Из (3.5) следует, что $v_0 = \text{const} = b$, а переменная u_0 — периодическая функция времени.

Обратимся теперь к системе (3.6). Из второго уравнения этой системы найдем $v_1 = C_0 e^{\lambda}$, где C_0 — произвольная постоянная, $\lambda^{\cdot} = l/(b - u_0)$, $l = f'(b) = \frac{1}{2}\sqrt{R(b)} = b\sqrt{3a}$. Можно показать, что $\lambda^{\cdot} = \varphi^{\cdot}$, в силу чего $v_1 = lC_1 e^{\varphi}$, где C_1 — произвольная постоянная. Зная же зависимость v от времени, из первого уравнения системы (3.6) найдем

$$u_1 = u_0^{\cdot}(C_2 - C_1 e^{\varphi}) \tag{3.7}$$

где C_2 — вторая постоянная интегрирования.

Таким образом, величины u_0, v_0, u_1, v_1 построены и теперь можно, применив соотношения (1.3), (3.3), вычислить переменные p_1, q_1, r_1, α_1, β_1, γ_1. Получим

$$p_1 = p_0^{\cdot}N + \frac{C_1 l}{2ab}(ap_0 + lq_0)e^{\varphi}, \quad q_1 = q_0^{\cdot}N + \frac{C_1 l}{2ab}(-lp_0 + aq_0)e^{\varphi} \tag{3.8}$$

$$r_1 = r_0^{\cdot}N + C_1 l e^{\varphi}, \quad \alpha_1 = \alpha_0^{\cdot}N + \frac{C_1 l}{2}(u_0 + 2b)e^{\varphi}, \quad \beta_1 = \beta_0^{\cdot}N + \frac{(l - \beta_0)l}{b - u_0}C_1 e^{\varphi}$$

$$\gamma_1 = \gamma_0^{\cdot}N + C_1 l\left[\frac{\gamma_0\alpha_0}{2ab} - \frac{2q_0(l - \beta_0)}{b(b - u_0)}\right]e^{\varphi}, \quad N = C_2 - C_1 e^{\varphi}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. Собр. соч. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 118—124.
2. *Докшевич А. И.* Качественное исследование решения Горячева — Чаплыгина.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 4. Киев: Наук. думка, 1972, с. 3—7.
3. *Горячев Д. Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$.— Матем. сб., 1900, 21, вып. 3, с. 431—438.
4. *Докшевич А. И.* Об одном из решений Д. Н. Горячева задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 1. Киев: Наук. думка, 1969, с. 73—77.
5. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
6. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
7. *Аппельрот Г. Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы.— В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61—155.
8. *Уиттеккер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.

Донецк

Поступила в редакцию
28.XII.1983

УДК 531.36

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ПРИ ОТЫСКАНИИ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Стрыгин В. В.

Рассматриваются системы в стандартной форме по Н. Н. Боголюбову, а также системы с быстрыми фазами. Решение предлагается искать в виде асимптотического ряда по малому параметру с коэффициентами, представимыми в виде суммы двух функций. Первая из них зависит от медленного времени и находится как решение более простого уравнения на конечном отрезке. Вторая — тригонометрический полином времени (или угловых переменных) с коэффициентами, зависящими от медленного времени (она находится явным образом). Результаты удобно использовать при решении некоторых задач небесной механики.

При вычислении высших приближений решения с фиксированным начальным условием использование метода усреднения Боголюбова — Митропольского — Волосова [1, 2] может быть осложнено из-за громоздкости соответствующих преобразований. Ниже предлагается модификация метода, основанная на идеях, используемых в теории сингулярно возмущенных уравнений [3, 4].

Пусть R^n — n-мерное эвклидово пространство и D — ограниченная область в R^n. Предположим, что в $[0, \infty) \times D$ определена функция $X(t, x)$ со значениями в R^n, все производные которой по x до $(N+1)$-го порядка непрерывны. Пусть $X(t, x)$ — тригонометрический полином по t.

Рассматривается задача Коши

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x),\ x(0) = \alpha \in D,\ t \in [0, T/\varepsilon] \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр. Приближенное решение этой задачи будем искать в виде

$$x_* = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^N x_N \tag{2}$$

$$x_i = u_i(\xi) + v_i(\xi, t),\ i = 0, 1, \ldots, N,\ \xi = \varepsilon t$$

Здесь v_i — тригонометрические полиномы по t. Формально подставляя (2) в (1), имеем

$$\left[\varepsilon \frac{du_0}{d\xi} + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial t}\right] + \varepsilon \left[\varepsilon \frac{du_1}{d\xi} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial t}\right] + \ldots = \tag{3}$$
$$= \varepsilon X(t, x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots)$$

Постараемся удовлетворить этому уравнению при всех $\xi \in [0, T]$ и $t \in [0, \infty)$. Положим $v_0 \equiv 0$. В дальнейшем среднее значение функции X по t будем обозначать через $\overline{X}$. Тогда $X = \overline{X} + X'$. Очевидно, X' имеет нулевое среднее по t. Далее

$$X(t, x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots) = \overline{X}(u_0) + X'(t, u_0) + \tag{4}$$
$$+ \varepsilon \left\{\frac{\partial \overline{X}}{\partial x}(u_1 + v_1) + \frac{\partial X'}{\partial x}(u_1 + v_1)\right\} + \ldots$$

Приравняем в (3) коэффициенты разложений при ε. Полагая

$$du_0/d\xi = \overline{X}(u_0),\ u(0) = \alpha \tag{5}$$

находим $u_0(\xi) \in D$ на некотором отрезке $[0, T]$, а для v_1 получаем уравнение $\partial v_1/\partial t = X'[t, u_0(\xi)]$. Так как X' при фиксированном $\xi \in [0, T]$ имеет нулевое среднее по t, то, считая ξ параметром, полагаем $v_1 |_{t=0} = 0$ и находим

$$v_1(\xi, t) = \int_0^t X'[s, u_0(s)]\, ds \tag{6}$$

причем $v_1(\xi, t)$ — тригонометрический полином по t.

Приравняем теперь в (3) коэффициенты разложения при ε^2. Имеем

$$\frac{du_1}{d\xi} + \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \overline{X}(u_0)}{\partial x} u_1 + F_1$$

$$F_1 = -\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \left[\frac{\partial \overline{X}(u_0)}{\partial x} v_1 + \frac{\partial X'(t, u_0)}{\partial x} u_1 + \frac{\partial X'(t, u_0)}{\partial x} v_1\right]$$

Очевидно, среднее значение по t функции $\partial X'(t, u_0)/\partial x$ равно нулю. Поэтому $\overline{F}_1$ — среднее значение по t функции F_1 определяется уже известными функциями u_0 и v_1.

Положим

$$\frac{du_1}{d\xi} = \frac{\partial \overline{X}(u_0)}{\partial x} u_1 + \overline{F}_1(\xi), \quad u_1(0) = 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T \tag{7}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = F_1 - \overline{F}_1 \tag{8}$$

Из (7) u_1 определяется однозначно. Поэтому определена и величина F_1. Можно теперь положить

$$v_2(\xi, t) = \int_0^t \{F_1(s, \xi) - \overline{F}_1(\xi)\}\, ds$$

и т. д. Пусть определены все $x_i = u_i + v_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Очевидно

$$dx_*/dt = \varepsilon X(t, x_*) + f,\ 0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon$$
$$(\|f\| \leqslant C\varepsilon^{N+1},\ C > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon)$$

Для оценки близости решения x задачи (1) и x_* следует положить $w = x - x_*$. Тогда имеем

$$dw/dt = \varepsilon \{X(t, x_* + w) - X(t, x_*) - \varepsilon^{-1} f\}, \quad w(0) = 0$$

Переходя к медленному времени $\xi = \varepsilon t$, получаем уравнение

$$w = \int_0^{\xi} \left\{ X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x_* + w\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x_*\right) - \varepsilon^{-1} f \right\} ds, \quad \xi = \varepsilon t$$

Из принципа сжатых отображений вытекает

Теорема. При сформулированных предположениях существуют такие числа $C > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует решение $x(t, \varepsilon)$ задачи Коши (1) при $t \in [0, T/\varepsilon]$ и

(9) $$\sup_{t \leqslant T \leqslant T/\varepsilon} \| x(t, \varepsilon) - x_* \| \leqslant C\varepsilon^N$$

Пусть теперь R^m — m-мерное эвклидово пространство и в $\bar{D} \times R^m$ определены функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ со значениями в R^n и R^m соответственно. Пусть $\omega: \bar{D} \to R^m$. Будем считать, что X и Y — тригонометрические полиномы по $y = (y_1, \ldots, y_m)$ периода 2π. Пусть X, Y и ω $(N + 1)$ раз непрерывно дифференцируемы по x, y.

Рассматривается задача Коши

$$dx/dt = \varepsilon X(x, y), \quad dy/dt = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y)$$

(10) $$x(0) = \alpha \in D, \quad y(0) = \beta \in R^m, \quad 0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon$$

с малым положительным параметром ε.

Приближенное решение этой задачи будем искать в виде

$$x_* = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^N x_N, \quad y_* = \beta + \psi + \varepsilon y_1 + \ldots + \varepsilon^N y_N$$

$$x_i = u_i(\xi) + v_i(\xi, \psi), \quad v_0 \equiv 0, \quad y_i = y_i(\xi, \psi), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad \xi = \varepsilon t$$

$$\psi = \int_0^t \sum_0^N \varepsilon^s \omega_s(\varepsilon, \tau)\, d\tau$$

Таким образом, $\psi' = \Omega = \Sigma \varepsilon^s \omega_s(\xi)$. Как и прежде, через $\bar{X}$, $\bar{Y}$ будем обозначать средние значения X и Y по переменным y. Пусть $X' = X - \bar{X}$, $Y' = Y - \bar{Y}$.

Очевидно

(11) $$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \frac{du_0}{d\xi} + \varepsilon \left[\varepsilon \frac{du_1}{d\xi} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \psi} \Omega \right] + \ldots$$

(12) $$\frac{dy}{dt} = \Omega + \varepsilon \left[\varepsilon \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \frac{\partial y_1}{\partial \psi} \Omega \right] + \ldots$$

Далее

(13) $$X(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots, \beta + \psi + \varepsilon y_1 + \ldots) = \bar{X}(u_0) + X'(u_0, \beta + \psi) + \\ + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \bar{X}}{\partial x}(u_1 + v_1) + \frac{\partial \bar{X}}{\partial y} y_1 + \frac{\partial X'}{\partial x}(u_1 + v_1) + \frac{\partial X'}{\partial y} y_1 \right\} + \ldots$$

(14) $$Y(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots, \beta + \psi + \varepsilon y_1 + \ldots) = \bar{Y}(u_0) + Y'(u_0, \beta + \psi) + \\ + \left\{ \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial x} \right)(u_1 + v_1) + \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} + \frac{\partial Y'}{\partial y} \right) y_1 \right\} + \ldots$$

Функцию $u_0(\xi)$ определим, как и ранее, решая задачу, аналогичную (5). Положим $\omega_0(\xi) = \omega[u_0(\xi)]$. Тогда для v_1 имеем соотношение

(15) $$\frac{\partial v_1}{\partial \psi} \omega_0 = X'(u_0, \beta + \psi)$$

Если предположить, что для любого $\xi \in [0, T]$ и любого целочисленного вектора $k = (k_1, \ldots, k_m) \neq 0$

(16) $$(k, \omega_0(\xi)) \neq 0$$

то из (15) коэффициенты Фурье функции $v_1(\xi, \psi)$ определяются однозначно (если считать, что среднее значение $v_1(\xi, \psi)$ по ψ равно нулю).

В дальнейшем v_i и y_i будем определять таким образом, чтобы их среднее значение по ψ были равны нулю.

Из (10) (12), (14) имеем

$$\omega_1 + \frac{\partial y_1}{\partial\psi}\omega_0 = \frac{\partial\omega(u_0)}{\partial x}(u_1+v_1) + \overline{Y}(u_0) + Y'(u_0, \beta+\psi)$$

Для y_1 и ω_1 получаем соотношения

$$\frac{\partial y_1}{\partial\psi}\omega_0 = \frac{\partial\omega(u_0)}{\partial x}v_1 + Y'(u_0, \beta+\psi),\ \omega_1 = \frac{\partial\omega(u_0)}{\partial x}u_1 + \overline{Y}(u_0) \tag{17}$$

Отсюда y_1 определяется однозначно, а ω_1 будет уточнено позже. Далее, из (10), (11) и (14) имеем

$$\frac{du_1}{d\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\psi}\omega_1 + \frac{\partial v_2}{\partial\psi}\omega_0 = = \left(\frac{\partial\overline{X}}{\partial x} + \frac{\partial X'}{\partial x}\right)(u_1+v_1) + \left(\frac{\partial\overline{X}}{\partial y} + \frac{\partial X'}{\partial y}\right)y_1 \tag{18}$$

Заметим, что ряд слагаемых имеет нулевое среднее по ψ. Поэтому для u_1 и v_2 получаем уравнения

$$\frac{du_1}{d\xi} = \frac{\partial\overline{X}(u_0)}{\partial x}u_1 + U_1(\xi), \quad \frac{\partial v_2}{\partial\psi}\omega_0 = V_2(\xi, \psi) \tag{19}$$

в которых U_1 — уже известная функция, а среднее значение V_2 по ψ равно нулю.

Из первого уравнения (19) однозначно определяется $u_1(\xi)$ с начальным условием $u_1(0) = -v_1(0, 0)$. Затем из второго уравнения (17) находим ω_1 и из (18) уточняем функцию $V_2(\xi, \psi)$. Наконец, $v_2(\xi, \psi)$ однозначно определяем из второго уравнения (19). Последующие члены определяются по этой же схеме.

Определив N членов ряда, получим равномерные по $t \in [0, T/\varepsilon]$ оценки

$$\| dx_*/dt - \varepsilon X(x_*, y_*) \| \leqslant C\varepsilon^{N+1}$$
$$\| dy_*/dt - \omega(x_*) - \varepsilon Y(x_*, y_*) \| \leqslant C\varepsilon^{N}$$

Автор благодарит М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, В. М. Волосова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
2. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
4. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию 27.VI.1983

УДК 539.3

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Матросов А. А., Устинов Ю. А.

Рассматриваются установившиеся колебания полого пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией. Проводится аналитический и численный анализ однородных решений, исследуется поведение дисперсионных кривых вещественных и комплексных мод в зависимости от геометрических параметров.

Ранее [1] методом однородных решений исследовалось распространение волн в сплошном цилиндре из электроупругого материала с осевой поляризацией. Плоские задачи о колебаниях пьезокерамических цилиндров с разными типами поляризации рассматривались в [2, 3]. На основании вариационного метода рассматривались колебания цилиндра конечной длины [4].

1. Рассмотрим установившиеся осесимметричные колебания пьезокерамического цилиндра, поляризованного по радиусу. Внутренний радиус цилиндра r_1, внешний — r_2, длина образующей — $2l$.