Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 62—50

# К ВОПРОСУ ОБ ОКОНЧАНИИ ИГРЫ ЗА ПЕРВЫЙ МОМЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ

Ухоботов В. И.

**Приводятся достаточные условия, при выполнении которых возможно окончание игры за первый момент поглощения [1]. Выполнение этих условий обеспечивает окончание итерационной процедуры [2] при помощи оператора программного поглощения на первом шаге. Приводятся примеры.**

**1.** В работе [1] введено понятие первого момента поглощения. Известно [3], что в ряде случаев возможно окончание игры за время, равное первому моменту поглощения. Если ввести оператор $T$ программного поглощения [4—6], то возможность окончания игры с терминальным множеством $X$ за время, равное первому моменту поглощения, будет следовать из включения

$$T_t^\tau (T_\tau^b (X)) \supset T_t^b (X), \quad t < \tau < b \tag{1.1}$$

Вид оператора $T$ зависит от класса допустимых программных управлений игроков [5].

Рассмотрим игру в следующей постановке. Задано фазовое пространство $Z$ игры, отрезок $[a, b]$ числовой оси и множества $P$ и $Q$ значений управлений. Каждой позиции $z \in Z$ и паре чисел $a \leqslant t < \tau \leqslant b$ поставлено в соответствие множество $V(z, t, \tau)$ программных управлений $v$: $[t, \tau] \to Q$ второго игрока. Каждому программному управлению $v(\cdot)$ из этого множества поставлена в соответствие некоторая совокупность $U(z, t, \tau, v(\cdot))$ программных управлений $u$: $[t, \tau] \to P$ первого игрока.

Задано правило перехода, согласно которому для любой начальной позиции $z$ и начального момента времени $t \in [a, b]$ реализуется новая позиция

$$\begin{gathered} z(\tau) = g_t^\tau (z, v(\cdot), u(\cdot)), \quad \forall v(\cdot) \in \\ \in V(z, t, \tau), \ \forall u(\cdot) \in U(z, t, \tau, v(\cdot)), \quad t < \tau \leqslant b \end{gathered} \tag{1.2}$$

На основе правила перехода (1.2) строится оператор программного поглощения следующим образом [4—6]. Пусть $a \leqslant t < \tau \leqslant b$ и $M \subset Z$, точка $z \in T_t^\tau(M)$ тогда и только тогда, когда для любого управления $v(\cdot) \in V(z, t, \tau)$ существует управление $u(\cdot) \in U(z, t, \tau, v(\cdot))$, при котором точка $z(\tau)$ (1.2) принадлежит множеству $M$. Из этого определения следует, что

$$M \subset Y \Rightarrow T_t^\tau(M) \subset T_t^\tau(Y) \tag{1.3}$$

Достаточные условия выполнения включения (1.1) в ряде случаев могут быть получены на основании следующей теоремы. Пусть $Z$ — линейное пространство, а $F_i : 2^Z \to 2^Z$, $i = 1, 2, 3$ и $L_j : 2^Z \to 2^Z$, $j = 1, 2$ — многозначные отображения, удовлетворяющие условию

$$M \subset Y \Rightarrow F_i(M) \subset F_i(Y), \quad i = 1, 2 \tag{1.4}$$

*Теорема.* Пусть множество $X$ выпукло, а отображения $F_i$ и $L_j$ таковы, что: 1) для любых множеств $M$ и $Y$ из $Z$ выполнено включение $F_i(M+Y)\supset F_i(M)+L_i(Y)$, $i=1,\ 2$; 2) существует число $0<\lambda<1$, такое, что

$$(1.5)\qquad F_1(L_2(\lambda X))\supset\lambda F_3(X),\ L_1(F_2((1-\lambda)X))\supset(1-\lambda)F_3(X)$$

Тогда выполнено включение

$$(1.6)\qquad F_1(F_2(X))\supset F_3(X)$$

*Доказательство.* Из включения (1.4) и из условий теоремы имеем цепочку включений

$$F_1(F_2(X))=F_1(F_2(\lambda X+(1-\lambda)X))\supset F_1(L_2(\lambda X))+$$
$$+F_2((1-\lambda)X)\supset F_1(L_2(\lambda X))+L_1(F_2((1-\lambda)X))\supset$$
$$\supset\lambda F_3(X)+(1-\lambda)F_3(x)\supset F_3(X)$$

Применим эту теорему к некоторым конкретным классам игр.

2. Рассмотрим игру с простым движением [4, 7]

$$(2.1)\qquad z^{\cdot}=-f(u,v),\ v\in Q\subset R^l,\ u\in P(v)\subset R^m,\ z\in R^n$$

Пусть множества $V(z,t,\tau)$ и $U(z,t,\tau,v(\cdot))$ являются совокупностью постоянных управлений $v\colon[t,\tau]\to Q$ и $u\colon[t,\tau]\to P(v)$. Тогда, записывая решение уравнения (2.1) для постоянных управлений и используя определение оператора $T$, будем иметь

$$(2.2)\qquad T_t^{\tau}(M)=\bigcap\nolimits_v(M+(\tau-t)F(v)),\quad v\in Q$$
$$F(v)=\{x\in R^n\colon\ x=f(u,v),\ u\in P(v)\}$$

Пусть множество $V(z,t,\tau)$ — совокупность постоянных управлений $v\colon[t,\tau]\to Q$, а $U(z,t,\tau,v(\cdot))$ — кусочно-постоянных управлений $u\colon[t,\tau]\to P(v)$. В этом случае

$$(2.3)\qquad T_t^{\tau}(M)=\bigcap\nolimits_v(M+(\tau-t)\operatorname{co}F(v)),\quad v\in Q$$

Если $V(z,t,\tau)$ и $U(z,t,\tau,v(\cdot))$ — множества кусочно-постоянных управлений $v\colon[t,\tau]\to Q$ и $u(s)\in P(v(s))$, $t\leqslant s\leqslant\tau$, то

$$(2.4)\qquad T_t^{\tau}(M)=\bigcap\nolimits_{v_i,\lambda_i}\Big(M+(\tau-t)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\operatorname{co}F(v_i)\Big)$$

Пересечение берется по всем наборам $v_1,\ldots,v_k$ из $Q$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, $\lambda_i\geqslant0$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$.

Отображения (2.2)—(2.4) обладают следующими свойствами:

$$(2.5)\qquad T_t^{\tau}(M+Y)\supset T_t^{\tau}(M)+Y,\ T_t^{\tau}(\lambda M)=\lambda T_t^{b}(M)$$
$$T_{\tau}^{b}((1-\lambda)M)=(1-\lambda)T_t^{b}(M),\quad\lambda=(\tau-t)/(b-t)$$

Обозначим $F_1(M)=T_t^{\tau}(M)$, $F_2(M)=T_{\tau}^{b}(M)$, $F_3(M)=T_t^{b}(M)$, $L_j(M)=M$. Тогда из свойства (2.5) следуют включения (1.5). Стало быть, при выпуклом множестве $X$ отображения (2.2)—(2.4) удовлетворяют включению (1.1). Отсюда следует, что для выпуклого множества $X$ выполнено включение

$$(2.6)\qquad \bigcap\nolimits_w\big(\bigcap\nolimits_v(X+\sigma_2F(v))+\sigma_1F(w)\big)\supset\bigcap\nolimits_v(X+(\sigma_1+\sigma_2)F(v))$$

Здесь $w$ и $v$ берутся из $Q$, а числа $\sigma_1\geqslant0$, $\sigma_2\geqslant0$. Пусть $N$ — выпуклое множество. Найдем условия на числа $\sigma_i\geqslant0$, чтобы выполнялось включение

$$(2.7)\qquad \bigcap\nolimits_w\big(\bigcap\nolimits_v(Y+\sigma_3N+\sigma_2F(v))+\sigma_4N+\sigma_1F(w)\big)\supset$$
$$\bigcap\nolimits_v(Y+(\sigma_3+\sigma_4)N+(\sigma_1+\sigma_2)F(v))$$

Для выпуклого множества $Y$ включение (2.7) выполнено, если

$$\sigma_3\sigma_1 \geqslant \sigma_2\sigma_4 \tag{2.8}$$

В самом деле, если $\sigma_4 = 0$, то левая часть включения (2.7) имеет вид левой части включения (2.6) при $X = Y + \sigma_3 N$. Если $\sigma_2 = 0$, то включение (2.7) превращается в равенство. Пусть $\sigma_2\sigma_4 > 0$. Тогда, как следует из (2.8), $\sigma_1 > 0$. Обозначим $\delta = (\sigma_2\sigma_4)/\sigma_1$. Тогда левая часть включения (2.7) имеет вид левой части включения (2.6) при $X = Y + (\sigma_3 - \delta)\, N$ и с заменой $F(v)$ на $(\delta/\sigma_2)\, N + F(v)$. Расписывая при этих выражениях правую часть включения (2.6), получим правую часть включения (2.7).

Включение (2.7) можно использовать при получении достаточных условий выполнения (1.1) в дифференциальных играх вида

$$z^{\cdot} = -\alpha_1(t)\, u_1 - \alpha_2(t)\, f(u_2, v), \quad v \in Q, \quad u_1 \in N, \quad u_2 \in P(v) \tag{2.9}$$

Здесь $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — неотрицательные непрерывные функции, $z \in R^n$. Если, например, допустимые управления игроков рассматривать в классе постоянных, то

$$T_t^\tau(X) = \bigcap_v (X + \langle\alpha_1\rangle_t^\tau N + \langle\alpha_2\rangle_t^\tau F(v)) \tag{2.10}$$

Здесь и далее

$$\langle x\rangle_a^b = \int_a^b x(r)\, dr$$

Отсюда видно, что левая часть соотношения (1.1) имеет вид левой части включения (2.7) при $\sigma_{1,4} = \langle\alpha_{2,1}\rangle_t^\tau$, $\sigma_{2,3} = \langle\alpha_{2,1}\rangle_\tau^b$. Следовательно, для отображения (2.10) при любом выпуклом множестве $X \subset R^n$ выполнено включение (1.1) при условии, отвечающем (2.8).

3. Рассмотрим игру, уравнения движения которой имеют вид

$$z^{\cdot} = v_1 A^\circ z + \alpha_1(t)\, v_2 + \alpha_2(t)\, u, \quad z \in R^n, \quad v_2 \in Q \subset R^n, \quad u \in S \tag{3.1}$$

Здесь $A^\circ$ — постоянная кососимметрическая матрица, $v_1$ — скалярное управление, стесненное ограничением $|v_1| \leqslant 1$, функции $\alpha_i$: $[a, b] \to R$ непрерывны и неотрицательны, выпуклый компакт $Q$ содержит нулевой вектор, $S$ — евклидов шар в $R^n$ единичного радиуса.

*Пример.* На плоскости $x$, $y$ первый игрок обладает простым движением с ограниченной по величине скоростью $(x_1^{\cdot})^2 + (y_1^{\cdot})^2 \leqslant 1$. Введем переменную $\varphi$ для обозначения направления движения второго игрока и запишем уравнения его движения в виде $x_2^{\cdot} = v_2 \sin\varphi$, $y_2^{\cdot} = v_2 \cos\varphi$, $\varphi^{\cdot} = v_1$ ([8], с. 46). В отличие от [8] считаем, что $0 \leqslant v_2 \leqslant v$. Если перейти к переменным

$$z_1 = (x_1 - x_2)\cos\varphi - (y_1 - y_2)\sin\varphi$$
$$z_2 = (x_1 - x_2)\sin\varphi + (y_1 - y_2)\cos\varphi$$

то получим уравнение вида (3.1).

Опишем классы допустимых управлений игроков. Задано число $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Каждое допустимое управление $v(r) = (v_1(r), v_2(r))$ из множества $V(z, t, \tau)$ имеет вид $|v_1(r)| \leqslant 1$, управление $v_1(r)$ измеримо, $v_2(r) = 0$ при $t \leqslant r \leqslant (1 - \nu)\, t + \nu\tau = t(\nu)$; $v_1(r) = 0$, $v_2(r) \in Q$, управление $v_2(r)$ измеримо при $t(\nu) \leqslant r \leqslant \tau$.

В рассмотренном примере такое управление означает следующее: вначале второй игрок изменяет направление движения $\varphi$, оставаясь на месте, а затем движется по прямой. При этом отношение промежутка времени изменения направления $\varphi$ к промежутку времени, в течение которого точка движется по прямой, всегда постоянно.

Считаем, что множество $U(z, t, \tau, v(\cdot))$ допустимых управлений первого игрока состоит из всех измеримых функций $u$: $[t, \tau] \to S$. Для описанных допустимых управлений правило перехода (1.2) получается из системы (3.1) при помощи формулы Коши

(3.2) $$z(\tau) = e^{A(\tau)}\left(z(t) + \langle e^{-A}(\alpha_1 v_2 + \alpha_2 u)\rangle_t^{\tau}\right), \quad A(r) = \langle v_1\rangle_t^{r} A^{\circ}$$

Имеем равенство $A(r) = A(t(\nu))$, $t(\nu) \leqslant r \leqslant \tau$. Отсюда и из формулы (3.2), учитывая вид управления $v_2(r)$, будем иметь

(3.3) $$z(\tau) = e^{A(t(\nu))}\left(z(t) + e^{-A(t(\nu))}\langle \alpha_1 v_2\rangle_{t(\nu)}^{\tau} + \langle e^{-A}\alpha_2 u\rangle_t^{\tau}\right)$$

Имеем

(3.4) $$\{z \in R^n:\ z = \langle e^{-A}\alpha_2 u\rangle_t^{\tau},\ u:\ [t, \tau] \to S\} = \langle \alpha_2\rangle_t^{\tau} S$$
$$\{z \in R^n:\ z = \langle \alpha_1 v_2\rangle_{t(\nu)}^{\tau},\ v_2:\ [t(\nu), \tau] \to Q\} = \langle \alpha_1\rangle_{t(\nu)}^{\tau} Q$$
$$\{B : B = A(t(\nu)),\ v_1:\ [t,\ t(\nu)] \to [-1,\ 1]\} = \{B = yA^{\circ}:\ |y| \leqslant \nu(\tau - t)\}.$$

В этих формулах функции $u$, $v_2$, $v_1$ предполагаются измеримыми. В первом равенстве (3.4) используется кососимметричность матрицы $A^{\circ}$.

Из определения отображения $T$ и из формул (3.3), (3.4) получим

(3.5) $$T_t^{\tau}(M) = \bigcap_y e^{yA^{\circ}}\left((M + \langle \alpha_2\rangle_t^{\tau} S) \overset{*}{-} \langle \alpha_1\rangle_{t(\nu)}^{\tau} Q\right), \quad |y| \leqslant \nu(\tau - t)$$

Здесь посредством $\overset{*}{-}$ обозначена геометрическая разность множеств [9]. Зафиксируем произвольные множества $P_i \subset R^n$ и при $\delta \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$ обозначим

(3.6) $$B(M,\ \delta,\ \sigma,\ \gamma) = \bigcap_y e^{yA^{\circ}}\left((M + \sigma P_1) \overset{*}{-} \gamma P_2\right), \quad |y| \leqslant \delta$$

*Утверждение* 1. При $\varepsilon \geqslant 0$ выполнено включение

(3.7) $$B(B(\varepsilon S,\ \delta_2,\ \gamma_2,\ \gamma_2),\ \delta_1,\ \gamma_1,\ \gamma_1) \supset B(\varepsilon S,\ \delta_1 + \delta_2,\ \gamma_1 + \gamma_2,\ \gamma_1 + \gamma_2)$$

*Доказательство.* Обозначим

(3.8) $$F_i(M) = B(M,\ \delta_i,\ \gamma_i,\ \gamma_i),\ L_i(M) = \bigcap_y e^{yA^{\circ}} M,\ |y| \leqslant \delta_i,\ i = 1, 2$$

Тогда из (3.6) следует, что

$$F_i(M + Y) \supset F_i(M) + L_i(Y)$$

Обозначим $\lambda = \gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$ и через $F_3(\varepsilon S)$ — правую часть в доказываемом включении (3.7). Тогда из (3.6) и (3.8) следует, что

$$L_1(F_2((1 - \lambda)\varepsilon S)) = B((1 - \lambda)\varepsilon S,\ \delta_1 + \delta_2,\ \gamma_2,\ \gamma_2) = (1 - \lambda) F_3(\varepsilon S)$$

Из кососимметричности матрицы $A^{\circ}$ следует инвариантность множества $\beta S$, $\beta \geqslant 0$ относительно отображения $L_i$. Поэтому

$$F_1(L_2(\lambda\varepsilon S)) = F_1(\lambda\varepsilon S) \supset B(\lambda\varepsilon S,\ \delta_1 + \delta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_1) = \lambda F_3(\varepsilon S)$$

Стало быть, согласно теореме, включение (3.7) выполнено.

Положим теперь в формуле (3.6) $P_1 = S$. Тогда будет выполняться равенство

(3.9) $$B(M,\ \delta,\ \sigma,\ \gamma) = B(M + \beta S,\ \delta,\ \sigma - \beta,\ \gamma),\ 0 \leqslant \beta \leqslant \sigma$$

Найдем, при каких условиях в рассматриваемом случае выполнено включение

(3.10) $$B(B(\varepsilon S,\ \delta_2,\ \sigma_2,\ \gamma_2),\ \delta_1,\ \sigma_1,\ \gamma_1) \supset B(\varepsilon S,\ \delta_1 + \delta_2,\ \sigma_1 + \sigma_2,\ \gamma_1 + \gamma_2)$$

*Утверждение* 2. При $P_1 = S$ включение (3.10) выполнено, если

(3.11) $$\sigma_2\gamma_1 \geqslant \sigma_1\gamma_2$$

*Доказательство.* Пусть $\gamma_1 = 0$. Тогда включение (3.10) следует из вида множества (3.6).

Пусть $\gamma_1 > 0$. Обозначим $\beta = (\sigma_1\gamma_2)/\gamma_1$. Из (3.9) будем иметь, что $B(\varepsilon S, \delta_2, \sigma_2, \gamma_2) = B((\varepsilon + \sigma_2 - \beta) S, \delta_2, \beta, \gamma_2)$. Отсюда и из (3.6) следует, что левая часть включения (3.10) совпадает с левой частью включения (3.7) при замене в ней $\varepsilon$ на $\varepsilon + \sigma_2 - \beta$ и $P_1$ на $(\beta/\gamma_2) S$. При этой замене, учитывая вид числа $\beta$, получим, что правая часть включения (3.7) совпадает с правой частью доказываемого включения (3.10).

Из неравенства (3.11) и из формулы (3.5) получим достаточные условия для выполнения включения (1.1) при $X = \varepsilon S$. Это условие принимает вид

$$\langle\alpha_2\rangle_\tau^b \langle\alpha_1\rangle_{t(\nu)}^\tau \geqslant \langle\alpha_2\rangle_t^\tau \langle\alpha_1\rangle_{t(\nu)}^b, \quad \tau(\nu) = (1-\nu)\tau + \nu b \tag{3.12}$$

В случае, когда функции $\alpha_i$ — постоянные, неравенство (3.12) выполнено.

4. Известно [3], что линейные дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания можно заменой переменных свести к игре с простым движением.

. Пусть уравнения движения имеют вид

$$z^\bullet = -u + v + f(t), \quad u \in P(t), \quad v \in Q(t), \quad z \in R^n \tag{4.1}$$

Множества $P(t)$ и $Q(t)$ при каждом $t \in [a, b]$ — компакты в $R^n$, измеримо в смысле Лебега зависят от $t$ на отрезке $[a, b]$. Существует суммируемая на этом отрезке функция $D(t) \geqslant 0$, такая, что множества $P(t)$ и $Q(t)$ содержатся в шаре радиуса $D(t)$ с центром в начале координат. Измеримая функция $f$: $[a, b] \to R^n$ удовлетворяет ограничению $|f(t)| \leqslant D(t)$.

Пусть множества $V(z, t, \tau)$ и $U(z, t, \tau, v(\cdot))$ — совокупности измеримых управлений $v$: $[t, \tau] \to R^n$ и $u$: $[t, \tau] \to R^n$, удовлетворяющие включениям $v(r) \in Q(r)$ и $u(r) \in P(r)$. В этом случае

$$T_t^\tau(M) = R_t^\tau(M) + \langle f\rangle_t^\tau, \quad R_t^\tau(M) = (M + \langle P\rangle_t^\tau) \overset{*}{-} \langle Q\rangle_t^\tau$$

Отсюда можно получить, что включение (1.1) будет выполнено, если

$$R_t^\tau(R_\tau^b(X)) \supset R_t^b(X) \tag{4.2}$$

*Утверждение* 3. Пусть существуют выпуклые множества $P_i$ и $Q_i$ и число $0 < \lambda < 1$, такие, что

$$\langle P\rangle_\tau^b = P_1 + P_2, \quad \langle Q\rangle_t^\tau = Q_1 + Q_2 \tag{4.3}$$

$$(1-\lambda)\langle P\rangle_t^\tau = \lambda P_1, \quad \lambda\langle Q\rangle_\tau^b = (1-\lambda) Q_1 \tag{4.4}$$

Тогда для выпуклого множества $X$ выполнено включение (4.2).

*Доказательство*. Обозначим $X_1 = X + P_2$. Тогда из (4.2), (4.3) и свойства геометрической разности $A \overset{*}{-} (B + C) = (A \overset{*}{-} B) \overset{*}{-} C$ следует, что

$$R_t^\tau(R_\tau^b(X)) = N \overset{*}{-} Q_2, \quad N = ((X_1 + P_1) \overset{*}{-} \langle Q\rangle_\tau^b + \langle P\rangle_t^\tau) \overset{*}{-} Q_1 \tag{4.5}$$

Учитывая выпуклость множества $X_1$, заключаем, что

$$N \supset ((1-\lambda) X_1 + P_1) \overset{*}{-} \langle Q\rangle_\tau^b + (\lambda X_1 + \langle P\rangle_t^\tau) \overset{*}{-} Q_1 \tag{4.6}$$

Из равенств (4.4) следует, что

$$\langle P\rangle_t^\tau \supset \lambda(\langle P\rangle_t^\tau + P_1), \quad P_1 \supset (1-\lambda)(\langle P\rangle_t^\tau + P_1)$$

$$\lambda(\langle Q\rangle_\tau^b + Q_1) \supset Q_1, \ \langle Q\rangle_\tau^b \subset (1-\lambda)(\langle Q\rangle_\tau^b + Q_1)$$

Отсюда и из (4.6) получим включение

$$N \supset (X_1 + \langle P\rangle_t^\tau + P_1) \overset{*}{-} (\langle Q\rangle_\tau^b + Q_1)$$

Отсюда, учитывая равенство $X_1 = X + P_2$ и соотношения (4.3), получим, что правая часть первого равенства (4.5) содержит множество

$$(X + P_2 + \langle P\rangle_t^\tau + P_1) \overset{*}{-} (\langle Q\rangle_\tau^b + Q_1 + Q_2) = T_t^b(X)$$

Рассмотрим случай, когда при всех $t \leqslant \tau \leqslant b$

$$\langle P\rangle_t^\tau = A(\langle\alpha_1\rangle_t^\tau, \ldots, \langle\alpha_k\rangle_t^\tau), \ \langle Q\rangle_t^\tau = B(\langle\beta_1\rangle_t^\tau, \ldots, \langle\beta_m\rangle_t^\tau) \tag{4.7}$$

Здесь $\alpha_i(r)$ и $\beta_i(r)$ — непрерывные неотрицательные функции; множества $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ при каждом неотрицательном наборе чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ выпуклы и имеют следующие линейные свойства:

$$A(\alpha^1 + \alpha^2) = A(\alpha^1) + A(\alpha^2), \lambda A(\alpha) = A(\lambda\alpha), \lambda \geqslant 0 \tag{4.8}$$

$$B(\beta^1 + \beta^2) = B(\beta^1) + B(\beta^2), \ \lambda B(\beta) = B(\lambda\beta), \ \lambda \geqslant 0$$

Из равенств (4.7) и (4.8) следует, что условия (4.3), (4.4) будут выполнены, если существуют числа $0 < \lambda < 1, \alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$, такие, что

$$(1-\lambda)\langle\alpha_i\rangle_t^\tau = \lambda\alpha_i, \ \alpha_i \leqslant \langle\alpha_i\rangle_\tau^b, \ i = 1, \ldots, k$$

$$\lambda\langle\beta_j\rangle_\tau^b = (1-\lambda)\beta_j, \ \beta_j \leqslant \langle\beta_j\rangle_t^\tau, \ j = 1, \ldots, m$$

Эти условия будут выполнены, если при всех $i = 1, \ldots, k$ и $j = 1, \ldots, m$

$$\langle\alpha_i\rangle_t^\tau \leqslant \lambda\langle\alpha_i\rangle_t^b, \ \lambda\langle\beta_j\rangle_t^b \leqslant \langle\beta_j\rangle_t^\tau, \ 0 < \lambda < 1$$

Отсюда получим условие, при выполнении которого множества (4.7) удовлетворяют равенствам (4.3) и (4.4)

$$\max_i(\langle\alpha_i\rangle_t^\tau/\langle\alpha_i\rangle_t^b) \leqslant \min_j(\langle\beta_j\rangle_t^\tau/\langle\beta_j\rangle_t^b) \tag{4.9}$$

Приведем теперь примеры многозначных функций, удовлетворяющих (4.8). Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — выпуклые компакты в $R^n$. Тогда условию (4.8) удовлетворяет $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k$.

Пусть $A_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ задаются при помощи скалярного произведения в $R^n$ неравенствами $(x_i, x) \leqslant 1$. Здесь $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ — векто́ры из $R^n$, причем первые из них линейно независимы, а коэффициенты $f_i$ в разложении $x_{n+1} = f_1x_1 + \ldots + f_nx_n$ отрицательны. При неотрицательных $\alpha_i$ рассмотрим множество

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \bigcap(\alpha_i A_i) = \{x \in R^n : (x_i, x) \leqslant \alpha_i, i = 1, \ldots, n+1\} \tag{4.10}$$

Тогда, как показано в [10], семейство (4.10) удовлетворяет условию (4.8).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче преследования.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 244—254.
2. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.
5. *Гусятников П. Б.* К вопросу об информированности игроков в дифференциальной игре.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 5, с. 917—924.
6. *Половинкин Е. С.* Неавтономные дифференциальные игры.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 6, с. 1007—1017.
7. *Гусятников П. Б., Половинкин Е. С.* Простая квазилинейная задача преследования.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 771—782.
8. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
9. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
10. *Ухоботов В. И.* Построение цены игры в некоторых дифференциальных играх с фиксированным временем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 994—1000.


Челябинск

Поступила в редакцию
20.XII.1983