

Из (10) (12), (14) имеем

$$\omega_1 + \frac{\partial y_1}{\partial \psi} \omega_0 = \frac{\partial \omega(u_0)}{\partial x} (u_1 + v_1) + \bar{Y}(u_0) + Y'(u_0, \beta + \psi)$$

Для y_1 и ω_1 получаем соотношения

$$(17) \quad \frac{\partial y_1}{\partial \psi} \omega_0 = \frac{\partial \omega(u_0)}{\partial x} v_1 + Y'(u_0, \beta + \psi), \quad \omega_1 = \frac{\partial \omega(u_0)}{\partial x} u_1 + \bar{Y}(u_0)$$

Отсюда y_1 определяется однозначно, а ω_1 будет уточнено позже. Далее, из (10), (11) и (14) имеем

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{du_1}{d\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \psi} \omega_1 + \frac{\partial v_2}{\partial \psi} \omega_0 = \\ = \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial X'}{\partial x} \right) (u_1 + v_1) + \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial y} + \frac{\partial X'}{\partial y} \right) y_1 \end{aligned}$$

Заметим, что ряд слагаемых имеет нулевое среднее по ψ . Поэтому для u_1 и v_2 получаем уравнения

$$(19) \quad \frac{du_1}{d\xi} = \frac{\partial \bar{X}(u_0)}{\partial x} u_1 + U_1(\xi), \quad \frac{\partial v_2}{\partial \psi} \omega_0 = V_2(\xi, \psi)$$

в которых U_1 — уже известная функция, а среднее значение V_2 по ψ равно нулю.

Из первого уравнения (19) однозначно определяется $u_1(\xi)$ с начальным условием $u_1(0) = -v_1(0, 0)$. Затем из второго уравнения (17) находим ω_1 и из (18) уточняем функцию $V_2(\xi, \psi)$. Наконец, $v_2(\xi, \psi)$ однозначно определяем из второго уравнения (19). Последующие члены определяются по этой же схеме.

Определив N членов ряда, получим равномерные по $t \in [0, T/\varepsilon]$ оценки

$$\begin{aligned} \|dx_*/dt - \varepsilon X(x_*, y_*)\| &\leq C\varepsilon^{N+1} \\ \|dy_*/dt - \omega(x_*) - \varepsilon Y(x_*, y_*)\| &\leq C\varepsilon^N \end{aligned}$$

Автор благодарит М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, В. М. Волосова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
4. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию
27.VI.1983

УДК 539.3

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Матросов А. А., Устинов Ю. А.

Рассматриваются установившиеся колебания полого пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией. Проводится аналитический и численный анализ однородных решений, исследуется поведение дисперсионных кривых вещественных и комплексных мод в зависимости от геометрических параметров.

Ранее [1] методом однородных решений исследовалось распространение волн в сплошном цилиндре из электроупругого материала с осевой поляризацией. Плоские задачи о колебаниях пьезокерамических цилиндров с разными типами поляризации рассматривались в [2, 3]. На основании вариационного метода рассматривались колебания цилиндра конечной длины [4].

1. Рассмотрим установившиеся осесимметричные колебания пьезокерамического цилиндра, поляризованного по радиусу. Внутренний радиус цилиндра r_1 , внешний — r_2 , длина образующей — $2l$.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z , направив ось z по оси цилиндра.

Будем считать, что свойства материала описываются следующими соотношениями [5]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \varepsilon_r + c_{13}^E (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) - e_{33} E_r, & \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{13}^E \varepsilon_r + c_{11}^E \varepsilon_\varphi + c_{12}^E \varepsilon_z - e_{13} E_r, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}^E \varepsilon_r + c_{12}^E \varepsilon_\varphi + c_{11}^E \varepsilon_z - e_{13} E_r, & \sigma_{rz} &= 2c_{44}^E \varepsilon_{rz} - e_{15} E_z \\ D_r &= e_{13} (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + e_{33} \varepsilon_r + \varepsilon_{33}^s E_r, & D_z &= 2e_{15} \varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}^s E_z \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_\varphi}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Здесь σ_{kl} — компоненты тензора напряжений, u_r, u_z, D_k, E_k — компоненты вектора смещений, электрической индукции, напряженности электрического поля соответственно, c_{ij}^E — модули упругости, e_{ij} — пьезомодули, ε_{ij}^s — диэлектрические проницаемости.

Добавляя к (1.1) уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

и уравнения вынужденной электростатики диэлектриков

$$\operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0$$

получаем замкнутую систему уравнений

$$(1.2) \quad (e^{-2\varepsilon\xi} L_0 + e^{-\varepsilon\xi} i\alpha L_1 - \alpha^2 L_2 + \Omega^2 L_3) v = 0$$

Здесь

$$u = u(r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \psi = \psi(r) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{r}{r_0}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad r_0 = \sqrt{r_1 r_2}, \quad \zeta = \frac{z}{r_0}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \xi \in [-1, 1]$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho r_0^2 \varepsilon^2 \omega^2}{c_0}, \quad \alpha = \varepsilon r_0 k, \quad v = \operatorname{col} \{u_r, u_z, \psi\}, \quad c_{ij}^* = \frac{c_{ij}^E}{c_0}, \quad e_{ij}^* = \frac{e_{ij} e_0}{c_0}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon_{ij}^s e_0^2}{c_0}$$

ψ — потенциал электрического поля, связанный с вектором напряженности соотношением $E = -\operatorname{grad} \psi$, k — волновое число, ω — частота колебаний, ρ — плотность, c_0, e_0 — некоторые характерные параметры материала, имеющие размерности $c_{ij}^s, |E|$. Для простоты записи звездочка опускается.

Матричные операторы имеют следующий вид:

$$L_0 = \begin{vmatrix} c_{33} \partial^2 - \varepsilon^2 c_{11} & 0 & e_{33} \partial^2 - \varepsilon e_{13} \partial \\ 0 & c_{44} \partial^2 & 0 \\ e_{33} \partial^2 + \varepsilon e_{13} \partial & 0 & -\varepsilon_{33} \partial^2 \end{vmatrix}, \quad L_2 = \begin{vmatrix} c_{44} & 0 & e_{15} \\ 0 & c_{11} & 0 \\ e_{15} & 0 & -\varepsilon_{11} \end{vmatrix}, \quad L_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L_1 = \begin{vmatrix} 0 & (c_{13} + c_{44}) \partial + \varepsilon (c_{13} - c_{12}) & 0 \\ (c_{13} + c_{44}) \partial + \varepsilon (c_{12} + c_{44}) & 0 & (e_{13} + e_{15}) \partial + \varepsilon e_{15} \\ 0 & (e_{13} + e_{15}) \partial + \varepsilon e_{13} & 0 \end{vmatrix}$$

Будем считать, что боковые поверхности цилиндра свободны от напряжений и на них отсутствуют электроды

$$(1.3) \quad (e^{-\varepsilon\xi} M_0 + i\alpha M_1) v \Big|_{\xi=\pm 1} = 0$$

$$M_0 = \begin{vmatrix} c_{33} \partial + \varepsilon c_{13} & 0 & e_{33} \partial \\ 0 & c_{44} \partial & 0 \\ e_{33} \partial + \varepsilon e_{13} & 0 & -\varepsilon_{33} \partial \end{vmatrix}, \quad M_1 = \begin{vmatrix} 0 & c_{13} & 0 \\ c_{44} & 0 & e_{15} \\ 0 & e_{13} & 0 \end{vmatrix}$$

Построение дисперсионных кривых задачи (1.2), (1.3) осуществляется ниже численными методами.

2. Обратимся вначале к аналитическому изучению спектральной задачи (1.2), (1.3) в предположении, что параметр ε , характеризующий толщину цилиндра, достаточно мал.

Исследование начнем со статического случая $\Omega = 0$. Опуская промежуточные выкладки, дадим краткое описание спектра.

Множество собственных значений по характеру их поведения по ε можно разбить на три группы. Первая группа состоит из двукратного собственного значения $\alpha^{(1)} = 0$. Ему соответствует собственный вектор следующего вида: $v^{(1)} = \text{col} \{0, A_1, A_2\}$ (A_1, A_2 — произвольные постоянные).

Вторая группа состоит из четырех нулей, которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к нулю. Первые члены их асимптотического разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)} &= \varepsilon^{1/2} [\alpha_0 + O(\varepsilon)] \\ \alpha_0^4 &= 3(c_{12} - c_{11}) \frac{2a_1c_{13} + 2a_2e_{13} - c_{11} - c_{12}}{(a_1c_{13} + a_2e_{13} - c_{11})^2} > 0, \\ a_1 &= \frac{c_{13}e_{33} + e_{13}e_{33}}{c_{33}e_{33} + e_{33}^2}, \quad a_2 = \frac{c_{13}e_{33} - c_{33}e_{13}}{c_{33}e_{33} + e_{33}^2} \end{aligned}$$

Выпишем первый член разложения по ε собственного вектора $v^{(2)} = \text{col} \{A, 0, 0\}$ (A — произвольная постоянная).

Третья группа собственных значений состоит из счетного множества корней $\alpha_j^{(3)}$ ($j = 0, 1, \dots$), имеющих следующее асимптотическое представление: $\alpha_j^{(3)} = \beta_j + O(\varepsilon)$, где β_j — собственные значения соответствующей спектральной задачи для полосы (слоя), подробное исследование которой проведено в [6, 7].

Первая группа собственных значений определяет проникающее решение, напряженно-деформированное состояние которого эквивалентно главному вектору усилий P , действующему в поперечном сечении. Можно показать, что если $P = 0$, то соответствующее решение обращается в нуль.

Напряженно-деформированное состояние, соответствующее второй группе, имеет характер краевого эффекта, присущего тонким оболочкам, и эквивалентно действию в поперечном сечении изгибающего момента и перерезывающей силы.

Напряженно-деформированное состояние третьей группы имеет характер пограничного, локализованного у торцов цилиндра.

3. Обратимся теперь к исследованию спектра задачи (1.2), (1.3) при малых α и Ω . Проведенный анализ структуры спектра статической задачи позволяет определить вид аналитических разложений по Ω для разных групп нулей.

Собственные значения, соответствующие первой группе, можно отыскивать в виде

$$(3.1) \quad \alpha = \Omega t_1 + \dots, \quad v = v_0 + \Omega v_1 + \dots$$

Подстановка разложений (3.1) в (1.2) и (1.3) приводит к некоторой рекуррентной системе, после интегрирования которой получаем

$$(3.2) \quad v_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}, \quad v_1 = \begin{Bmatrix} t_1 B_1 (b_1 e^{\varepsilon v \xi} + b_2 e^{-\varepsilon v \xi} + b_3 e^{\varepsilon \xi}) \\ -t_1 B_2 c_{44}^{-1} e_{15} e^{\varepsilon \xi} + D_1 \\ t_1 B_1 (b_4 e^{\varepsilon v \xi} + b_5 e^{-\varepsilon v \xi} + b_6 e^{\varepsilon \xi}) + D_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} t_1^2 &= \frac{1}{2} \text{sh} 2\varepsilon \{[(1 + v) \varepsilon_{33}]^{-1} [(c_{12} + v c_{13}) \varepsilon_{33} + \\ &+ (e_{13} + v e_{33}) e_{13}] b_1 \text{sh} \varepsilon (1 + v) + [(1 - v) \varepsilon_{33}]^{-1} \times \\ &\times [(c_{12} - v c_{13}) \varepsilon_{33} + (e_{13} - v e_{33}) e_{13}] b_2 \text{sh} \varepsilon (1 - v) + \\ &+ \frac{1}{2} [(c_{12} + c_{13}) b_3 + e_{13} b_6 + c_{11}] \text{sh} 2\varepsilon\}^{-1} \\ v^2 &= (c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2)^{-1} (c_{11} \varepsilon_{33} + e_{13}^2) \end{aligned}$$

(b_1, b_2, \dots, b_6 зависят от констант материала, причем ввиду громоздкости выражения для них здесь не приведены, B_1, B_2, D_1, D_2 — произвольные постоянные).

Соотношения (3.1), (3.2) описывают начало первой дисперсионной кривой в окрестности точки $\alpha = 0, \Omega = 0$.

Начало остальных дисперсионных кривых определяется из условия $\alpha = 0$. При этом определитель граничных условий распадается на два трансцендентных уравнения, содержащих функции Бесселя и Вебера:

$$\begin{aligned} I_1(qe^\varepsilon) Y_1(qe^{-\varepsilon}) - I_1(qe^{-\varepsilon}) Y_1(qe^\varepsilon) &= 0 \\ \left[I_\nu(se^\varepsilon) - \frac{se^\varepsilon}{k\nu + 1} I_{\nu+1}(se^\varepsilon) \right] \left[Y_\nu(se^{-\varepsilon}) - \frac{se^{-\varepsilon}}{k\nu + 1} Y_{\nu+1}(se^{-\varepsilon}) \right] - \\ - \left[I_\nu(se^{-\varepsilon}) - \frac{se^{-\varepsilon}}{k\nu + 1} I_{\nu+1}(se^{-\varepsilon}) \right] \left[Y_\nu(se^\varepsilon) - \frac{se^\varepsilon}{k\nu + 1} Y_{\nu+1}(se^\varepsilon) \right] &= 0 \\ q = \frac{\Omega}{\varepsilon \sqrt{c_{44}}}, \quad s = \frac{\Omega}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon_{33}}{c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2} \right)^{1/2}, \quad k = a_1^{-1} \end{aligned}$$

Полученные два набора корней определяют начальные точки вещественных кривых на оси Ω . Значения Ω , соответствующие данным точкам, являются резонансными частотами радиальных колебаний бесконечного цилиндра.

Рассмотрим поведение дисперсионных кривых при α и Ω , стремящихся к бесконечности. Предположим, что предел их отношения остается постоянной величиной, т. е. $\lim \Omega/\alpha = \text{const}$ при $\alpha \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$. Преобразуем задачу (1.2), (1.3) к виду

$$(3.3) \quad (\mu^2 e^{-2\varepsilon\xi} L_0 + e^{-\varepsilon\xi} i\mu L_1 - L_2 + C^2 L_3) v = 0 \\ (\mu e^{-\varepsilon\xi} M_0 + iM_1) v|_{\xi=\pm 1} = 0; \quad \mu = 1/\alpha, \quad C^2 = \Omega^2/\alpha^2$$

где C — новый спектральный параметр, соответствующий фазовой скорости распространения волны. Очевидно, что $\mu \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. μ — малый параметр. С механической точки зрения это соответствует случаю, когда длина волны значительно меньше толщины рассматриваемого цилиндра.

Общие методы решения таких задач были разработаны М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником и состоят в проведении двух итерационных процессов. Для построения внутреннего решения проведем первый итерационный процесс. Используя разложения

$$(3.4) \quad v = v_0 + \mu v_1 + \dots, \quad C^2 = C_0^2 + \mu C_1^2 + \dots$$

получаем рекуррентную систему. Ее анализ показывает, что возможно распространение волн с двумя фазовыми скоростями

$$C_0^{(1)} = (c_{11}/\rho)^{1/2}, \quad C_0^{(2)} = \left(\frac{c_{44} + e_{15}^2/\varepsilon_{11}}{\rho} \right)^{1/2}$$

Обратимся к исследованию задачи (3.3) на основе второго итерационного процесса. Для этого осуществим растяжение масштаба в окрестности границы путем введения новой переменной. Первый этап итерационного процесса дает

$$(L_0 + L_1 + L_2 + C_R^2 L_3) v = 0, \quad (M_0 + M_1) v(0) = 0$$

Эта краевая задача вместе с дополнительным условием убывания решения на бесконечности описывает волну, распространяющуюся вдоль свободной поверхности; C_R — ее фазовая скорость, определяемая численно.

4. Приведем некоторые результаты численного анализа задачи (1.2), (1.3).

Исследование проводилось для цилиндров из материала PZT-4, предварительно поляризованных в радиальном направлении. Модули пьезокерамики [8]

$$c_{11}^E = 13,9, \quad c_{12}^E = 7,78, \quad c_{13}^E = 7,43, \quad c_{33}^E = 11,5, \quad c_{44}^E = 2,56, \\ e_{13} = -5,2, \quad e_{33} = 15,1, \quad e_{15} = 12,7, \quad \varepsilon_{11}^S/\varepsilon_0^S = 730, \quad \varepsilon_{33}^S/\varepsilon_0^S = 635, \\ [c_{ij}^S] = 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad [e_{ij}] = \text{К/м}^2, \quad \varepsilon_0^S = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \rho = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Рассматривались цилиндры с $\varepsilon = 1,151$; $\varepsilon = 0,053$; $\varepsilon = 0,001$.

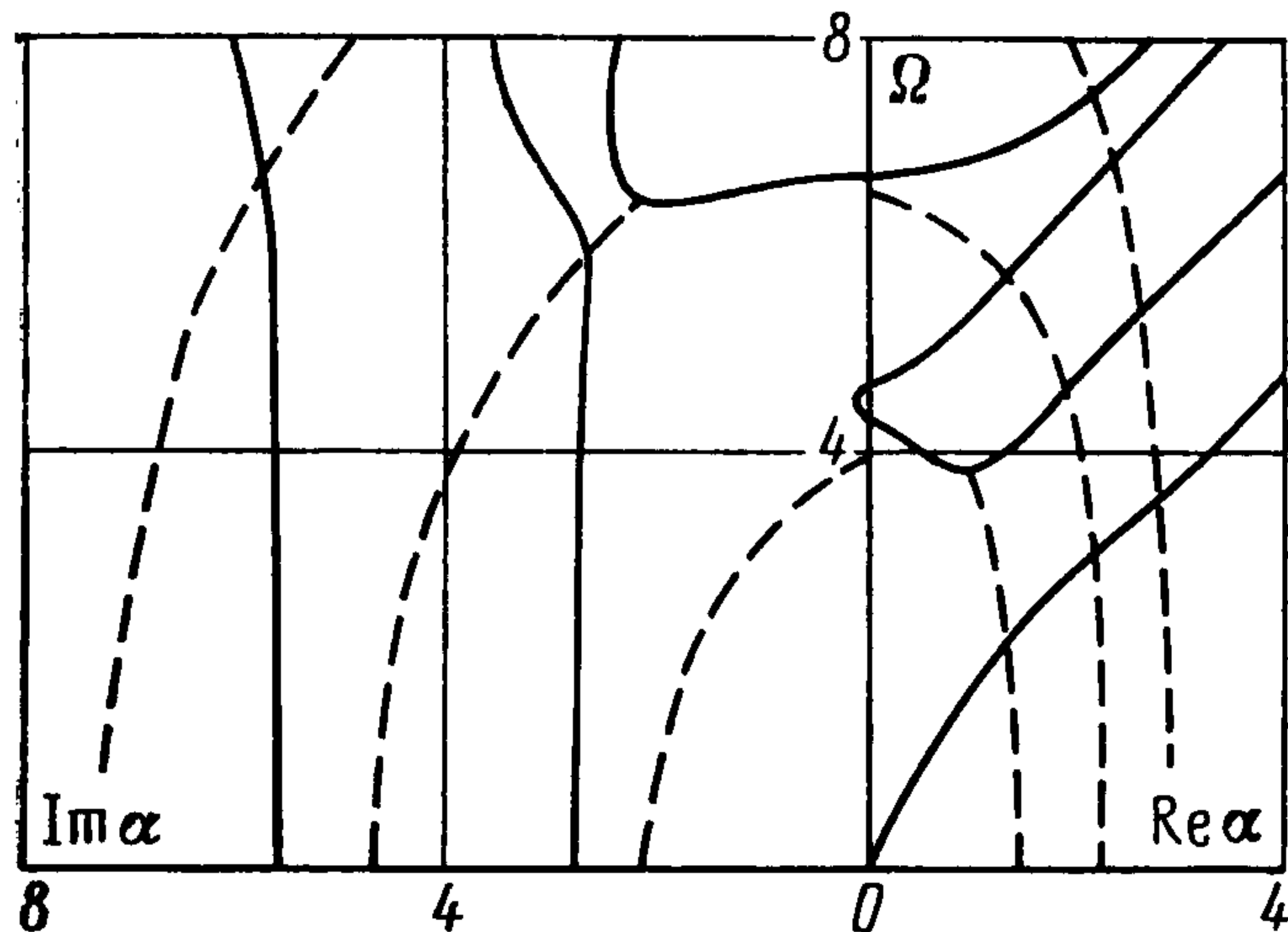
При численном анализе, в основу которого был положен метод ортогональной прогонки С. К. Годунова [9], множество дисперсионных кривых $\alpha(\Omega)$ было разбито на две части: вещественную и комплексную. К комплексной были отнесены и чисто мнимые собственные значения α . Для нахождения комплексных нулей метод С. К. Годунова использовался совместно с методом аргумента.

На графиках представлены дисперсионные кривые для цилиндра с $\varepsilon = 1,151$ (фиг. 1) и $\varepsilon = 0,053$ (фиг. 2). Дисперсионные кривые для $\varepsilon = 0,001$ и $\varepsilon = 0,053$ практически совпадают, за исключением небольшой окрестности начала координат. Таким образом, при $\varepsilon < 0,06$ кривизна цилиндрических поверхностей не оказывает существенного влияния на структуру кривых.

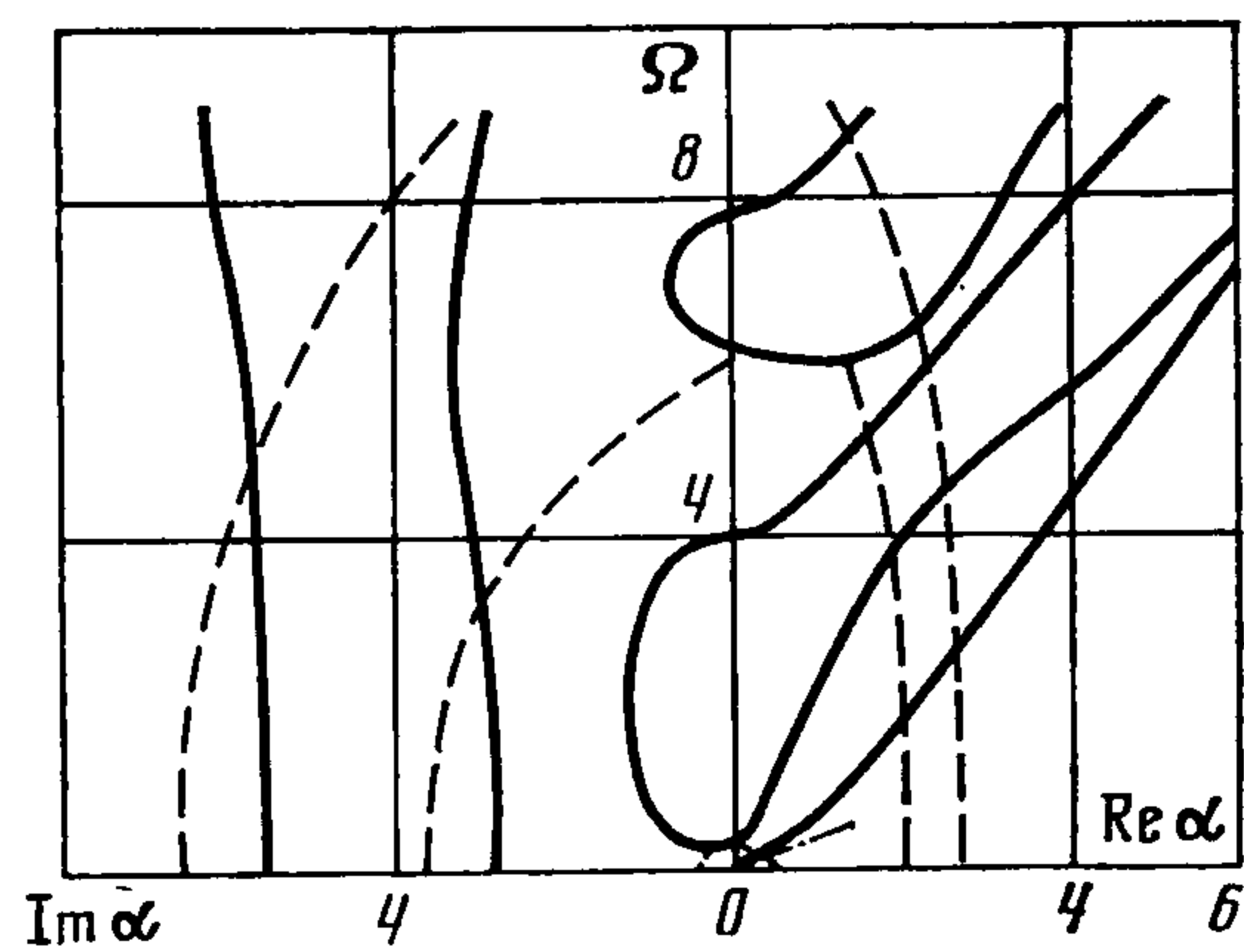
На графиках вещественные и чисто мнимые значения α нанесены сплошными линиями, причем чисто мнимые корни отложены слева от начала координат. Действительные и мнимые части комплексных ветвей нанесены штриховыми линиями, при этом OX — ось действительных значений α , а OY — ось мнимых значений α . По оси OZ отложены значения безразмерной частоты Ω .

При фиксированном значении Ω полное решение для цилиндра конечной длины можно представить в виде

$$(4.1) \quad v = \sum_{j=1}^n A_j v_j(\xi) e^{i(a_j \xi - \Omega \tau)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k v_k(\xi) e^{i(\alpha_k \xi - \Omega \tau)}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где α_k — комплексные собственные значения, $a_k = \text{Re}\alpha_k > 0$, v_k — соответствующие собственные векторы, A_j, B_j — произвольные постоянные, определяемые при удовлетворении граничных условий на торцах.

Первая конечная сумма определяет проникающее решение. Ей соответствуют вещественные дисперсионные кривые на графиках. Вторая сумма определяет пограничное решение, локализованное у торцов цилиндра. Ей соответствуют дисперсионные кривые из левой полуплоскости графиков. Видно, что комплексные корни при некоторых Ω могут иметь малую мнимую часть. В этом случае соответствующие однородные пограничные решения могут оказывать значительное влияние на напряженно-деформированное состояние во внутренней части цилиндра.

В случае бесконечного цилиндра вторая сумма в (4.1) отсутствует, а первая — описывает распространяющиеся волны в цилиндре. Число таких волн определяется величиной Ω и наличием источников колебаний на бесконечности. Если источники расположены при $\zeta = -\infty$, то берутся только $a_k > 0$, если имеются источники еще и при $\zeta = +\infty$, то суммирование ведется по всем a_k — положительным и отрицательным.

На графиках штрихпунктирными линиями обозначены асимптотические значения из (3.1), которые хорошо аппроксимируют при малых частотах первую дисперсионную кривую.

В случае высокой частоты и малой длине волны по сравнению с толщиной цилиндра дисперсионные кривые выходят на асимптоту (3.4). Для первой кривой фазовая скорость стремится к фазовой скорости поверхностной волны, для остальных — к скорости сдвиговой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе. — Дефектоскопия, 1975, № 4, с. 27—32.
2. Коломиец Г. А., Улитко А. Ф. Связанные электроупругие колебания толстостенных пьезокерамических цилиндров. — В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 9. Киев: Наук. думка, 1970, с. 5—13.
3. Лазуткин В. Н., Цыганов Ю. В. Аксиально-симметричные колебания и электрический импеданс пьезокерамических колец с радиальной поляризацией. — Акуст. ж., 1971, т. 17, вып. 3, с. 394—399.
4. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте. — Акуст. ж., 1976, т. 22, вып. 3, с. 393—399.
5. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел. — В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 15. Киев: Наук. думка, 1975, с. 90—99.
6. Мадорский В. В., Устинов Ю. А. Симметричные колебания пьезоэлектрических пластин. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1976, т. 29, № 5, с. 51—58.
7. Мадорский В. В., Устинов Ю. А. Построение системы однородных решений и анализ корней дисперсионного уравнения антисимметричных колебаний пьезокерамической плиты. — ПМТФ, 1976, № 6, с. 138—145.
8. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. — В кн.: Физическая акустика. Т. 1. Ч. А. М.: Мир, 1966, с. 204—326.
9. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченко В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 374 с.