

Ниже в рамках четырехмерного пространства рассмотрены только бесконечно малые вариации скаляров, векторов и тензоров и установлены некоторые простейшие связи между возможными различными видами вариаций этих объектов.

1. Вариация закона движения. Вариацию закона движения будем определять полагая, что система координат наблюдателя x^i и лагранжева сопутствующая система координат ξ^a фиксированы. Вариацию закона движения точки M_0, имеющей фиксированные пространственные лагранжевы координаты $\xi_0{}^\alpha$, в системе координат наблюдателя определим равенством

$$\delta x^i = x^{i'}(\xi_0{}^\alpha, \xi^4) - x^i(\xi_0{}^\alpha, \xi^4) \tag{1.1}$$

где $x^i(\xi_0{}^\alpha, \xi^4)$ — мировая линия точки M_0 в системе координат наблюдателя, $x^{i'}(\xi_0{}^\alpha, \xi^4)$ — мировая линия, близкая к мировой линии $x^i(\xi_0{}^\alpha, \xi^4)$, отвечающая варьированному закону движения точки M_0. При фиксированном значении ξ^4 вариация δx^i представляет собой малое возможное смещение точки M_0 с координатами x^i в близкую точку с координатами $x^{i'}$. При таком определении вариации закона движения действительные перемещения dx^i точки $M_0(\xi_0{}^\alpha)$ содержатся среди возможных; вариации δx^i обращаются в действительные перемещения, если

$$\delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^4} d\xi^4$$

(Здесь и далее индекс нуль у лагранжевых координат точки M опускаем и обозначаем ее координаты ξ^a, подразумевая тем самым, что M — произвольная, но фиксированная точка сплошной среды.)

В фиксированной системе координат наблюдателя x^i связь между базисными векторами этой системы в точках x^k и $x^k + \delta x^k$ определяется равенствами

$$э_i(x^k + \delta x^k) = э_i(x^k) + \delta x^s \Gamma_{is}{}^l э_l(x^k)$$

где $\Gamma_{is}{}^l$ — символы Кристоффеля. Базисные векторы системы координат наблюдателя и сопутствующей системы координат для действительного и варьированного законов движения связаны равенствами

$$э_a\hat{} = x_a{}^i э_i(x^k) \tag{1.2}$$

$$э_a\hat{}' = \frac{\partial x^{i'}}{\partial \xi^a} э_i(x^k + \delta x^k) = э_a\hat{} + x_a{}^s \nabla_s \delta x^i э_i$$

где ∇_s — оператор ковариантного дифференцирования в системе координат наблюдателя.

В общем случае разность $э_a{}^{\wedge\prime} - э_a{}^\wedge$ есть вариация векторов лагранжевого репера, обусловленная вариацией закона движения, которая выражается через вариацию закона движения по формуле

$$э_a\hat{}' - э_a\hat{} = \delta_x э_a\hat{} = x_a{}^s \nabla_s \delta x^i э_i \tag{1.3}$$

Так как вариация закона движения определяется в фиксированной системе координат наблюдателя, т. е. по определению полагается, что $\delta_x э_i = 0$, то из формулы (1.3) следует выражение для вариаций членов матрицы преобразования $\| x_a{}^i \|$

$$\delta_x x_a{}^i = x_a{}^s \nabla_s \delta x^i \tag{1.4}$$

Из равенств $\xi_k{}^a x_a{}^i = \delta_k{}^i$ и $\xi_i{}^b x_a{}^i = \delta_a{}^b$ и формулы (1.4) можно получить выражения для вариаций $\delta_x э^{\wedge a}$, $\delta_x g_{ab}{}^\wedge$ и $\delta_x g^{\wedge ab}$

$$\delta_x э^{\wedge a} = -\xi_i{}^a \nabla_k \delta x^i э^k$$

$$\delta_x g\hat{}_{ab} = g_{ij}(x_b{}^i x_a{}^s + x_a{}^j x_b{}^s) \nabla_s \delta x^i \tag{1.5}$$

$$\delta_x g^{\wedge ab} = -g^{ij}(\xi_j{}^b \xi_s{}^a + \xi_j{}^a \xi_s{}^b) \nabla_i \delta x^s$$

2. Вариации векторов и тензоров. При построении моделей сплошных сред и полей в число параметров, определяющих моделируемое физическое явление, наряду с простейшими скалярными и векторными динамическими и кинематическими характеристиками (такими как плотность, скорость и т. д.) также могут входить некоторые дополнительные скалярные векторные или тензорные параметры. Эти дополнительные параметры по своему физическому смыслу можно условно разбить на два класса — параметры $\mu^{(A)}$ $(A = 1, 2, \ldots)$, характеризующие физическое состояние сплошной среды или поля (например, энтропия, векторы напряженностей электрического и магнитного полей, антисимметричные тензоры, описывающие внутренний момент количества движения и т. д.), и параметры $\mathbf{K}^{(B)}$ $(B = 1, 2, \ldots)$, характеризующие геометрические и физические свойства сплошной среды (например, коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости среды, модули упругости, тензоры, описывающие анизотропные свойства среды и т. д.). Параметры, описывающие физическое состояние среды, могут меняться независимо от геометрических, кинематических и динамических характеристик среды и служить, в частности, для описания взаимодействия среды с внешними тепловыми потоками, электромагнитным полем и т. д. Параметры второго вида могут быть универсальными физическими постоянными или зависеть от координат x^i или ξ^a и именно наличие этих параметров среди аргументов термодинамических функций выделяет конкретную сплошную среду из множества всевозможных различных сред.' Различный физический смысл этих двух видов параметров заставляет по-разному трактовать как вариации этих параметров, так и уравнения, получаемые при варьировании этих параметров.

Следует отметить, что вопрос о принадлежности параметра к тому или иному виду в каждом конкретном случае должен решаться отдельно. Так, например, при построении моделей в рамках ньютоновской механики компоненты метрического тензора g_{ij} и свойства пространства (евклидовость) следует относить к физическим неварьируемым постоянным или известным функциям координат, в то время как при построении моделей в рамках общей теории относительности компоненты метрического тензора являются искомыми функциями и варьируются.

Вариации произвольного векторного или тензорного поля $\mu^{(A)}$ в ньютоновской механике и специальной теории относительности могут быть введены в предположении, что система координат наблюдателя x^i и лагранжева система координат ξ^a фиксированы. Далее для простоты будем полагать, что $\mu^{(A)}$ — вектор

$$(2.1)\qquad \mu = \mu^i(x^k)\,э_i(x^k) = \mu^{\hat{}a}(\xi^b)\,э_a{}^{\hat{}}(\xi^b)$$

Пусть μ' — произвольное векторное поле, мало отличающееся от векторного поля μ и имеющее компоненты $\mu^{i'}$ и $\mu^{\wedge a'}$ относительно тех же самых реперов $э_i$ и $э_a{}^{\wedge}$ в точке M. Частную вариацию $\partial\mu$ векторного поля μ в точке M определим как разность

$$(2.2)\qquad \partial\mu = \mu' - \mu$$

В соответствии с этим определением частные вариации компонент вектора μ также являются компонентами вектора, и для них справедливы формулы

$$(2.3)\qquad \partial\mu = \partial\mu^i э_i = \partial\mu_i э^i = \partial\mu^{\hat{}a} э_a{}^{\hat{}} = \partial\mu_a{}^{\hat{}} э^{\hat{}a}$$

$$\partial\mu^i = x_a{}^i \partial\mu^{\hat{}a}, \quad \partial\mu^i = g^{ij}\partial\mu_j, \quad \partial\mu_b{}^{\hat{}} = g_{\hat{a}b}\partial\mu^{\hat{}a}$$

Определяя частные вариации вектора, полагаем, что векторное поле μ' (а следовательно, и вариации $\partial\mu$) произвольны. Из этих произвольных вариаций в соответствии с дополнительными предположениями можно выделять частные вариации специального вида. Например, можно положить, что частные вариации компонент вектора μ^i являются вариациями компонент вектора при бесконечно малом преобразовании системы координат наблюдателя (см. п. 3) $\partial\mu^i = \delta_\eta\mu^i = \mu^s\nabla_s\,\delta\eta^i$.

Частные вариации тензора любого ранга с любым строением индексов можно ввести по формуле, аналогичной (2.2). При этом частная вариация тензора является тензором того же ранга с тем же строением индексов, компоненты которого преобразуются от системы координат x^i к системе ξ^a при помощи матриц $\| x_a{}^i \|$ и $\| \xi_i{}^a \|$. В частности, так как в ньютоновской механике и специальной теории относительности метрический тензор $G = g_{ij}\,э^iэ^j = g_{ab}{}^\wedge э^{\wedge a}э^{\wedge b}$ считается заданным, то $\partial g_{ij} = \partial g_{ab}{}^\wedge = 0$.

По определению частной вариации в силу принятого соглашения о том, что системы координат x^i и ξ^a фиксированы, символы частной вариации и оператор ковариантного дифференцирования перестановочны.

Вариация векторного поля μ в точке M с лагранжевыми координатами ξ^a, обусловленная вариацией закона движения, может быть определена как разность значений векторного поля в точках $x^{k\prime}$ (ξ^a) и x^k (ξ^a)

(2.4) $$\delta_x\mu = \mu\,(x^{k\prime}) - \mu\,(x^k)$$

Правая часть равенства (2.4) может быть записана в виде

(2.5) $$\delta_x\mu = \delta_x\mu^i э_i = \delta x^k\nabla_k\mu^i э_i$$

причем, вариации контравариантных и ковариантных компонент $\delta_x\mu_j$ и $\delta_x\mu^i$ связаны равенствами

$$\delta_x\mu^i = g^{ij}\delta_x\mu_j, \qquad \delta_x\mu_j = g_{ij}\delta_x\mu^i$$

т. е. жонглирование индексами осуществляется с помощью компонент метрического тензора g_{ij}.

Вариация тензора произвольного ранга с любым строением индексов при вариации закона движения может быть вычислена по формулам, аналогичным (2.5). Так, например, вариация тензора второго ранга

$$\delta_x T = \delta x^k\nabla_k T_{\cdot j}^{i\cdot}э_iэ^j \quad (T = T_{j\cdot}^{\cdot i}э_iэ^j)$$

Из последней формулы, в частности, следует, что вариации эйлеровых компонент метрического тензора при варьировании закона движения равны нулю

(2.6) $$\delta_x g_{ij} = \delta_x g^{ij} = 0$$

В общей теории относительности компоненты метрического тензора системы координат наблюдателя g_{ij} — искомые функции, характеризующие геометрию Риманова пространства, которые необходимо находить в результате решения конкретных задач и их следует относить к варьируемым параметрам типа $\mu^{(A)}$. При построении моделей в общей теории относительности частные вариации компонент метрического тензора g_{ij} отличны от нуля и произвольны. Используя равенства

$$\partial\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\,\partial g_{ij}, \quad \partial\,\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\partial x^l} = \frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\,\partial g_{ij}$$

для частных вариаций символов Кристоффеля и ковариантной производной тензора $\mu^{(A)}$, имеем [6]

$$\partial\Gamma_{ij}{}^{k} = \frac{1}{2}\left[g^{kn}(\delta_j{}^s\delta_i{}^q + \delta_i{}^s\delta_j{}^q) - g^{ks}\delta_i{}^n\delta_j{}^q\right]\nabla_s\partial g_{nq}$$

$$\partial\nabla_i\mu^B = \nabla_i\partial\mu^B + F^{Bj}_{Ck}\mu^C\partial\Gamma_{ij}{}^k$$

где B — собирательный индекс компонент тензора любого ранга $\mu^{(A)}$; через $F_{Cs}{}^{Bj}$ обозначена сумма произведений символов Кронекера вполне определенного вида. Например, для тензора второго ранга (при $B = mn$, $C = lr$) имеем

$$F^{Bj}_{Cs} = \delta_r{}^n\delta_s{}^m\delta_l{}^j + \delta_s{}^n\delta_l{}^m\delta_r{}^j$$

Принимая в качестве основного предположения, что при варьировании закона движения выполняется равенство

$$\delta_x(\mu^i\text{э}_i) = \delta_x(\mu^{\wedge a}\text{э}_a{}^\wedge) \tag{2.7}$$

т. е. вариация вектора μ, обусловленная варьированием закона движения, не зависит от того, какие координаты (эйлеровы или лагранжевы) считаются аргументами варьируемого вектора. Из равенства (2.7) с учетом формул (1.4) и (2.5) получаем выражения для вариаций лагранжевых компонент вектора

$$\delta_x\mu^{\wedge a} = \xi_i{}^a\delta x^k\nabla_k\mu^i - \xi_i{}^a\mu^k\nabla_k\delta x^i \tag{2.8}$$

Аналогично можно определить вариации лагранжевых компонент тензора любого ранга с произвольным строением индексов. Так, например, вариации лагранжевых компонент тензора второго ранга $\mathbf{T} = T_{.j}{}^{i\cdot}\text{э}_i\text{э}^j = T_{\cdot b}^{\wedge a\cdot}\text{э}_a{}^\wedge\text{э}^{\wedge b}$ выражаются через вариации закона движения по формулам

$$\delta_x T^{\wedge a\cdot}_{\cdot b} = \xi_k{}^a x_b{}^i\delta x^s\nabla_s T^{k\cdot}_{\cdot i} - \xi_i{}^a T^{\wedge c\cdot}_{\cdot b}\nabla_c{}^\wedge\delta x^i + \xi_i{}^c T^{\wedge a\cdot}_{\cdot c}\nabla_b{}^\wedge\delta x^i \tag{2.9}$$

где $\nabla_c{}^\wedge$ — оператор ковариантного дифференцирования в лагранжевой системе координат. Полученные формулы, в частности, позволяют получить выражения для вариаций величин $x_a{}^i$. Если у набора величин $x_a{}^i$ верхний индекс считать фиксированным, то набор величин $x_1{}^i$, $x_2{}^i$, $x_3{}^i$, $x_4{}^i$ можно рассматривать как лагранжевы компоненты вектора. Можно проверить, что вариации этих компонент будут вычисляться по формуле

$$\delta_x x_a{}^i = \nabla_a{}^\wedge\delta x^i = x_a{}^k\nabla_k\delta x^i$$

совпадающей с формулой (1.4).

Вариации лагранжевых компонент $\delta_x\mu^{\wedge a}$ и $\delta_x T_{\cdot b}^{\wedge a\cdot}$, пересчитанные к системе координат наблюдателя x^i по формулам преобразования компонент векторов и тензоров, имеют вид

$$\begin{aligned} x_a{}^i\delta_x\mu^{\wedge a} &= \delta x^k\nabla_k\mu^i - \mu^k\nabla_k\delta x^i \\ x_a{}^i\xi_k{}^b\delta_x T^{\wedge a\cdot}_{\cdot b} &= \delta x^s\nabla_s T^{i\cdot}_{\cdot k} - T^{s\cdot}_{\cdot k}\nabla_s\delta x^i + T^{i\cdot}_{\cdot s}\nabla_k\delta x^s \end{aligned} \tag{2.10}$$

Сумма частной вариации эйлеровых компонент вектора (или тензора) и вариации эйлеровых компонент вектора (тензора) за счет варьирования закона движения представляют собой полные вариации компонент вектора (тензора), которые для вектора и тензора второго ранга имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\mu^i &= \partial\mu^i + \delta x^k\nabla_k\mu^i \\ \delta T_{.j}{}^{i\cdot} &= \partial T_{.j}{}^{i\cdot} + \delta x^k\nabla_k T_{.j}{}^{i\cdot} \end{aligned} \tag{2.11}$$

а полные вариации лагранжевых компонент вычисляются по формулам

$$\delta_L \mu^{\wedge a} = \partial \mu^{\wedge a} + \delta_x \mu^{\wedge a}$$

(2.12)

$$\delta_L T^{\wedge a \cdot}_{\cdot b} = \partial T^{\wedge a \cdot}_{\cdot b} + \delta_x T^{\wedge a \cdot}_{\cdot b}$$

В соответствии с этими формулами можно считать, что частные вариации определяются при постоянных эйлеровых координатах, а полные вариации — при постоянных лагранжевых координатах (и варьируемом законе движения).

Учитывая, что частные вариации компонент векторов и тензоров преобразуются при переходе от системы координат ξ^a к системе x^i по обычным формулам преобразования,[1] формулы (2.12) можно записать в виде

$$x_a{}^i \delta_L \mu^{\wedge a} = \partial \mu^i + \delta x^k \nabla_k \mu^i - \mu^k \nabla_k \delta x^i$$

(2.13)

$$x_a{}^i \xi_k{}^b \delta_L T^{\wedge a \cdot}_{\cdot b} = \partial T^{i \cdot}_{\cdot k} + \delta x^s \nabla_s T^{i \cdot}_{\cdot k} - T^{s \cdot}_{\cdot k} \nabla_s \delta x^i + T^{i \cdot}_{\cdot s} \nabla_k \delta x^s$$

Выражения, стоящие в правой части формул (2.13), обычно обозначаются $\delta_L \mu^i$ и $\delta_L T_{\cdot k}{}^{i \cdot}$ и представляют собой вариации компонент вектора и тензора второго ранга, введенные в лагранжевой системе координат и пересчитанные на систему координат наблюдателя (эти вариации также называют абсолютными вариациями).

Формулы для вариаций лагранжевых компонент метрического тензора следуют из формул (2.12) и имеют вид

$$\delta_L g_{\hat a \hat b} = \delta_x g_{\hat a \hat b} = \xi_i{}^c g_{\hat c \hat b} \nabla_a{}^{\wedge} \delta x^i + \xi_i{}^c g_{\hat a \hat c} \nabla_b{}^{\wedge} \delta x^i$$

$$\delta_L g^{\wedge ab} = \delta_x g^{\wedge ab} = -\xi_i{}^a g^{\wedge cb} \nabla_c{}^{\wedge} \delta x^i - \xi_i{}^b g^{\wedge ac} \nabla_c{}^{\wedge} \delta x^i$$

а абсолютные вариации лагранжевых компонент метрического тензора, преобразованные к системе координат наблюдателя, имеют вид

$$\xi_i{}^a \xi_j{}^b \delta_L g_{\hat a \hat b} = g_{is} \nabla_j \delta x^s + g_{sj} \nabla_i \delta x^s$$

$$x_a{}^i x_b{}^j \delta_L g^{\wedge ab} = -g^{is} \nabla_s \delta x^j - g^{sj} \nabla_s \delta x^i$$

Из формул (2.11) и (2.13) следует, что полные вариации компонент вектора μ, введенные относительно систем координат x^i и ξ^a, уже не связаны между собой обычными формулами перехода от одной системы координат к другой

$$\delta \mu^i \neq x_a{}^i \delta_L \mu^{\wedge a}$$

Это обусловлено тем, что при варьировании закона движения базисные векторы лагранжевой системы координат ξ^a различны для варьированного и действительного законов движения.

В согласии с данными выше определениями частной вариации тензора и вариации, обусловленной законом движения, для действительных движений и процессов частные вариации обращаются в нуль, а полные вариации компонент тензоров переходят в действительные приращения компонент относительно систем координат x^i и ξ^a. Так, например, для действительных приращений эйлеровых компонент тензора второго ранга имеем

$$dT_{\cdot j}{}^{i \cdot} = u^k \nabla_k T_{\cdot j}{}^{i \cdot} d\xi^4$$

а для приращений лагранжевых компонент, пересчитанных к системе координат x^i

$$d_L T^{i \cdot}_{\cdot j} = u^k \nabla_k T^{i \cdot}_{\cdot j}\, d\xi^4 - T^{k \cdot}_{\cdot j} \nabla_k u^i\, d\xi^4 + T^{i \cdot}_{\cdot k} \nabla_j u^k\, d\xi^4$$

Здесь u^i — компоненты безразмерного вектора 4-скорости.

Вариации скалярных, векторных или тензорных параметров $\mathbf{K}^{(B)} = \mathbf{K} = {}^{(B)}(x^i) = \mathbf{K}^{(B)}(\xi^a)$, задающих геометрические или физические свойства сплошной среды, определяются следующими формулами:

$$\partial K^A = \partial K^{\wedge C} = 0$$

$$\delta K^A = \delta x^i \nabla_i K^A, \quad \delta_L K^{\wedge C} = K^A \delta_x \xi_A{}^C + \xi_A{}^C \delta x^i \nabla_i K^A$$

Здесь A и C — собирательные обозначения тензорных индексов $A = ijk\ldots$, $C = abc\ldots$, K^A и $K^{\wedge C}$ — соответственно эйлеровы и лагранжевы компоненты тензора $\mathbf{K}^{(B)}$; через $\xi_A{}^C$ обозначены произведения вида $\xi^i{}_a \xi_j{}^b \xi_k{}^c \ldots$

Более подробный разбор различных видов вариаций параметров $\mathbf{K}^{(B)}$ приведен в работе [6].

3. Вариации векторов и тензоров при преобразовании системы наблюдателя. Пусть M_0 — фиксированная точка, имеющая лагранжевы координаты $\xi_0{}^a$, $y_0{}^i$ и $x_0{}^i$ — координаты точки M_0 в системах координат y^i и x^i, соответствующих двум различным системам отсчета, связанных бесконечно малым преобразованием

(3.1) $$y^i = x^i + \delta\eta^i(x^k)$$

Тетрады базисных векторов $э_i(x^k)$ и $э_i{}'(y^k)$ систем координат x^i и y^i связаны с тетрадой лагранжевой системы координат в точке M_0 равенствами

$$э^i(x^k) = x_a{}^i э^{\wedge a}(\xi_0{}^b), \quad э^{i'}(y^k) = y_a{}^i э^{\wedge a}(\xi_0{}^b)$$

При бесконечно малом преобразовании координат (3.1) векторы $э^{i'}(y^k)$ переходят в векторы $э^i(x^k)$ в результате последовательного выполнения двух операций — параллельного переноса из точки $x_0{}^i + \delta\eta^i(x_0{}^k)$ в точку $x_0{}^i$ и преобразования координат в точке $x_0{}^i$:

$$э^{i'}(y^k) = э^i(x^k) + \nabla_s \delta\eta^i э^s(x^k)$$

Разность

(3.2) $$\delta_\eta э^i = э^{i'}(y^k) - э^i(x^k) = \nabla_s \delta\eta^i э^s(x^k)$$

представляет собой вариацию векторов системы координат наблюдателя при бесконечно малом преобразовании (3.1).

Вариации элементов матрицы преобразования $x_a{}^i$ при преобразовании (3.1) можно ввести, используя равенство $\delta_\eta э^i = \delta_\eta(x_a{}^i э^{\wedge a})$ и учитывая, что при преобразовании координат (3.1) векторы лагранжевого репера не меняются

(3.3) $$\delta_\eta x_a{}^i = x_a{}^s \nabla_s \delta\eta^i$$

Выражение для вариаций векторов $э_k$ при преобразовании (3.1) может быть получено из равенств $э^i э_k = \delta_k{}^i$ и имеет вид

(3.4) $$\delta_\eta э_k = -\nabla_k \delta\eta^i э_i$$

Так как тензор есть инвариантный объект относительно преобразования (3.1)

$$\delta_\eta(T^{A\cdot}_{\cdot B} э_A э^B) = 0$$

(A и B — собирательные обозначения ковариантных и контравариантных тензорных индексов, а через $э_A$ и $э^B$ обозначены полиадные произведения $э_i э_j э_k\ldots$ и $э^m э^n э^s\ldots$ соответственно), то на основании формул (3.2) из равенства

(3.5) $$э_A э^B \delta_\eta T^{A\cdot}_{\cdot B} = -T^{A\cdot}_{\cdot B} \delta_\eta(э_A э^B)$$

можно получить выражения для вариации компонент тензора при преобразовании (3.1). Так, например, для вариаций компонент метрического тензора g^{ij} и g_{ij} справедливы формулы

$$\delta_\eta g^{ij} = g^{kj}\nabla_k\delta\eta^i + g^{ik}\nabla_k\delta\eta^j$$

$$\delta_\eta g_{ij} = - g_{kj}\nabla_i\delta\eta^k - g_{ik}\nabla_j\delta\eta^k$$

Так как при преобразовании координат (3.1) вектор ковариантного дифференцирования $\mathfrak{э}^i\nabla_i$ есть инвариант, то выражения для вариаций $\delta_\eta\nabla_i$ также могут быть получены из формулы (3.5). В частности

$$\delta_\eta\nabla_i T^{j\cdot}_{\cdot k} = -\nabla_s T^{j\cdot}_{\cdot k}\nabla_i\delta\eta^s + \nabla_i T^{s\cdot}_{\cdot k}\nabla_s\delta\eta^j - \nabla_i T^{j\cdot}_{\cdot s}\nabla_k\delta\eta^s$$

При преобразовании координат (3.1) варьирование тензоров типа $\mu^{(A)}$ и типа $K^{(B)}$ производится по одним и тем же формулам, следующим из равенства (3.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5, с. 121—180.
2. *Бердичевский В. Л., Седов Л. И.* Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, с. 981—1000.
3. *Желнорович В. А.* Вариационный принцип и уравнения состояния для сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 1, с. 55—58.
4. *Черный Л. Т.* Построение моделей магнитоупругих сплошных сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций.— Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 31, с. 100—119.
5. *Седов Л. И., Цыпкин А. Г.* О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 387—400.
6. *Седов Л. И.* Применение базисного вариационного уравнения для построения моделей сплошных сред.— В кн.: Избранные вопросы современной механики. Ч. 1. М.: МГУ, 1981, с. 11—64.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1983