Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 62–50

# СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ

**Гичев Т. Р.**

Исследуется задача оптимального управления с линейным законом движения и выпуклым критерием качества. Перед производными одной части неизвестных в законе движения находится малый положительный параметр. При некоторых отличных от встречающихся в литературе предположениях изучается поведение оптимального решения при стремлении малого параметра к нулю.

1. Управляемые объекты с законом движения

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{\cdot} = A_{11}(t)\,\mathbf{x} + A_{12}(t)\,\mathbf{y} + B_1(t)\,\mathbf{u} \\ &\lambda\mathbf{y}^{\cdot} = A_{21}(t)\,\mathbf{x} + A_{22}(t)\,\mathbf{y} + B_2(t)\,\mathbf{u}; \quad \lambda \in (0,\ \Lambda_0),\ \ \Lambda_0 > 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

принято называть сингулярно возмущенными [1, 2]. Предполагается, что отрезок времени $[t_0,\ T]$ фиксирован, фазовые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат соответственно пространствам $R^n$ и $R^m$, управляющий параметр $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $R^r$, $A_{ij}(t)$ и $B_i(t)$, $(i,\ j = 1,\ 2)$ — непрерывные на отрезке $[t_0,\ T]$ матрицы соответствующей размерности.

Изучению поведения решения различных задач оптимального управления объектом с законом движения (1.1), когда $\lambda \to 0$, посвящено большое количество работ (например, [3] и обзоры [1, 2]).

Но основным предположением в этих исследованиях является требование отрицательности действительных частей характеристических чисел матрицы $A_{22}$. Случай, когда эти характеристические числа имеют как положительные, так и отрицательные действительные части, рассматривался в [4]. Ниже допускается обращение в нуль действительных частей характеристических чисел матрицы $A_{22}$ в одной точке $\theta_0$ интервала $(t_0,\ T)$. Без особых затруднений результаты переносятся и на случай, когда эти действительные части принимают нулевое значение в конечном числе точек интервала $(t_0,\ T)$. Рассматривается случай, когда действительные части неположительны, но аналогичные результаты справедливы также и в случае, когда характеристические числа матрицы $A_{22}$ могут иметь неположительные и неотрицательные действительные части. Как пример задачи оптимального управления рассматривается задача с фиксированным правым концом.

2. Сначала изучим некоторые свойства нормированной при $t = \tau$ фундаментальной матрицы $Y(t,\ \tau,\ \lambda)$, $\tau \leqslant t$ уравнения

$$\lambda\mathbf{y}^{\cdot} = A_{22}(t)\,\mathbf{y} \tag{2.1}$$

Пусть $\operatorname{Re}\gamma[A_{22}]$ — действительная часть любого характеристического числа $\gamma[A_{22}]$ матрицы $A_{22}$. Перечислим предположения, которые предполагаются выполненными при изучении свойств фундаментальной матрицы $Y(t,\ \tau,\ \lambda)$.

А1. Существуют точки $\theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2$, $t_0 < \theta_1 < \theta_0 < \theta_2 < T$ и непрерывная функция $\sigma(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, которая линейна на каждом из отрезков

$[t_0, \theta_1]$, $[\theta_1, \theta_0]$, $[\theta_0, \theta_2]$, $[\theta_2, T]$ и $\sigma(t) > 0$, когда $t \neq \theta_0$, такие, что

$$\operatorname{Re} \gamma [A_{22}(t)] \leqslant -2\sigma(t)$$

и при некоторой постоянной $\gamma_1 > 0$

$$\| \exp (A_{22}(t)\tau) \| \leqslant \gamma_1 \exp(-2\sigma(t)\tau), \quad \forall t \in [\theta_1, \theta_2], \ \tau \geqslant 0$$

A2. Если $[\tau_1, \tau_2]$ — любой из отрезков $[\theta_1, \theta_0]$, $[\theta_0, \theta_2]$ и на этом отрезке $\sigma(t) = at + b$, то

$$\| A_{22}(t_1) - A_{22}(t_2) \| \leqslant \gamma_0 \mid t_1 - t_2 \mid, \quad \forall t_1, \ t_2 \in [\tau_1, \tau_2];$$
$$\gamma_0 \in (0, \ 3 \mid a \mid / \gamma_1)$$

*Лемма* 1. Пусть $[\tau_1, \tau_2]$ — любой из отрезков $[\theta_1, \theta_0]$, $[\theta_0, \theta_2]$ и выполняются предположения A1 и A2. Тогда существует такая постоянная $c_0 > 0$, что при всех $\tau$ и $t$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \tau_2$ имеет место неравенство

$$\| Y(t, \tau, \lambda) \| \leqslant c_0 \exp(-(\sigma(t) + \sigma(\tau))(t-\tau)/(2\lambda)) \tag{2.2}$$

*Доказательство.* Пусть на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ функция $\sigma(t) = at + b$. При $\theta \in [\tau_1, \tau_2]$ из уравнения (2.1) следует, что

$$\lambda dY(t, \tau, \lambda)/dt = A_{22}(\theta)\, Y(t, \tau, \lambda) + [A_{22}(t) - A_{22}(\theta)]\, Y(t, \tau, \lambda)$$

поэтому

$$Y(t, \tau, \lambda) = \exp\left(A_{22}(\theta)\frac{t-\tau}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\int_\tau^t \exp\left(A_{22}(\theta)\frac{t-s}{\lambda}\right) \times \tag{2.3}$$
$$\times [A_{22}(s) - A_{22}(\theta)]\, Y(s, \tau, \lambda)\, ds$$

Сначала рассмотрим случай, когда функция $\sigma(t)$ убывает на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ и $a < 0$. Пусть $\tau$ — фиксированная точка отрезка $[\tau_1, \tau_2]$ и введены обозначения

$$w_1(t, \tau, \lambda) = \| Y(t, \tau, \lambda) \|\, Z_1(t, \tau, \lambda)$$
$$Z_1(t, \tau, \lambda) = \exp\left((3\sigma(t) + \sigma(\tau))\frac{t-\tau}{2\lambda}\right), \quad M_1^\lambda = \max_{\tau_1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \tau_2} w_1(t, \tau, \lambda)$$

Если при $\theta = \tau$ обе стороны равенства (2.3) умножим на $Z_1(t, \tau, \lambda)$, то для $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \tau_2$ получим

$$w_1(t, \tau, \lambda) \leqslant M_1^\lambda \leqslant \gamma_1 (1 - \gamma_0\gamma_1/(3 \mid a \mid))^{-1}$$

откуда следует неравенство (2.2) при $c_0 = \gamma_1(1 - \gamma_0\gamma_1/(3 \mid a \mid))^{-1}$.

В случае, когда функция $\sigma(t) = at + b$ возрастает на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ и $a > 0$, вводятся обозначения

$$w_2(t, \tau, \lambda) = \| Y(t, \tau, \lambda) \|\, Z_2(t, \tau, \lambda)$$
$$Z_2(t, \tau, \lambda) = \exp\left((\sigma(t) + 3\sigma(\tau))\frac{t-\tau}{2\lambda}\right), \quad M_2^\tau = \max_{\tau_1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \tau_2} w_2(t, \tau, \lambda)$$

Тогда рассматривается уравнение

$$\lambda dY(t, \tau, \lambda)/d\tau = -Y(t, \tau, \lambda)\, A_{22}(\tau)$$

откуда, как и выше, получается неравенство (2.2) при том же значении $c_0$.

*Лемма* 2. Пусть выполняются предположения A1 и A2. Тогда существует такая постоянная $c_1 > 0$, что при всех достаточно малых $\lambda > 0$, если $[\tau_1, \tau_2]$ — любой из отрезков $[t_0, \theta_1]$, $[\theta_1, \theta_0]$, $[\theta_0, \theta_2]$, $[\theta_2, T]$, то

$$V_\tau^{\tau_2} \leqslant c_1, \quad V_{\tau_1}^{t} \leqslant c_1, \quad \forall \tau, \ t \in [\tau_1, \tau_2]$$

где $V_\tau^{\tau_2}$, $V_{\tau_1}^{t}$ — полное изменение $Y(t, \tau, \lambda)$ по $t$ на отрезке $[\tau, \tau_2]$ и по $\tau$ на отрезке $[\tau_1, t]$ соответственно.

*Доказательство.* Из предположения A1 на отрезках $[t_0, \theta_0]$ и $[\theta_2, T]$ следует [5]

$$\| Y(t, \tau, \lambda) \| \leqslant c_0 \exp(-\sigma(t)(t-\tau)/\lambda)$$

где $c_0$ — некоторая постоянная. Для этих отрезков доказательство леммы содержится, например, в [6].

Далее рассмотрим отрезок $[\theta_1, \theta_0]$. Равномерная ограниченность $V_\tau^{\theta_0}$ по $\tau \in [\theta_1, \theta_0]$ и $V_{\theta_1}{}^t$ по $t \in [\theta_1, \theta_0]$ получается из ограниченности полного изменения двух слагаемых в правой части равенства (2.3) при $\theta = \theta_1$. Для первого слагаемого это следует из упомянутых результатов в [6], а для второго — из леммы 1.

На отрезке $[\theta_0, \theta_2]$ рассматривается равенство (2.3) при $\theta = \theta_2$. Далее проводятся рассуждения, аналогичные рассуждениям в первом случае. Этим и кончается доказательство леммы.

**3.** Изучим некоторые свойства решения $(x_\lambda, y_\lambda)$ задачи

$$
\begin{aligned}
&(3.1)\qquad x' = A_{11}(t)\,x + A_{12}(t)\,y + f(t, \lambda), \quad x(t_0) = v_0(\lambda)\\
&\qquad\qquad \lambda y' = A_{21}(t)\,x + A_{22}(t)\,y + g(t, \lambda), \quad y(t_0) = w_0(\lambda)
\end{aligned}
$$

на отрезке $[t_0, T]$ при $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Предполагается, что матрица $A_{22}{}^{-1}(t)$ существует всюду на отрезке $[t_0, T]$. Через $x_0$ обозначим решение задачи

$$
\begin{aligned}
&(3.2)\qquad x' = A_0(t)\,x + f(t, 0) - A_{12}(t)\,A_{22}^{-1}(t)\,g(t, 0);\\
&\qquad\qquad A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\\
&\qquad\qquad x(t_0) = v_0(0) - A_{12}(t_0)\,A_{22}{}^{-1}(t_0)\,w_0
\end{aligned}
$$

Пусть $X(t, \tau)$ — нормированная при $t = \tau$ фундаментальная матрица уравнения $x' = A_{11}(t)\,x$ и $y_0(t) = -A_{22}{}^{-1}(t)(A_{21}(t)\,x_0(t) + g(t, 0))$.

*Теорема* 1. Пусть выполняются предположения A1 и A2. Пусть, далее, при $\lambda \in [0, \Lambda_0)$ функции $f(\cdot, \lambda) \in L_p{}^{(n)}[t_0, T]$, $g(\cdot, \lambda) \in L_p{}^{(m)}[t_0, T]$, $p > 1$; множество функций $f(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ ограничено в $L_p{}^{(n)}[t_0, T]$, множества точек $v_0(\lambda)$ и $\lambda w_0(\lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ ограничены соответственно в $R^n$ и $R^m$. Тогда

1°. Если множество функций $g(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ ограничено в $L_p{}^{(m)}[t_0, T]$, то существует такая постоянная $c_2 > 0$, что для всех достаточно малых $\lambda > 0$

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \| x_\lambda(t) \| \leqslant c_2$$

Если множество функций $g(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ равномерно ограничено, то для любой точки $\tau_0 \in (t_0, T)$ существует такая постоянная $c_3 > 0$, что для всех достаточно малых $\lambda > 0$

$$(3.3)\qquad \max_{\tau_0 \leqslant t \leqslant T} \| y_\lambda(t) \| \leqslant c_3$$

Если и множество точек $w_0(\lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ ограничено, то неравенство (3.3) имеет место и для $\tau_0 = t_0$.

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность чисел $\lambda_k > 0$, для которой $\lim \lambda_k = 0$ при $k \to \infty$, последовательность $\{f(\cdot, \lambda_k)\}_1^\infty$ сходится слабо в $L_p{}^{(n)}[t_0, T]$ к $f(\cdot, 0)$, а последовательность $\{g(\cdot, \lambda_k)\}_1^\infty$ сходится слабо в $L_p{}^{(m)}[t_0, T]$ к $g(\cdot, 0)$, $\lim v_0(\lambda) = v_0(0)$ и $\lim \lambda_k w_0(\lambda_k) = w_0$ при $k \to \infty$, то для любой точки $\tau_0 \in (t_0, T)$

$$\lim_{k \to \infty} \max_{\tau_0 \leqslant t \leqslant T} \| x_{\lambda_k}(t) - x_0(t) \| = 0,$$

причем если $\| w_0 \| = 0$, то последнее равенство справедливо и для $\tau_0 = t_0$.

3°. При предположениях из 2°, если функции $g(\cdot, \lambda_k)(k = 1, 2, \ldots)$ непрерывные и последовательность $\{g(\cdot, \lambda_k)\}_1^\infty$ сходится равномерно на отрезке $[t_0, T]$ к $g(\cdot, 0)$, то почти всюду на отрезке $[t_0, T]$ последовательность $\{y_{\lambda_k}(t)\}_1^\infty$ сходится к $y_0(t)$.

Доказательство утверждений всех трех частей теоремы на отрезке $[t_0, \theta_1]$ следует из теоремы 2.1 и теоремы 2.2 [4].

Далее рассматривается отрезок $[\theta_1, \theta_0]$. Введем в рассмотрение функции

$$\mathbf{v}_1(t,\lambda) = X(t,\theta_1)(\mathbf{x}_\lambda(\theta_1) - \mathbf{x}_0(\theta_1)) + \int_{\theta_1}^{t} X(t,\tau)(\mathbf{f}(\tau,\lambda) - \mathbf{f}(\tau,0))\,d\tau +$$
$$+ \int_{\theta_1}^{t} X(t,\tau) A_{12}(\tau) Y(\tau,\theta_1,\lambda)\,\mathbf{y}_\lambda(\theta_1)\,d\tau -$$
$$- \left[\frac{1}{\lambda}\int_{\theta_1}^{t} X(t,\tau) A_{12}(\tau) \int_{\theta_1}^{\tau} Y(\tau,s,\lambda) A_{22}(s)\,\mathbf{y}_0(s)\,ds d\tau +\right.$$
$$\left. + \int_{\theta_1}^{t} X(t,\tau) A_{12}(\tau)\,\mathbf{y}_0(\tau)\,d\tau\right] + \frac{1}{\lambda}\int_{\theta_1}^{t} X(t,\tau) A_{12}(\tau) \times$$
$$\times \int_{\theta_1}^{\tau} Y(\tau,s,\lambda)(\mathbf{g}(s,\lambda) - \mathbf{g}(s,0))\,ds d\tau$$

Так как $\lim \lambda \,\|\mathbf{y}_\lambda(\theta_1)\| = 0$ при $\lambda \to 0$, то равномерная ограниченность множества функций $\mathbf{v}_1(\cdot, \lambda)$ для всех достаточно малых $\lambda > 0$ в предположениях 1° проверяются непосредственно, причем для последних трех слагаемых используются свойства интеграла Стилтьеса и лемма 2.

Согласно (3.1) и (3.2)

$$\|\mathbf{x}_\lambda(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \leqslant \max_{\theta_1 \leqslant \tau \leqslant \theta_0} \|\mathbf{v}_1(\tau,\lambda)\| +$$
$$+ \left\| \frac{1}{\lambda}\int_{\theta_1}^{t} X(t,\tau) A_{12}(\tau) \int_{\theta_1}^{\tau} Y(\tau,s,\lambda) A_{21}(s)(\mathbf{x}_\lambda(s) - \mathbf{x}_0(s))\,ds d\tau \right\|$$

Тогда, меняя порядок интегрирования и применяя неравенство Гронуолла, получаем

(3.4) $$\|\mathbf{x}_\lambda(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\theta_1 \leqslant \tau \leqslant \theta_0} \|\mathbf{v}_1(\tau,\lambda)\| \exp\Big(\max_{\theta_1 \leqslant s \leqslant z \leqslant \theta_0} \Big\| \int_{s}^{z} X(t,\tau) A_{12}(\tau) A_{22}^{-1} dY(\tau,s,\lambda) \Big\| \times$$
$$\times \int_{\theta_1}^{t} \|A_{21}(s)\|\,ds\Big)$$

Следовательно, в силу предположений 1° множество функций $\mathbf{x}_\lambda$ равномерно ограничено для всех достаточно малых $\lambda > 0$. При тех же предположениях имеем

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \,\|\mathbf{y}_\lambda(\theta_0)\| \leqslant$$
$$+ \lim_{\lambda \to 0} \|\lambda Y(\theta_0,\theta_1,\lambda)\,\mathbf{y}_\lambda(\theta_1)\| + \left\| \int_{\theta_1}^{\theta_0} Y(\theta_0,\tau,\lambda) A_{21}(\tau)\,\mathbf{x}_\lambda(\tau)\,d\tau \right\| +$$
$$+ \left(\int_{\theta_1}^{\theta_0} \|Y(\theta_0,\tau,\lambda)\|^q d\tau\right)^{1/q} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_0} \|\mathbf{g}(r,\lambda_k)\|^p d\tau\right)^{1/p} = 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

При равномерной ограниченности множества функций $\mathbf{g}(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ из равенства

(3.5) $$\mathbf{y}_\lambda(t) = Y(t,\theta_1,\lambda)\,\mathbf{y}_\lambda(\theta_1) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\int_{\theta_1}^{t} Y(t,\tau,\lambda) A_{21}(\tau)\,\mathbf{x}_\lambda(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int_{\theta_1}^{t} Y(t,\tau,\lambda)\,\mathbf{g}(\tau,\lambda)\,d\tau$$

следует равномерная ограниченность множества функций $\mathbf{y}_\lambda$ для всех достаточно малых $\lambda > 0$.

В предположениях 2° последовательность $\{\mathbf{v}_1(\cdot, \lambda_k)\}_1^\infty$ сходится равномерно на отрезке $[\theta_1, \theta_0]$ к нулю, и тогда из (3.4) следует равномерная сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_{\lambda_k}\}_1^\infty$ к $\mathbf{x}_0$. Сходимость последовательности $\{\mathbf{y}_{\lambda_k}\}_1^\infty$ для всех $t \in (\theta_1, \theta_0]$ в предположениях 3° получается из (3.5) с использованием лемм 1, 2 и свойств интеграла Стилтьеса.

Вводя в рассмотрение на отрезке $[\theta_0, \theta_2]$ функции $\mathbf{v}_2(t, \lambda)$, получающиеся из функций $\mathbf{v}_1(t, \lambda)$ заменой $\theta_1$ на $\theta_0$, аналогичным образом, как и выше, докажем, что при соответствующих условиях в предположении 1° для всех достаточно малых $\lambda > 0$ множество функций $\mathbf{x}_\lambda$ равномерно ограничено, $\lim \lambda \| \mathbf{y}_\lambda(\theta_2) \| = 0$ при $\lambda \to 0$ и множество функций $\mathbf{y}_\lambda$ равномерно ограничено. Аналогично проводится и доказательство равномерной на отрезке $[\theta_0, \theta_2]$ сходимости последовательности $\{\mathbf{x}_{\lambda_k}\}_1^\infty$ к $x_0$ и сходимости последовательности $\{\mathbf{y}_{\lambda_k}(t)\}_1^\infty$ к $\mathbf{y}_0(t)$ для всех $t \in (\theta_0, \theta_2]$. Доказательство теоремы завершается применением теорем 2.1 и 2.2 из [4] на отрезке $[\theta_2, T]$.

4. Изучим некоторые свойства управляемого объекта с законом движения (1.1). Доказательства всех приводимых ниже утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений в [4] и проводятся по той же схеме с той разницей, конечно, что здесь используется теорема 1.

Пусть $f^0(t, \mathbf{x})$ — непрерывная на множестве $[t_0, T] \times R^n$ скалярная функция, выпуклая по $\mathbf{x}$ при любом фиксированном значении $t \in [t_0, T]$, $f^0(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$ и существуют непрерывные частные производные $\partial f^0(t, \mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$. Пусть $h(t, \mathbf{u})$ — непрерывная на множестве $[t_0, T] \times R^r$ скалярная функция, строго выпуклая по $\mathbf{u}$ при фиксированном $t \in [t_0, T]$ и для некоторых постоянных $a_0 > 0$, $p > 1$ выполняется неравенство $h(t, \mathbf{u}) \geqslant a_0 \| \mathbf{u} \|^p$. Допустимыми управлениями при $\lambda \in [0, \Lambda_0)$ являются все $r$-мерные функции $\mathbf{u} \in L_p^{(r)}[t_0, T]$, для которых функционал

$$I(\mathbf{u}, \lambda) = \int_{t_0}^{T} \{f^0(t, \mathbf{x}(t)) + h(t, \mathbf{u}(t))\}\, dt \tag{4.1}$$

принимает конечное значение, где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — соответствующее управлению $\mathbf{u}$ решение системы (1.1).

Перечислим предположения, при которых в дальнейшем проводятся исследования.

В1. Имеет место равенство

$$\operatorname{rank} [B_2(T)\, A_{22}(T)\, B_2(T) \; . \; . \; . \; A_{22}^{m-1}(T)\, B_2(T)] = m$$

В2. Объект с законом движения

$$\mathbf{x}^\cdot = A_0(t)\, \mathbf{x} + (B_1(t) - A_{12}(t)\, A_{22}^{-1}(t)\, B_2(t))\, \mathbf{u} \tag{4.2}$$

вполне управляемый на отрезке $[t_0, T]$.

Сначала сформулируем лемму, которая многократно используется в доказательствах следующих теорем.

*Лемма 3.* Пусть выполняются предположения А1, А2 и В1. Пусть, далее, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность чисел $\lambda_k > 0$, $\lim \lambda_k = 0$ при $k \to \infty$; $\mathbf{w}_0 \in \mathrm{R}^m$, $\mathbf{w}_T \in R^m$; $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ — непрерывное управление с соответствующим решением $\mathbf{x}^*$ уравнения (4.2). Тогда существует такая последовательность $\{\mathbf{u}_k^*\}_1^\infty$ $r$-мерных функций $\mathbf{u}_k^*$ с соответствующим при $\lambda = \lambda_k$ решением $(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*)$ системы (1.1), что

1°. Последовательности $\{\mathbf{u}^*_k\}_1^\infty$, $\{\mathbf{x}_k^*\}_1^\infty$, $\{\mathbf{y}_k^*\}_1^\infty$ равномерно ограничены на отрезке $[t_0, T]$ и для каждой точки $t \in (t_0, T)$, $t \neq \theta_0$, сходятся соответственно к $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^* = -A_{22}^{-1}(A_{21}\mathbf{x}^* + B_2\mathbf{u}^*)$.

2°. Имеют место равенства

$$\mathbf{x}_k^*(t_0)=\mathbf{x}^*(t_0),\ \lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k^*(T)=\mathbf{x}^*(T),\quad \mathbf{y}_k^*(t_0)=\mathbf{w}_0,\ \mathbf{y}_k^*(T)=\mathbf{w}_T$$

$$\lim_{k\to\infty} I(\mathbf{u}_k^*,\lambda_k)=I(\mathbf{u}^*,0)$$

Если еще выполняется и предположение B2, то последовательность $\{\mathbf{u}_k^*\}_1^\infty$ можно выбрать так, чтобы выполнялось и равенство $\mathbf{x}_k^*(T) = \mathbf{x}^*(T)$.

*Теорема 2*. Пусть выполняются предположения A1, A2, B1 и B2. Тогда для всех достаточно малых $\lambda > 0$ объект с законом движения (1.1) вполне управляемый на отрезке $[t_0, T]$.

Пусть через $P_\lambda$, $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ обозначена задача оптимального управления объектом с законом движения (1.1), состоящая в отыскании допустимого управления $\mathbf{u}$, которое переводит объект из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{w}_0$ в конечное $\mathbf{x}(T) = \mathbf{v}_T$, $\mathbf{y}(T) = \mathbf{w}_T$ при минимальном значении критерия (4.1). Оптимальное управление, соответствующее ему решение системы (1.1) и оптимальное значение критерия (4.1) для задачи $P_\lambda$ обозначим соответственно через $\mathbf{u}_\lambda$, $(\varkappa_\lambda, \mathbf{y}_\lambda)$, $I_\lambda$. Через $P_0$ обозначим задачу оптимального управления, которая состоит в отыскании такого допустимого управления $\mathbf{u}$ с соответствующим решением $\mathbf{x}$ уравнения (4.2), что $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{x}(T) = \mathbf{v}_T$ и критерий (4.1) принимает минимальное значение. Пусть $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{x}_0$, $I_0$ — решение этой задачи и $\mathbf{y}_0 = -A_{22}^{-1}(A_{21}\mathbf{x}_0 + B_2\mathbf{u}_0)$.

*Теорема 3*. Пусть выполняются предположения A1, A2, B1 и B2. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и любых четырех точек $\tau_0^0$, $\tau_1^0$, $\tau_2^0$, $\tau_3^0$, для которых

$$t_0<\tau_0^\circ<\theta_1<\tau_1^\circ<\theta_0<\tau_2^\circ<\theta_2<\tau_3^\circ<T$$

существует такое число $\delta > 0$, что если $\lambda \in (0, \delta)$, то

$$|I_\lambda - I_0| + \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{x}_\lambda(t)-\mathbf{x}_0(t)\| + \max_{t_0\leqslant t\leqslant \tau_3^\circ}\|\mathbf{u}_\lambda(t)-\mathbf{u}_0(t)\| +$$
$$+ \max_{t\in[\tau_0^\circ,\,\tau_3^\circ]\setminus[\tau_1^\circ,\,\tau_2^\circ]}\|\mathbf{y}_\lambda(t)-\mathbf{y}_0(t)\| < \varepsilon$$

Отметим, что, используя утверждения пп. 2, 3, можно распространить сформулированные в теоремах 2 и 3 результаты на случай, когда характеристические числа матрицы $A_{22}$ в (1.1) имеют действительные части, меняющие знак в одной точке интервала $(t_0, T)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Vasil'eva A. B., Dmitriev M. G.* Singular perturbations and some optimal control problems.— In: Proc. 7th Trennial World IFAC Congress, Helsinki, Finland: Pergamon Press, 1978, v. 2, p. 963—968.
2. *Kokotovic P., O'Malley R. E. Jr., Sannuti P.* Singular perturbations and order reduction in control theory.— Automatica, 1976, v. 12, No. 2, p. 123—132.
3. *Dontchev A. L., Gičev T. R.* Convex singularly perturbed optimal control problem with fixed final state. Controllability and convergence.— Optimization, 1979, v. 10, No. 3, p. 345—355.
4. *Гичев Т. Р.* Сингулярные возмущения в задаче оптимального управления с выпуклым интегральным критерием — условно устойчивый случай.— Сердика Българско матем. списание, 1981, т. 7, № 4, с. 306—319.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. *Гичев Т. Р.* Оптимално управление. Ч. 1. София: Изд-во СУ Кл. Охридски, 1980. 148 с.



София



Поступила в редакцию
15.VII.1983