Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 62—50

# СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОГРАММНЫЙ СИНТЕЗ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

**Красовский А. Н., Третьяков В. Е.**

Задача оптимального гарантирующего управления системой, подверженной неопределенной помехе, для типичного случая интегрального показателя качества переходного процесса формализуется как позиционная дифференциальная игра [1] и решается методом стохастического программного синтеза [2], который находит в работе свое дальнейшее развитие. Существенной особенностью является функциональный характер обсуждаемой вспомогательной стохастической конструкции, позволяющей вычислять цену рассматриваемой игры как величину должным образом сконструированного программного стохастического максимина. По известной цене игры оптимальное управляющее воздействие вычисляется методом экстремального сдвига на так называемую сопутствующую точку. Результаты работы открывают путь для исследования функциональных игровых задач управления в нерегулярных случаях.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему

$$x^{\cdot} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad u \in Q, \quad v \in R \tag{1.1}$$

где $t_0$ и $\vartheta$ — фиксированные моменты времени, $x \in E^n$ — фазовый вектор объекта, $u$ — управление, $v$ — помеха, $Q \subset E^q$, $R \subset E^r$ — выпуклые компакты, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы-функции.

Пусть задан функционал

$$\gamma = \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \Big(\int\limits_{[t_*,\,\vartheta]} |D(t)[x[t] - y(t)]|^2 \mu(dt)\Big)^{1/2} \tag{1.2}$$

$$x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t],\quad t_* \leqslant t \leqslant \vartheta\},\quad t_* \in [t_0,\ \vartheta]$$

где $D(t)$ — кусочно-непрерывная матрица-функция, $y(t)$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, $|z|$ — евклидова норма вектора $z$, $\mu(dt)$ — мера, которая для любого отрезка $[\tau_*, \tau^*] \subset [t_0, \vartheta]$ представляется в виде

$$\mu([\tau_*, \tau^*]) = \sum_p \mu(\nu_p) + \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} \eta(t)\,dt, \quad \mu(\nu_p) > 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\eta(t) \geqslant 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ — кусочно-непрерывная функция, $\nu_p$ — точки из отрезка $[\tau_*, \tau^*]$, принадлежащие конечному, заданному на отрезке $[t_0, \vartheta]$ набору точек.

Задача состоит в построении закона управления, который формирует воздействие $u = u[t]$ на основе сведений о текущей позиции объекта (1.1) и гарантирует показателю $\gamma$ (1.2) возможно меньшее значение. При этом можно столкнуться с любой измеримой реализацией помехи $v[\cdot] = \{v[t] \in R,\ t_* \leqslant t < \vartheta\}$. Эту задачу удобно включить в дифференциальную игру, в которой роль второго игрока отводится природе. Тогда к исходной задаче добавляется задача, которая состоит в построении закона управления, формирующего воздействия $v = v[t]$ также по принципу обратной связи и гарантирующего на движениях объекта (1.1) возможно большее значение $\gamma$ (1.2).

Строгая математическая формализация этой игры приведена в работах [1—3]. Здесь отметим лишь, что в соответствии с определением [1] функционал $\gamma$ (1.2) позиционный. В таком случае дифференциальная игра имеет цену $\rho^\circ = \rho^\circ(t, x)$ и седловую точку $\{u^\circ(\cdot), v^\circ(\cdot)\}$, которую составляет пара универсальных стратегий

$$u^\circ(\cdot) = \{u^\circ(t, x, \varepsilon) \in Q,\ x \in E^n,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \varepsilon > 0\}$$
$$v^\circ(\cdot) = \{v^\circ(t, x, \varepsilon) \in R,\ x \in E^n,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \varepsilon > 0\}$$

где $\varepsilon$ — параметр точности. Стратегии $u^\circ(\cdot)$ и $v^\circ(\cdot)$ строятся эффективно по известной функции $\rho^\circ = \rho^\circ(t, x)$ методом экстремального сдвига объекта (1.1) на так называемую сопутствующую точку [1—3].

Ниже дается формула для вычисления цены игры в случае функционала $\gamma$ (1.2), выражающая совпадение цены игры в любой возможной позиции $\{t_*, x_*\}$ с величиной должным образом сконструированного стохастического программного максимина [2].

**2. Пояснительный пример.** Пусть по горизонтальной оси $\zeta$ под действием управляющей тяги $u$ и помехи $v$ (скажем, силы ветра) движется объект в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$x_1^{\cdot} = x_2,\quad x_2^{\cdot} = u + v,\quad |u| \leqslant \lambda_1,\quad |v| \leqslant \lambda_2,\quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.1}$$

где $x_1 = \zeta$ — координата, $x_2 = \zeta^{\cdot}$ — скорость объекта. Пусть указаны моменты $\nu_1 \in (t_0, \vartheta)$, $\nu_2 \in (\nu_1, \vartheta)$ и пункты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ на оси $\zeta$. Требуется так распорядиться управляющим усилием, чтобы объект (2.1) в моменты $\nu_1$ и $\nu_2$ находился как можно ближе соответственно к пунктам $\zeta_1$ и $\zeta_2$, а в момент $\vartheta$ — как можно ближе к пункту $\zeta_3$, имея при этом малую скорость $x_2[\vartheta]$. Кроме того, требуется, чтобы на промежутке времени $(\nu_1, \nu_2)$ объект двигался со скоростью $x_2[t]$, близкой к заданной величине $c = (\zeta_2 - \zeta_1)/(\nu_2 - \nu_1)$. Предположим, что за отклонение от этих требований взимается штраф

$$\gamma = \Big[\mu_1(x_1[\nu_1] - \zeta_1)^2 + \mu_2(x_1[\nu_2] - \zeta_2)^2 + \\ + \mu_3[(x_1[\vartheta] - \zeta_3)^2 + x_2^2[\vartheta]] + \mu_4\int_{\nu_1}^{\nu_2}(x_2[t] - c)^2\,dt\Big]^{1/2} \tag{2.2}$$

где $\mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$ — весовые коэффициенты.

Пусть имеем исходную позицию $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $t_* < \nu_1$, $x_{1*} = \zeta_*$, $x_{2*} = \zeta_*^{\cdot}$. Естественно поставить задачу об оптимальной стратегии $u^\circ(\cdot) = u^\circ(t, x_1, x_2, \varepsilon)$, которая гарантировала бы возможно меньшее значение показателя $\gamma$ (2.2). Но этот показатель принимает вид функционала $\gamma$ (1.2), (1.3), если положить

$x[t] = \{x_1[t], x_2[t]\}$, $\mu(\nu_1) = \mu_1$, $\mu(\nu_2) = \mu_2$, $\mu(\vartheta) = \mu_3$; $\eta(t) \equiv \mu_4$, $t \in [\nu_1, \nu_2]$, $\eta(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, \vartheta] \setminus [\nu_1, \nu_2]$; $y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$, $y_1(t) \equiv \zeta_1$, $t_0 \leqslant t \leqslant \nu_1$, $y_1(t) \equiv \zeta_2$, $\nu_1 < t \leqslant \nu_2$, $y_1(t) \equiv \zeta_3$, $\nu_2 < t \leqslant \vartheta$; $y_2(t) \equiv c$, $t \in (\nu_1, \nu_2)$, $y_2(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, \vartheta] \setminus (\nu_1, \nu_2)$

$$D(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad t_0 \leqslant t \leqslant \nu_1;\quad D(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \nu_1 < t < \nu_2$$
$$D(\nu_2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};\quad D(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \nu_2 < t \leqslant \vartheta$$

и доопределить показатель $\gamma$ (2.2) для значений $t_* \geqslant \nu_2$, следуя способу ведения дифференциальной игры для позиционного функционала.

Согласно [1], искомая оптимальная стратегия $u^\circ = u^\circ(t, x_1, x_2, \varepsilon)$ существует. Если на ее основе формировать движение объекта (2.1) в дискретной схеме с шагом, непревосходящим $\delta > 0$, то она при любой помехе $v[\cdot] = \{|v[t]| \leqslant \lambda_2,\ t_* \leqslant t < \vartheta\}$ гарантирует значение $\gamma$ (2.2), не большее, чем $\rho^\circ(t_*, x_{1*}, x_{2*}) + \chi$, где $\chi > 0$ — сколь угодно мало, как только достаточно малы $\varepsilon$ и $\delta$.

**3. Стохастический программный максимин.** Зафиксируем произвольную позицию $\{t_*, x_*\}$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $x_* \in E^n$. Выберем разбиение $\Delta_k\{t_j\}$, $t_1 = t_*$, $t_j < t_{j+1}$, $t_{k+1} = \vartheta$ отрезка $[t_*, \vartheta]$. Свяжем с ним независимые в совокупности случайные величины $\xi_j$, $j = 1, \ldots, k$, каждая из которых распределена равномерно на полуинтервале $0 \leqslant \xi_j < 1$. Каждый набор $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ можно трактовать как элементарное событие $\omega$ из вероятностного пространства $\{\Omega, F, P\}$, где $\Omega = \{\omega\}$ — единичный $k$-мерный куб в пространстве $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, $F$ — борелевская $\sigma$-алгебра для этого куба, $P(B)$, $B \in F$ — лебегова мера на этом кубе [4].

Назовем стохастическими неупреждающими программами $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ вектор-функции $u(\cdot) = \{u(t, \omega) \in Q, t_* \leqslant t < \vartheta, \omega \in \Omega\}$ и $v(\cdot) = \{v(t, \omega) \in R, t_* \leqslant t < \vartheta, \omega \in \Omega\}$, задаваемые на полуинтервалах $[t_j, t_{j+1})$, $j = 1, \ldots, k$ равенствами

$$u(t, \omega) = u[t, \xi_1, \ldots, \xi_j],\ v(t, \omega) = v[t, \xi_1, \ldots, \xi_j] \tag{3.1}$$

в которых функции $u = u[t, \xi_1, \ldots, \xi_j]$ и $v = v[t, \xi_1, \ldots, \xi_j]$ измеримы по совокупности аргументов $t, \xi_1, \ldots, \xi_j$ по Борелю.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$w^{\cdot} = A(t)w + B(t)u(t, \omega) + C(t)v(t, \omega),\ w[t_*] = x_* \tag{3.2}$$

где $\{u(\cdot), v(\cdot)\}$ — какая-нибудь пара программ (3.1). Решение этого уравнения представляется формулой Коши

$$w(t, \omega, u(\cdot), v(\cdot)) = X(t, t_*)x_* + \int_{t_*}^{t} X(t, \tau)[B(\tau)u(\tau, \omega) + \tag{3.3}$$

$$+ C(\tau)v(\tau, \omega)]\,d\tau,\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta \quad \omega \in \Omega$$

где $X(t, t_*)$ — фундаментальная матрица соответствующего однородного дифференциального уравнения. Вследствие (3.1) при $t_j \leqslant t < t_{j+1}$ справедливы равенства

$$w(t, \omega, u(\cdot), v(\cdot)) = w[t, \xi_1, \ldots, \xi_j, u(\cdot), v(\cdot)] \tag{3.4}$$

где функции в правой части измеримы по совокупности аргументов $t$, $\xi_1, \ldots, \xi_j$ по Борелю.

Функции $w(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ (3.3) можно считать элементами гильбертова пространства $L^{(2)}\{[t_*, \vartheta] \times \Omega\}$ случайных функций ([5], с. 237) со скалярным произведением

$$(w^{(1)}(\cdot), w^{(2)}(\cdot)) = \int_{\Omega}\int_{[t_*, \vartheta]} \langle w^{(1)}(t, \omega) \cdot w^{(2)}(t, \omega)\rangle \mu(dt)\, P(d\omega) \tag{3.5}$$

и нормой

$$\| w(\cdot) \| = \Big(\int_{\Omega}\int_{[t_*, \vartheta]} | w(t, \omega)|^2 \mu(dt)\, P(d\omega)\Big)^{1/2}$$

Здесь $\langle w^{(1)} \cdot w^{(2)}\rangle$ — скалярное произведение в $E^n$.

При данной исходной позиции $\{t_*, x_*\}$ и фиксированном разбиении $\Delta_k = \Delta_k\{t_j\}$ определим стохастический программный максимин как величину

$$\rho(t_*, x_*, \Delta_k) = \sup_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \Big(\int_{\Omega}\int_{[t_*, \vartheta]} | D(t)[w(t, \tag{3.6}$$

$$\omega, u(\cdot), v(\cdot)) - y(t)]\,|^2 \mu(dt) P(d\omega)\Big)^{1/2}$$

Будем предполагать, что разбиения $\Delta_k$ удовлетворяют условию $\max_j (t_{j+1} - t_j) \leqslant \delta(k) = [\vartheta - t_0]/k$.

*Теорема.* Какова бы ни была последовательность разбиений $\{\Delta_k, k = 1, 2, \ldots\}$, существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \rho(t_*, x_*, \Delta_k) = \rho^*(t_*, x_*) \tag{3.7}$$

который не зависит от выбора последовательности разбиений и совпадает с ценой рассматриваемой дифференциальной игры $\rho^\circ(t_*, x_*)$, какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*\}$.

4. **Вспомогательные величины.** Доказательство теоремы складывается из нескольких этапов. Выберем разбиение $\Delta_k\{t_j\}$, и пусть $t^* = t_r$ — одна из точек этого разбиения. Зафиксируем на полуинтервале $[t_*, t^*)$ пару измеримых функций

$$u[\cdot] = u[t_*[\cdot]\,t^*) = \{u[t] \in Q,\ t_* \leqslant t < t^*\}$$
$$v[\cdot] = v[t_*[\cdot]\,t^*) = \{v[t] \in R,\ t_* \leqslant t < t^*\}$$

которые назовем действиями. Рассмотрим множество $U[t^*] = \{u(\cdot)\}$ стохастических неупреждающих программ $u(\cdot)$, каждая из которых составлена из фиксированного действия $u[\cdot]$ и какой угодно стохастической неупреждающей программы (3.1) вида

$$u^*(t, \omega) = u[t, \xi_r, \ldots, \xi_j], \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = r, \ldots, k$$

так что $u(\cdot) = \{u[\cdot], u^*(\cdot)\}$. Аналогично построим множество $V[t^*] = \{v(\cdot) = \{v[\cdot], v^*(\cdot)\}\}$.

Пусть $l(\cdot) = \{l(t, \omega),\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \omega \in \Omega\}$ — произвольный элемент пространства $L^{(2)}\{[t_*, \vartheta] \times \Omega\}$, отвечающего рассматриваемому разбиению $\Delta_k$. Обозначим $L[t^*]$ множество элементов $l(\cdot)$ вида $l(t, \omega) = \{l[t, \xi_r, \ldots, \xi_k],\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \omega \in \Omega\}$, стесненных условием

$$\left(\int_\Omega \int_{[t_*, \vartheta]} |D(t)\, l(t, \omega)|^2\, \mu(dt)\, P(d\omega)\right)^{1/2} \leqslant 1 \tag{4.1}$$

Пусть $w(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ — движение (3.3), порожденное какой-нибудь парой программ $u(\cdot) \in U[t^*]$, $v(\cdot) \in V[t^*]$, и пусть

$$w^{(1)}(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)) = \{w^{(1)}(t, \omega, u(\cdot), v(\cdot)) = D(t)[w(t, \omega, u(\cdot), v(\cdot)) - y(t)],\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \omega \in \Omega\}$$

Возьмем какой-нибудь элемент $l(\cdot) \in L[t^*]$ и рассмотрим скалярное произведение $(w^{(1)}(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)), l^{(1)}(\cdot))$, где $l^{(1)}(\cdot) = \{l^{(1)}(t, \omega) = D(t) l(t, \omega),\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \omega \in \Omega\}$. В соответствии с (3.3), (3.5) будем иметь

$$\begin{aligned}
&(w^{(1)}(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)), l^{(1)}(\cdot)) = \\
&= \int_\Omega \int_{[t_*, \vartheta]} \langle D(t)\, l(t, \omega) \cdot D(t)\, X(t, t_*)\, x_* \rangle\, \mu(dt)\, P(d\omega) + \\
&+ \int_\Omega \int_{[t_*, \vartheta]} \Big\langle D(t)\, l(t, \omega) \cdot \int_{t_*}^{t} D(t)\, X(t, \tau)[B(\tau)\, u(\tau, \omega) + \\
&+ C(\tau)\, v(\tau, \omega)]\, d\tau \Big\rangle\, \mu(dt)\, P(d\omega) - \\
&- \int_\Omega \int_{[t_*, \vartheta]} \langle D(t)\, l(t, \omega) \cdot D(t)\, y(t) \rangle\, \mu(dt)\, P(d\omega)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Сменим во втором слагаемом правой части (4.2) порядок интегрирования по $\mu(dt)$ и $d\tau$ и обозначим

$$G(t) = D'(t)\, D(t), \quad M\{l(t, \omega)\} = m(t) \tag{4.3}$$

$$\psi[\tau] = \int_{[\tau, \vartheta]} X'(t, \tau)\, G(t)\, m(t)\, \mu(dt)$$

$$\begin{aligned}
&\psi[\tau, \xi_r, \ldots, \xi_j] = \\
&= M\Big\{\int_{[\tau, \vartheta]} X'(t, \tau)\, G(t)\, l[t, \xi_r, \ldots, \xi_k]\, \mu(dt) \,|\, \xi_r, \ldots, \xi_j\Big\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь $M\{\ldots\}$ — математическое ожидание, $M\{\ldots|\ldots\}$ — условное математическое ожидание; верхний индекс штрих означает транспонирование. Учитывая структуру программ $u(\cdot)\in U[t^*]$, $v(\cdot)\in V[t^*]$ и введенные обозначения (4.3), (4.4), получим

$$(w^{(1)}(\cdot,u(\cdot),v(\cdot)),l^{(1)}(\cdot))=\langle\psi[t_*]\cdot x_*\rangle+\int_{t_*}^{t^*}\langle\psi[\tau]\cdot(B(\tau)u[\tau]+C(\tau)v[\tau])\rangle d\tau+\sum_{j=r}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}}M\{\langle\psi[\tau,\xi_r,\ldots,\xi_j]\cdot(B(\tau)u[\tau,\xi_r,\ldots,\xi_j]+C(\tau)v[\tau,\xi_r,\ldots,\xi_j])\rangle\}d\tau-\int_{[t_*,\vartheta]}\langle G(t)m(t)\cdot y(t)\rangle\mu(dt) \tag{4.5}$$

Функции $\psi[\tau]$, $t_*\leqslant\tau\leqslant t^*$; $\psi[\tau,\ \xi_r,\ldots,\ \xi_j]$, $t_j\leqslant\tau<t_{j+1}$, $j=r,\ldots,k$ кусочно непрерывны по $\tau$ и согласно (1.3) могут иметь разрывы первого рода лишь в точках $\tau=\nu_p$. Функции $\psi[\tau,\ \xi_r,\ \ldots,\ \xi_j]$ измеримы по совокупности аргументов $\tau,\ \xi_r,\ \ldots,\ \xi_j$. Для функции $\psi[\tau]$ на любом промежутке $(\tau_*,\ \tau^*)\subset[t_*,\ t^*]$, не содержащем ее точек разрыва, справедлива оценка

$$|\psi[\tau^*]-\psi[\tau_*]|\leqslant g[\tau^*-\tau_*]^{1/2},\quad g=\mathrm{const} \tag{4.6}$$

Опираясь на (4.5), введем величину

$$\varkappa[t^*]=\varkappa(t_*,\ x_*,\ t^*,\ u[t_*[\cdot]t^*),\ v[t_*[\cdot]t^*),\ \Delta_k,l(\cdot))=\langle\psi[t_*]\cdot x_*\rangle+\int_{t_*}^{t^*}\langle\psi[\tau]\cdot(B(\tau)u[\tau]+C(\tau)v[\tau])\rangle d\tau+\sum_{j=r}^{k}\sum_{t_j}^{t_{j+1}}M\{\max_{v\in R}\min_{u\in Q}\langle\psi[\tau,\xi_r,\ldots,\xi_j]\cdot(B(\tau)u+C(\tau)v)\rangle\}d\tau-\int_{[t_*,\vartheta]}\langle G(t)m(t)\cdot y(t)\rangle\mu(dt) \tag{4.7}$$

Благодаря отмеченным свойствам функций (4.3), (4.4) величина $\varkappa[t^*]$ определена корректно. Эти же свойства позволяют установить для величины $\varkappa[t^*]$ при $t^*=t_*$ следующее равенство:

$$\varkappa[t_*]=\langle\psi[t_*]\cdot x_*\rangle+\sum_{j=1}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}}M\{\max_{v\in R}\min_{u\in Q}\langle\psi[\tau,\xi_1,\ldots\xi_j]\cdot(B(\tau)u+C(\tau)v)\rangle\}d\tau-\int_{[t_*,\vartheta]}\langle G(t)m(t)\cdot y(t)\rangle\mu(dt)=\max_{v(\cdot)}\min_{u(\cdot)}(w^{(1)}(\cdot,u(\cdot),v(\cdot)),l^{(1)}(\cdot)) \tag{4.8}$$

Используя $\varkappa[t^*]$ (4,7), построим величину

$$\varphi[t^*]=\varphi(t_*,\ x_*,\ t^*,\ u[t_*[\cdot]t^*),\ v[t_*[\cdot]t^*),\ \Delta_k)=\sup_{l(\cdot)\in L[t^*]}\varkappa(t_*,\ x_*,\ u[t_*[\cdot]t^*),\ v[t_*[\cdot]t^*),\ \Delta_k,\ l(\cdot)) \tag{4.9}$$

Включим сюда и случай $t^*=\vartheta$. Тогда все компоненты, определяющие $\varphi[t^*]$ при $t^*=\vartheta$, будут функциями только от $t$. Пусть $t_i$ и $t_{i+1}$, $i\in\{1,\ldots,k-1\}$ — два любых последовательных момента из разбиения $\Delta_k=\Delta_k\{t_j\}$.

Оценим разность

$$\Delta\varphi_i = \varphi[t_{i+1}] - \varphi[t_i] \tag{4.10}$$

предполагая, что действия $u[t_*[\cdot]\, t_{i+1})$ и $v[t_*[\cdot]\, t_{i+1})$, определяющие величину $\varphi[t_{i+1}]$, составлены из действий $u[t_*[\cdot]\, t_i)$ и $v[t_*[\cdot]\, t_i)$, определяющих величину $\varphi[t_i]$ и некоторых действий $u[\cdot] = u[t_i[\cdot]\, t_{i+1})$ и $v[\cdot] = v[t_i[\cdot]\, t_{i+1})$. Пусть $\{l^{(s)}(\cdot) \in L[t_{i+1}],\ s = 1, 2, \ldots\}$ — какая-нибудь максимизирующая последовательность для величины $\varphi[t_{i+1}]$. Тогда можно показать, что для разности $\Delta\varphi_i$ (4.10) справедлива оценка

$$\Delta\varphi_i \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\langle \psi^{(s)}[\tau] \cdot B(\tau)\, u[\tau]\rangle - \min_{u\in Q} \langle \psi^{(s)}[\tau] \cdot B(\tau)\, u\rangle]\, d\tau + \varepsilon_s\ (\varepsilon_s \to 0 \text{ при } s \to \infty) \tag{4.11}$$

$$\psi^{(s)}[\tau] = \int_{[\tau,\vartheta]} X'(t, \tau)\, G(t)\, M\{l^{(s)}[t, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_k]\}\, \mu(dt) \tag{4.12}$$

При этом вследствие (4.1) функции $\psi^{(s)}[\cdot] = \psi^{(s)}[t_i[\cdot]\, t_{i+1}]$, $s = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничены и вследствие (4.6) равностепенно непрерывны на любом промежутке $(\tau_*, \tau^*) \subset [t_i, t_{i+1}]$, не содержащем точек разрыва этих функций $\psi^{(s)}[\cdot]$ (4.12). Но все точки разрыва функций $\psi^{(s)}[\cdot]$, $s = 1, 2, \ldots$ содержатся в одном и том же конечном множестве точек. Поэтому из последовательности $\{\psi^{(s)}[\cdot],\ s = 1, 2, \ldots\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $\psi^*[\cdot]$ равномерно по $\tau$ во всех точках отрезка $[t_i, t_{i+1}]$. Это позволяет из (4.11) получить оценку

$$\Delta\varphi_i \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\langle \psi^*[\tau] \cdot B(\tau)\, u[\tau]\rangle - \min_{u\in Q} \langle \psi^*[\tau] \cdot B(\tau)\, u\rangle]\, d\tau \tag{4.13}$$

которая справедлива при любом $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ и для любой предельной функции $\psi^*[\cdot]$ Для разности $\Delta\varphi_k = \varphi[\vartheta] - \varphi[t_k]$ получается точно такая же оценка (4.13), как и для $\Delta\varphi_i$ (4.10), $i = 1, \ldots, k-1$.

**5. Свойства вспомогательных величин.** Основное свойство, называемое $u$-стабильностью, устанавливает следующая

*Лемма.* Каковы бы ни были два последовательных момента $t_i < t_{i+1}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ разбиения $\Delta_k\{t_j\}$ и каковы бы ни были действия $u[t_*[\cdot]t_i)$ и $v[t_*[\cdot]t_i)$, для любого действия $v[\cdot] = v[t_i[\cdot]\, t_{i+1})$ найдется такое действие $u[\cdot] = u[t_i[\cdot]\, t_{i+1})$, что будет иметь место неравенство

$$\Delta\varphi_i = \varphi[t_{i+1}] - \varphi[t_i] \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k \tag{5.1}$$

План доказательства леммы таков. Благодаря (4.13) достаточно установить существование действия $u^\circ[\cdot] = \{u^\circ[\tau] \in Q,\ t_i \leqslant \tau < t_{i+1}\}$, которое обеспечивает равенство

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [\langle \psi^*[\tau] \cdot B(\tau)\, u^\circ[\tau]\rangle - \min_{u\in Q} \langle \psi^*[\tau] \cdot B(\tau)\, u\rangle]\, d\tau = 0 \tag{5.2}$$

Для построения такого действия $u^\circ[\cdot]$ воспользуемся теоремой о неподвижной точке ([6], с. 496). Множество всевозможных действий $u[\cdot]$ ограничено, выпукло и слабо компактно в $L^{(2)}\{[t_i, t_{i+1})\}$. При фиксированном действии $v[\cdot]$ каждому действию $u[\cdot] \in U$ отвечает множество $\Psi^*(u[\cdot])$ предельных функций $\psi^*[\cdot] = \{\psi^*[\tau],\ t_i \leqslant \tau < t_{i+1}\}$, равномерно ограниченных и вследствие (4.6) равностепенно непрерывных на любом промежутке $(\tau_*, \tau^*) \subset [t_i, t_{i+1}]$, не содержащем точек разрыва функций $\psi^*[\cdot]$. Поэтому множество $\Psi^*(u[\cdot])$ принадлежит некоторому выпуклому компакту $\Psi$ в пространстве $L^{(2)}\{[t_i, t_{i+1})\}$. Кроме того, можно показать, что множество $\Psi^*(u[\cdot])$ выпукло и изменяется сильно полунепрерывно сверху по включению относительно изменения $u[\cdot]$, оцениваемого слабо. (Обратим внимание на то, что свойство выпуклости обеспечивается здесь стохастическим характером обсуждаемой конструкции.)

Поставим в соответствие каждой функции $\psi[\cdot] \in \Psi$ множество $U^*(\psi[\cdot])$ измеримых функций $u^*[\cdot] = \{u^*[\tau] \in Q,\ t_i \leqslant \tau < t_{i+1}\}$, выбранных (в согласии с теоремой об измеримом выборе) из условия

$$\langle\psi[\tau]\cdot B(\tau)\,u^*[\tau]\rangle = \min_{u\in Q}\langle\psi[\tau]\cdot B(\tau)\,u\rangle \tag{5.3}$$

Множество $U^*(\psi[\cdot])$ содержится в $U$, выпукло и изменяется слабо полунепрерывно сверху по включению относительно изменения $\psi[\cdot]$, оцениваемого сильно.

Рассмотрим теперь отображение множества $S = \{s[\cdot]\}$ всевозможных пар $s[\cdot] = \{u[\cdot], \psi[\cdot]\}$, $u[\cdot] \in U$, $\psi[\cdot] \in \Psi$ в себя, поставив в соответствие каждой паре $s[\cdot] \in S$ непустое множество $\Phi(s[\cdot]) \subset S$ таких же пар $s^*[\cdot] = \{u^*[\cdot], \psi^*[\cdot]\}$, $u^*[\cdot] \in U^*(\psi[\cdot])$, $\psi^*[\cdot] \in \Psi^*(u[\cdot])$. Множество $S$ выпукло и слабо замкнуто. Множество $\Phi(s[\cdot])$ выпукло и изменяется слабо секвенциально полунепрерывно сверху по включению относительно изменения $s[\cdot]$. Тогда в соответствии с теоремой о неподвижной точке существует такой элемент $s^\circ[\cdot] \in S$, что $s^\circ[\cdot] \in \Phi(s^\circ[\cdot])$; т. е. существуют такие $u^\circ[\cdot]$ и $\psi^\circ[\cdot]$, что $u^\circ[\cdot] \in U^*(\psi^\circ[\cdot])$ и $\psi^\circ[\cdot] \in \Psi^*(u^\circ[\cdot])$. Следовательно, искомое действие $u^\circ[\cdot]$, обеспечивающее равенство (5.2), определяется из условия (5.3), где следует положить $\psi[\cdot] = \psi^\circ[\cdot]$. Это доказывает лемму.

С учетом (4.8) при $t^* = t_*$ имеем равенство

$$\varphi[t_*] = \sup_{l(\cdot)\in L[t_*]}\ \max_{v(\cdot)}\ \min_{u(\cdot)}\,(w^{(1)}(\cdot,\ u(\cdot),\ v(\cdot)),\ l^{(1)}(\cdot)) \tag{5.4}$$

Но поскольку $(w^{(1)}(\cdot,\ u(\cdot),\ v(\cdot)),\ l^{(1)}(\cdot)) \leqslant \|w^{(1)}(\cdot,\ u(\cdot),\ v(\cdot))\|\cdot\|l^{(1)}(\cdot)\|$, то в соответствии с определением величины $\rho(t_*, x_*, \Delta_*)$ (3.6) и условием (4.1) будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi[t_*] &\leqslant \\ &\leqslant \sup_{l(\cdot)\in L[t_*]}\ \max_{v(\cdot)}\ \min_{u(\cdot)}\,[\|w^{(1)}(\cdot,\ u(\cdot),\ v(\cdot))\|\cdot\|l^{(1)}(\cdot)\|] \leqslant \\ &\leqslant \max_{v(\cdot)}\ \min_{u(\cdot)}\,\|w^{(1)}(\cdot,\ u(\cdot),\ v(\cdot))\| = \rho(t_*,\ x_*,\ \Delta_k)\end{aligned} \tag{5.5}$$

Согласно (4.5) и (4.9) при $t^* = \vartheta$, величина $\varphi[\vartheta]$ обладает свойством

$$\begin{aligned}\varphi[\vartheta] &= \sup_{l(\cdot)\in L[\vartheta]}(w^{(1)}(\cdot, u[\cdot], v[\cdot]), l^{(1)}(\cdot)) = \\ &= \|w^{(1)}(\cdot, u[\cdot], v[\cdot])\| = \Big(\int\limits_{[t_*,\vartheta]} |D(t)[w[t] - y[t]]|^2\,\mu(dt)\Big)^{1/2}\end{aligned} \tag{5.6}$$

**6. Стохастический максимин и цена игры.** Выберем какую-нибудь последовательность разбиений $\Delta_q\{t_j\}$, $q = 1, 2, \ldots$, для которой существует предел

$$\lim_{q\to\infty}\rho(t_*,\ x_*,\ \Delta_q) = \rho^*(t_*,\ x_*) \tag{6.1}$$

Тогда для любого числа $\alpha > 0$ найдется натуральное число $k(\alpha)$, такое, что при любом $q \geqslant k(\alpha)$ будет справедливо неравенство

$$\rho(t_*,\ x_*,\ \Delta_q) \leqslant \rho^*(t_*,\ x_*) + \alpha \tag{6.2}$$

Рассмотрим $\{\varepsilon, \Delta_q\}$ — движение [1] $x^\circ[t_*[\cdot]\vartheta]$ объекта (1.1), порожденное из позиции $\{t_*, x_*\}$ по шагам разбиения $\Delta_q\{t_j\}$, $q \geqslant k(\alpha)$ оптимальной стратегией $v^\circ(\cdot)$ второго игрока и реализацией управления $u[t_*[\cdot]\vartheta)$, составленной из тех действий $u[t_j[\cdot]t_{j+1})$, $j = 1, \ldots, q$, которые в соответствии с леммой для действий $v^\circ[t_j[\cdot]t_{j+1})$, порожденных стратегией $v^\circ(\cdot)$, обеспечивают выполнение неравенств (5.1)

$$\begin{aligned}&\varphi(t_*, x_*, t_{j+1}, u[t_*[\cdot]t_{j+1}), v^\circ[t_*[\cdot]t_{j+1}), \Delta_q) \leqslant \\ &\leqslant \varphi(t_*, x_*, t_j, u[t_*[\cdot]t_j)\,v^\circ[t_*[\cdot]t_j), \Delta_q)\end{aligned}$$

Из этой цепочки неравенств при $j = 1, \ldots, q$ и свойств (5.5), (5.6) получаем

(6.3)
$$\rho(t_*, x_*, \Delta_q) \geqslant \varphi[t_*] \geqslant$$
$$\geqslant \varphi[\vartheta] = \Big(\int\limits_{[t_*, \vartheta]} |D(t)[x^\circ[t] - y(t)]|^2 \mu(dt)\Big)^{1/2}$$

Но по свойству оптимальной стратегии $v^\circ(t, x, \varepsilon)$ и определению цены игры $\rho^\circ(t_*, x_*)$ [1] для любого $\chi > 0$ можно указать такие величины $\delta(\chi) > 0$ и $\delta(\varepsilon, \chi) > 0$, что для любой измеримой реализации управления $u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t] \in Q, t_* \leqslant t < \vartheta\}$ будет выполняться неравенство

(6.4)
$$\gamma(x^\circ[t_*[\cdot]\vartheta]) \geqslant \rho^\circ(t_*, x_*) - \chi$$

как только $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\chi)$ и шаг $\delta(q)$ разбиения отрезка $[t_*, \vartheta]$ меньше, чем $\delta(\varepsilon, \chi)$. Следовательно, выбирая $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\chi)$ и в разбиении $\Delta_q\{t_j\}$, полагая $q > \max\{k(\alpha), [\vartheta - t_0]/\delta(\varepsilon, \chi)\}$, будем одновременно иметь неравенства (6.2), (6.3) и в соответствии с (6.4) — неравенство

(6.5)
$$\Big(\int\limits_{[t_*, \vartheta]} |D(t)[x^\circ[t] - y(t)]|^2 \mu(dt)\Big)^{1/2} \geqslant \rho^\circ(t_*, x_*) - \chi$$

Сравнивая (6.2), (6.3), (6.5), получаем, что $\rho^\circ(t_*, x_*) \leqslant \rho^*(t_*, x_*) + \alpha + \chi$, и поскольку $\alpha$ и $\chi$ сколь угодно малы, если $q$ достаточно велико, то имеем неравенство

(6.6)
$$\rho^\circ(t_*, x_*) \leqslant \rho^*(t_*, x_*)$$

Противоположное неравенство получается так. Из (6.1) следует, что при $q \geqslant k(\alpha)$

(6.7)
$$\rho(t_*, x_*, \Delta_q) \geqslant \rho^*(t_*, x_*) - \alpha$$

По определению $\rho(t_*, x_*, \Delta_q)$ (3.6) для любого $\zeta > 0$ можно указать такую стохастическую неупреждающую программу $v_*(\cdot)$, что, какова бы ни была стохастическая неупреждающая программа $u(\cdot)$, справедливо неравенство

(6.8)
$$\| w^{(1)}(\cdot, u(\cdot), v_*(\cdot)) \| \geqslant \rho(t_*, x_*, \Delta_q) - \zeta$$

Тогда из (6.7), (6.8) при $q \geqslant k(\alpha)$ имеем, что

(6.9)
$$\| w^{(1)}(\cdot, u(\cdot), v_*(\cdot)) \| \geqslant \rho^*(t_*, x_*) - \alpha - \zeta$$

Положим в стохастическом дифференциальном уравнении (3.2) $v(\cdot) = v_*(\cdot)$. Построим реализацию $u^\circ[t_*[\cdot]\vartheta, \omega]$ управления $u$ по шагам разбиения $\Delta_q\{t_j\}$ на основе оптимальной стратегии $u^\circ(\cdot)$ первого игрока, считая, что при $t_j \leqslant t < t_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q$

$$u^\circ[t_j[\cdot]t_{j+1}, \omega) = u^\circ(t_j, w(t_j, \omega, u^\circ(\cdot), v_*(\cdot)), \varepsilon)$$

Такую реализацию с учетом (3.4) можно трактовать как управление, формируемое на основе некоторой стохастической неупреждающей программы $u_*^\circ(\cdot)$. Для этой программы также будет справедливо неравенство (6.9). Но по свойству оптимальной стратегии $u^\circ(t, w, \varepsilon)$ [1] для любого $\chi > 0$ можно указать $\varepsilon(\chi) > 0$ и $\delta(\varepsilon, \chi) > 0$, такие, что, какова бы ни была измеримая реализация помехи (в том числе, быть может, и любая реализация $v_*[t_*[\cdot]\vartheta, \omega)$, формируемая на основе стохастической неупреждающей программы $u_*(\cdot)$), будет справедливо неравенство

(6.10)
$$\gamma(w^\circ[t_*[\cdot]\vartheta]) \leqslant \rho^\circ(t_*, x_*) + \chi$$

если только $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\chi)$ и шаг разбиения $\delta(q)$ не превосходит $\delta(\varepsilon, \chi)$. Тогда, выбирая $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\chi)$ и полагая в разбиении $\Delta_q\{t_j\}$ $q > \max\{k(\alpha), [\vartheta -$

$- t_0]/\delta(\varepsilon, \chi)\}$, наряду с неравенством (6.9) для почти всех реализаций $v_*[t_*[\cdot]\vartheta, \omega)$ в соответствии с (6.10) будем иметь неравенство

$$(6.11)\qquad \Big(\int\limits_{[t_*, \vartheta]} |D(t)[w(t, \omega, u_*^\circ(\cdot), v_*(\cdot)) - y(t)]|^2 \mu(dt)\Big)^{1/2} \leqslant \rho^\circ(t_*, x_*) + \chi$$

Усредняя (6.11) по $\omega \in \Omega$, получаем

$$(6.12)\qquad \| w^{(1)}(\cdot, u_*^\circ(\cdot), v_*(\cdot)) \| \leqslant \rho^\circ(t_*, x_*) + \chi$$

Сравнивая (6.9) и (6.12), имеем $\rho^*(t_*, x_*) \leqslant \rho^\circ(t_*, x_*) + \chi + \alpha + \zeta$, а значит, $\rho^*(t_*, x_*) \leqslant \rho^\circ(t_*, x_*)$. Учитывая еще (6.6), получаем, что $\rho^*(t_*, x_*) = \rho^\circ(t_*, x_*)$. Это равенство выводится для любой позиции $\{t_*, x_*\}$ и для всякой последовательности разбиений $\Delta_q\{t_j\}$, для которой существует предел (6.1). И каждый раз такой предел будет совпадать по доказанному с ценой игры $\rho^\circ(t_*, x_*)$. Отсюда вытекает, что предел (3.7) существует и равен цене игры. Теорема доказана.

Из этой теоремы, неравенств (6.3), (6.5) и равенств (4.8), (5.4) непосредственно вытекает следующая формула для вычисления цены игры:

$$(6.13)\qquad \rho^\circ(t_*, x_*) = \lim_{k\to\infty} \sup_{l(\cdot)\in L[t_*]} [\langle\psi[t_*]\cdot x_*\rangle + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} M\{\max_{v\in R} \min_{u\in Q} \langle\psi[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j]\cdot(B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle\} d\tau - \int\limits_{[t_*, \vartheta]} \langle G(t)m(t)\cdot y(t)\rangle \mu(dt)]$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Красовский А. Н.* Дифференциальная игра для позиционного функционала.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1303—1307.
2. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* О программном синтезе позиционного управления.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 6, с. 1309—1312.
3. *Красовский А. Н., Третьяков В. Е.* Программный синтез дифференциальной игры с интегральной платой.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 605—612.
4. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974. 696 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1965. 655 с.
6. *Боненбласт Х. Ф., Карлин С.* Об одной теореме Вилля.— Бесконечные антагонистические игры: Сб. статей.— М.: Физматгиз, 1963, с. 489—496.


Свердловск

Поступила в редакцию
30.VIII.1983